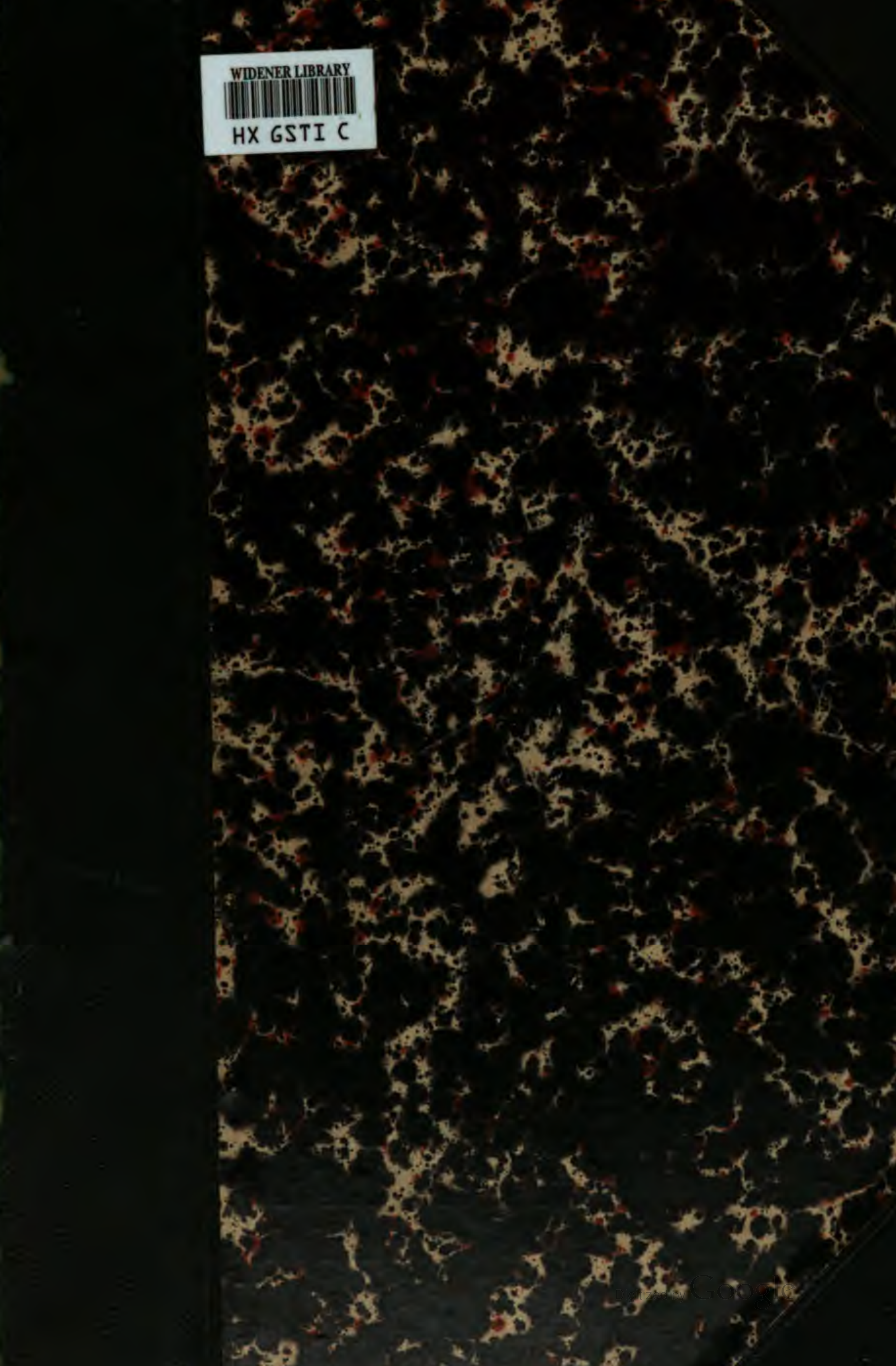
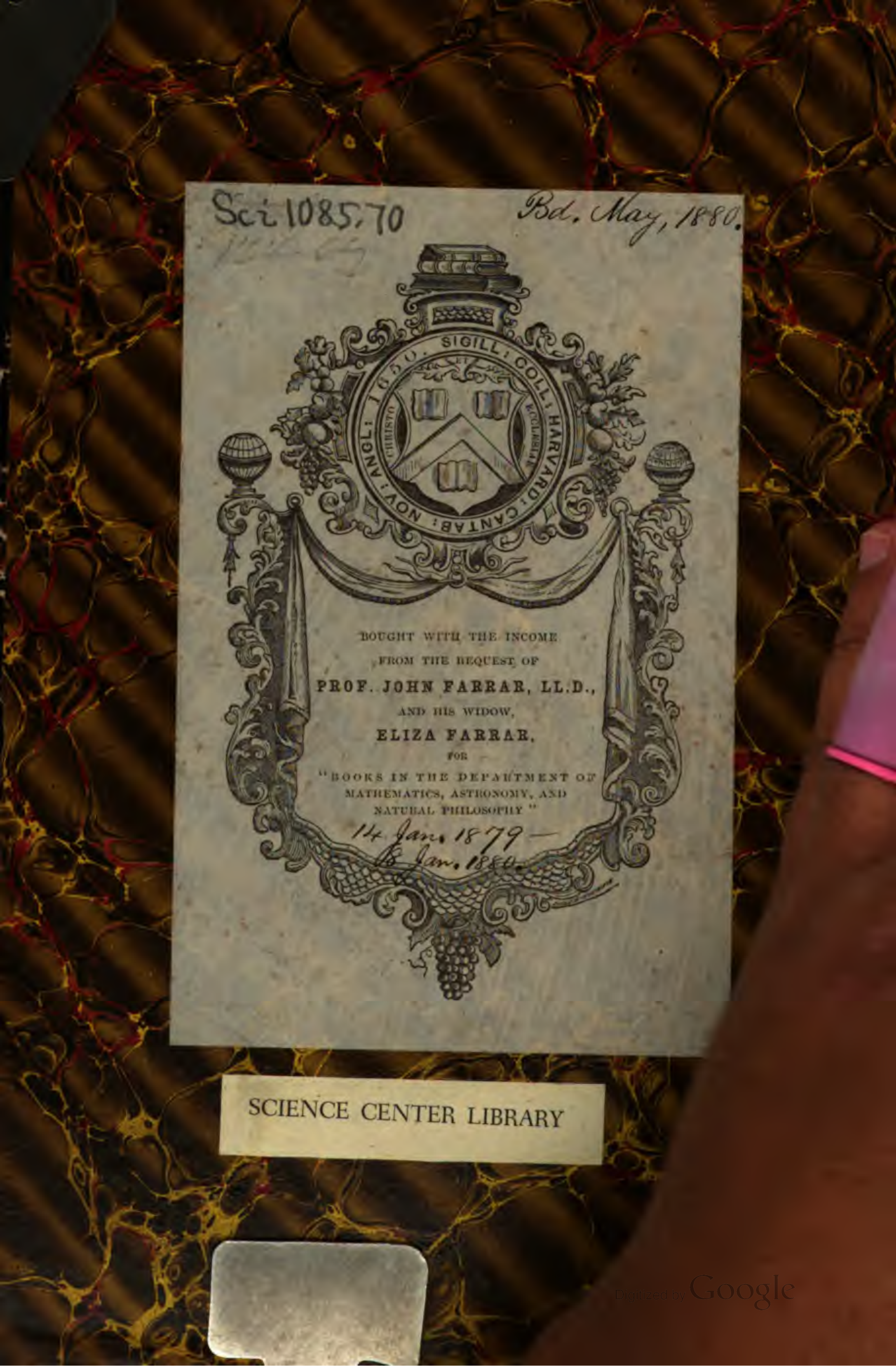
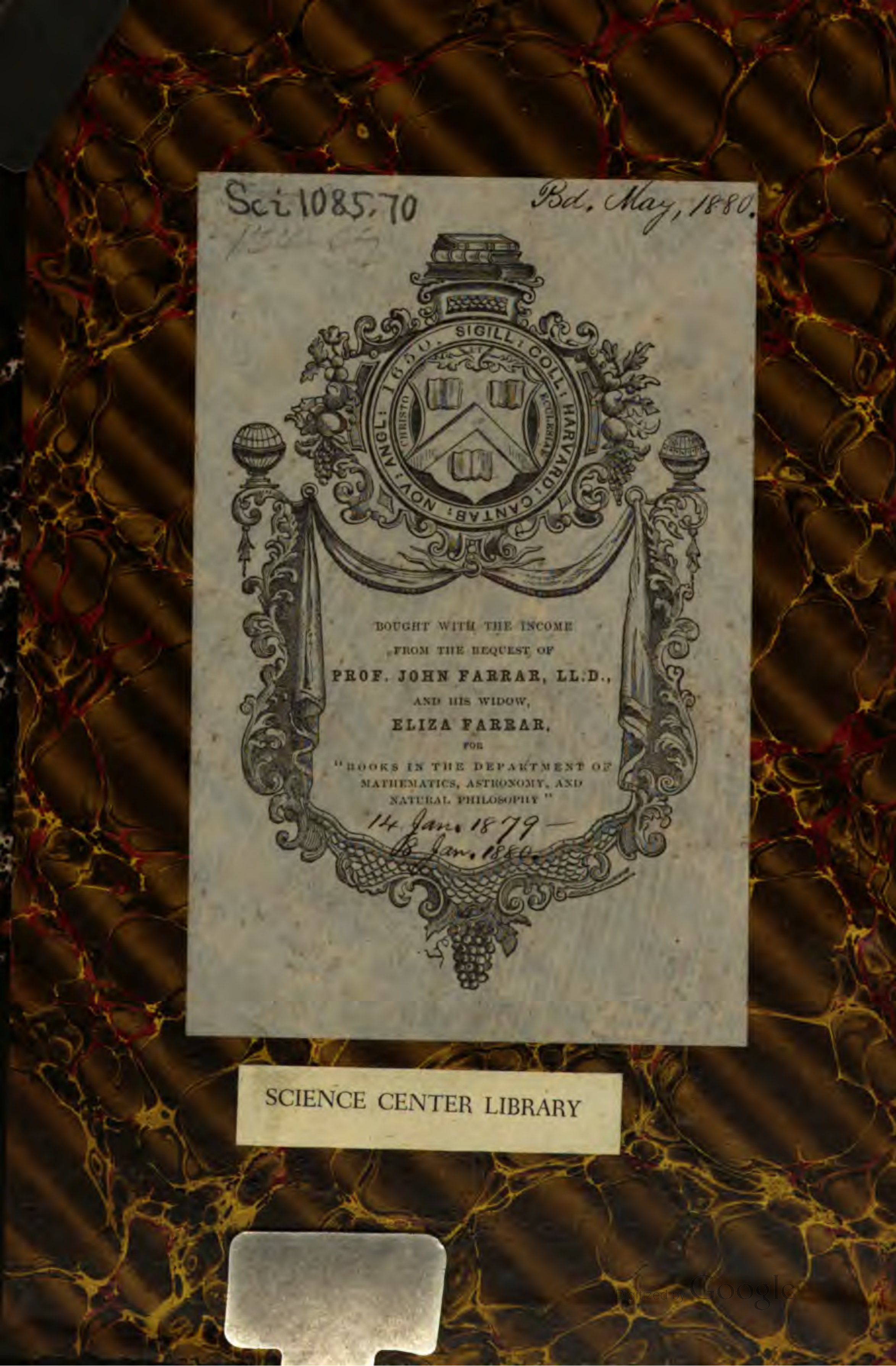
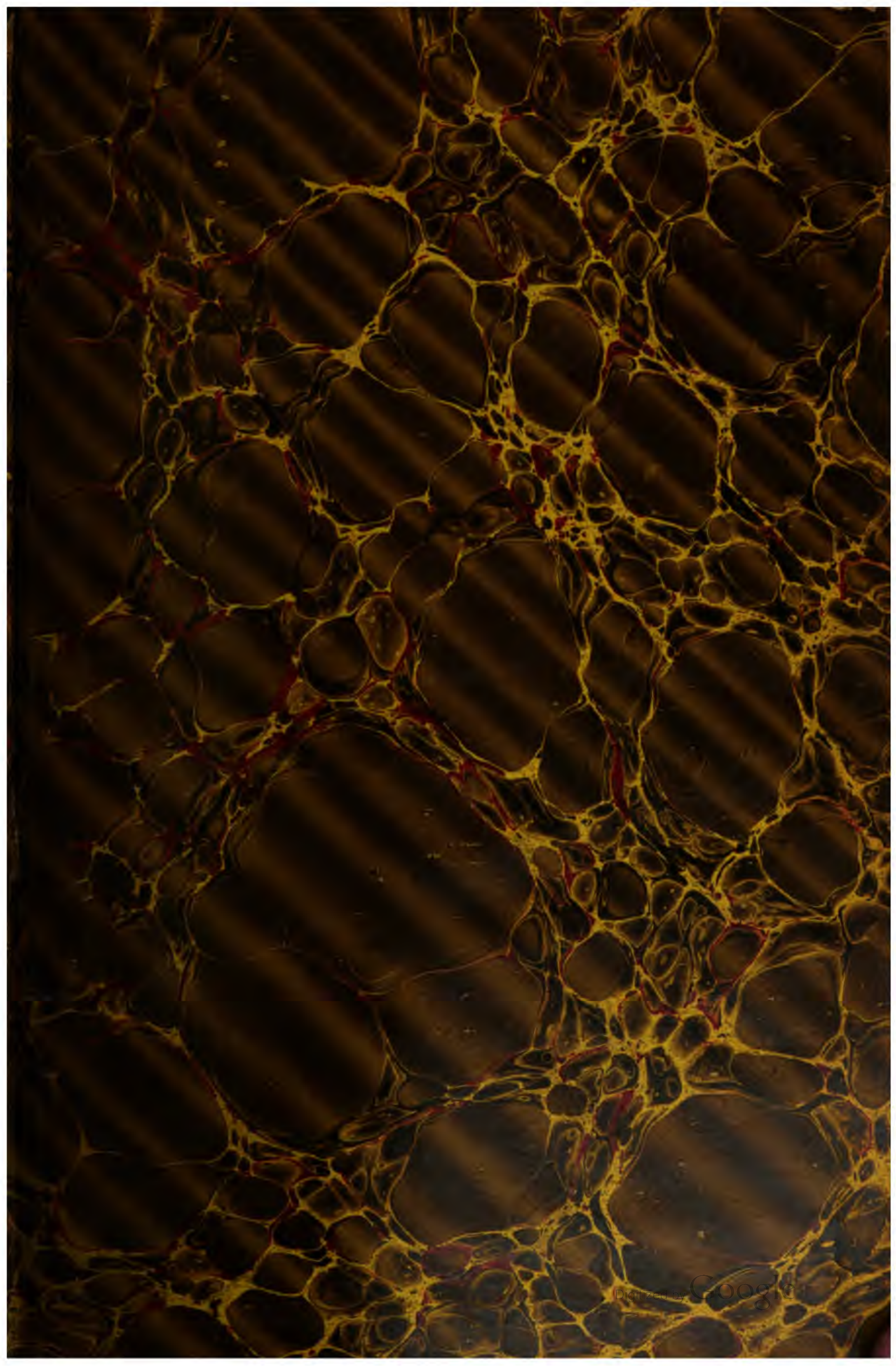

WIDENER LIBRARY
HX GSTI C


Sci 1085.70
Bd. May, 1880.
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
14 Jan. 1879 —
15 Jan. 1880.
SCIENCE CENTER LIBRARY
Digitized by Google

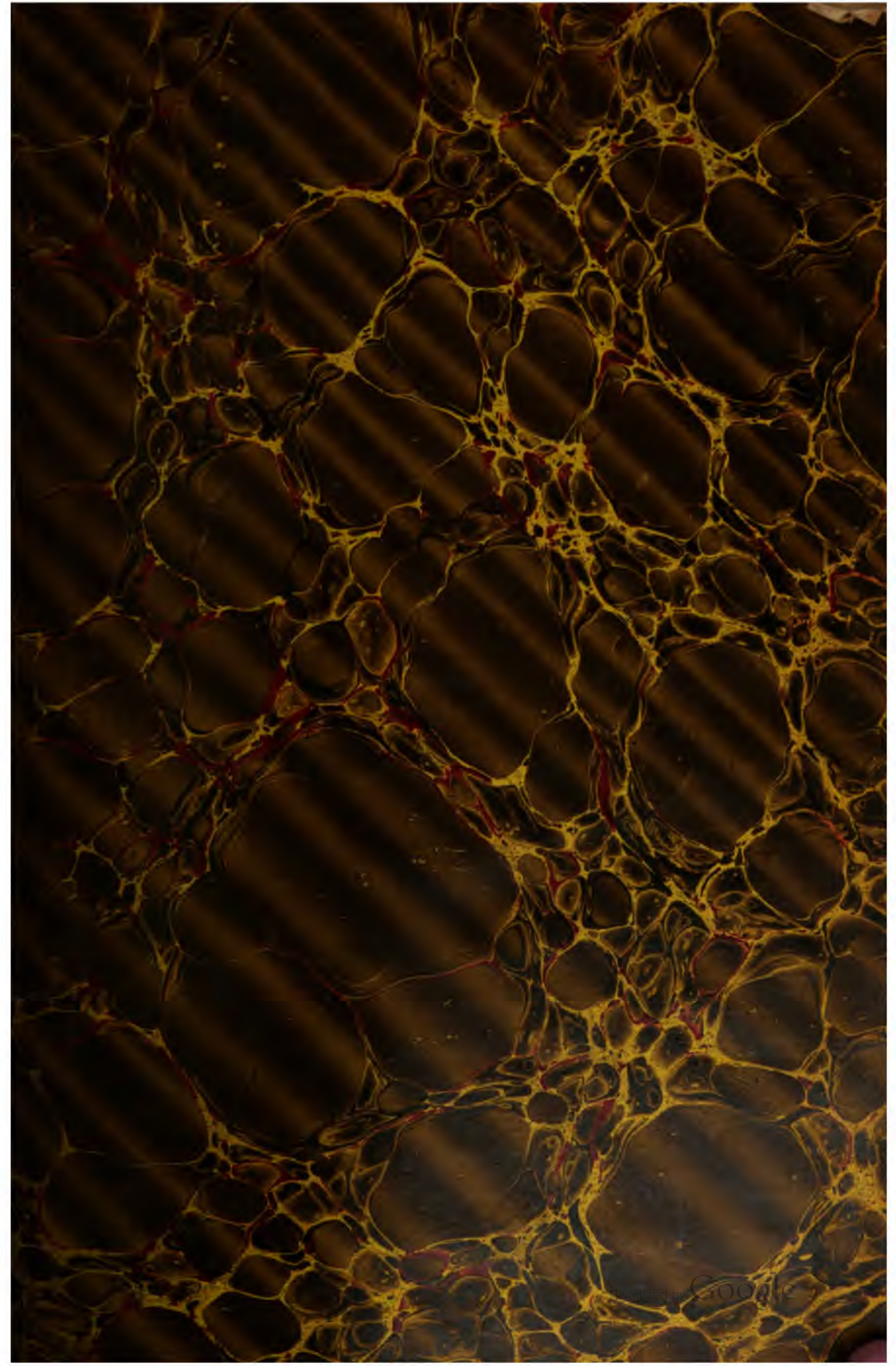



Sci 1085.70
Bd. May, 1880.
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
14 Jan. 1879 —
Jan. 1880.
SCIENCE CENTER LIBRARY
Digitized by Google


Digitized by Google



Sci 1085.70
Bd. May, 1880.
SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
14 Jan. 1879 —
8 Jan. 1880.
SCIENCE CENTER LIBRARY



REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK
etc.

FÜNFZEHNTER BAND.

MIT EINEM ATLAS VON XXVI TAFELN.

Engl. a. d. end.

REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE & ASTRONOMISCHE INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN.

FÜNFZEHNTER BAND.

MIT EINEM ATLAS VON XXVI TAFELN.

MÜNCHEN, 1879.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

1879, Jan. 14 –
1880, Jan. 8.
Farrar Fund.

Inhalt.

REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE & ASTRONOMISCHE INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN

FÜNFZEHNTER BAND.

Inhalt des I. Heftes

(mit Tafel I bis III).

MÜNCHEN, 1879.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Den Herren Abnehmern des Repertoriums zur gefälligen Beachtung.

Das Repertorium für Experimental-Physik erschien vom Jahre 1878 Band XIV ab. einem wiederholt ausgedrückten Wunsche vieler Abnehmer entsprechend, gleichzeitig aber auch veranlasst durch die immer reichlicher zufliessenden Beiträge der Herren Mitarbeiter, bekanntlich in jährlich zwölf statt früher sechs Heften. Trotz der doppelt zu gebenden Anzahl Hefte wurde der Preis der Zeitschrift nur um den kaum nennenswerthen Betrag von 80 ₰. erhöht. Die Verlagshandlung ging bei dieser geringen Preiserhöhung von der Voraussetzung aus, dass der Umfang des Repertoriums sich nunmehr gleich bleiben werde.

Das einlaufende Material zum Repertorium ist aber noch immer im Wachsen begriffen; es dürfte den Herren Abnehmern kaum entgangen sein, dass der Umfang desselben auch im verflossenen Jahre wieder um ein Bedeutendes sich vermehrt, in den letzten Jahren überhaupt sich nahezu verdoppelt hat, während der Inhalt des Repertoriums aber auch um so Vieles reichhaltiger geworden ist.

Die Verlagshandlung hat mit der bisherigen Beibehaltung und beziehungsweise geringen Erhöhung des Preises, welcher mit den gestiegenen Herstellungskosten in keinem Verhältniss stand, sehr erhebliche Opfer gebracht. Die Herren Abnehmer werden es deshalb nicht unbillig finden, wenn die Verlagshandlung zur Verminderung derselben den Preis des Repertoriums vom Jahrgang 1879 Band XV ab auf

Mark 24. —

feststellt.

Auch bei einem weiteren mässigen Wachsen des Materials wird eine Wiederholung der Preissteigerung von nun ab voraussichtlich entbehrlich sein.



Verbesserte Form des Quecksilberdestillirapparates.

Von

A. Weinhold.

(Hiezu Tafel II.)

Der von mir im Jahre 1873 (Rep. für Exp.-Phys. Bd. 9 S. 69) beschriebene Quecksilberdestillirapparat hat — hauptsächlich durch Bosscha (Catalogue of the Loan Collection, London 1876, No. 2423) — einige Abänderungen erfahren, durch die er für den Gebrauch erheblich bequemer geworden ist; Taf. II zeigt ihn in seiner gegenwärtigen Form.

Der Fusstheil des Apparates ist ein Kasten zur Aufnahme etwa verschütteten Quecksilbers, auf ziemlich starken Leisten stehend, so dass genügend Raum ist, um ein flaches Gefäss unterschieben zu können, wenn das in dem Kasten sich ansammelnde Quecksilber einmal durch ein dazu angebrachtes, für gewöhnlich mit einem Korke verstopftes Loch abgelassen werden soll; etwaige Fugen und Risse des Kastens werden mit starkem Hanfpapier verleimt, um Quecksilberverluste zu vermeiden — würde der Apparat in einem Zimmer mit quecksilberdichtem Fussboden aufgestellt, wie ihn die Eudiometerzimmer der Laboratorien vielfach besitzen, so wäre der Kasten besser durch ein Brett ohne Rand zu ersetzen. Auf dem Fussgestell erhebt sich eine feste Holzwand, auf der Rückseite durch eine in der Figur nicht sichtbare Strebe verstärkt; diese Wand trägt sechs kleine feste Console zur Aufnahme verschiedener Theile des Apparates; ein siebentes Consol sitzt an einem besonderen, zwischen den Leisten *u u* verschiebbaren Brettchen, das sich in beliebiger Höhe feststellen lässt, indem man den eisernen Stift *v* durch ein Loch dieses Brettchens und eines der Löcher in der hölzernen Wand hindurchsteckt. Das oberste Consol trägt einen Babo'schen vierfachen Brenner, dessen hohler Fuss durchbohrt und

mit einer eingelötheten Messingröhre versehen ist, um das Rohr *b* durchzulassen; der Schornstein des Brenners ist entfernt und die ringförmige Brenneröffnung mit einem aufgedrückten ringförmigen Stück von feinem Drahtnetz bedeckt, so dass auch bei sehr kleiner Flamme kein Zurückschlagen nach unten stattfindet. Das nächste Consol trägt einen Gasdruckregulator (Experimentir-Gasdruckregulator von S. Elster, Berlin N. O., Neue Königstr. 67); das Leuchtgas gelangt aus dem Druckregulator nach einem Reichert'schen Wärmeregulator (Poggendorff's Ann. Bd. 114 S. 467; Rep. für Exp.-Phys. Bd. 8 S. 123) *d* mit kugelförmigem Gefäss und horizontal umgebogenem Rohr und aus diesem nach dem Brenner; die zur Verbindung dienenden Kautschukschläuche liegen zum grössten Theile auf der Rückseite der Holzwand und treten nur mit ihren Enden durch genügend weite Löcher nach vorn. Der Wärmeregulator sitzt an einem leicht abnehmbaren Arme *i*; *e* ist eine conische Hülle aus Eisenblech, welche die Kugel *a* und die des Wärmeregulators in einigen Millimetern Abstand umgibt; sie hat einen winkelig gebogenen Ansatz, der in einer an die Holzwand angeschraubten Oese steckt, so dass auch die Hülle leicht abzunehmen ist. Das dritte feste Consol trägt die Mariotte'sche Flasche *h*, welche durch untergelegte Brettchen mehr oder weniger hoch gestellt werden kann, und das aus einer umgekehrten Flasche mit abgesprengtem Boden bestehende Gefäss *g*. In den Hals dieser Flasche ist ein durchbohrter Kork eingekittet. Das Glasrohr *b*, welches oben die als Destillirgefäss dienende Kugel *a* trägt, ruht mit seinem unteren, schräg abgeschnittenen Ende auf diesem Korke; das lange Rohr *kk* ist in den Kork streng eingepasst; es geht durch *b* hindurch und mündet im obersten Theile von *a*. Das untere Ende von *kk* mündet nahe am Boden des kleinen Quecksilberreservoirs *l* mit seitlichem Abflussrohre. Das seitwärts an *kk* angesetzte Rohr *m* dient zur Verbindung mit dem Trockengefäss *r* und der Quecksilberluftpumpe *nopq*. Der abwärts gehende Arm von *m* ist in den Hals von *r* luftdicht eingeschliffen; der aufwärts gehende Arm *f* ist mit der Pumpe durch einen kurzen Kautschukschlauch verbunden, der festgebunden und mit geschmolzenem Talg überzogen wird — es könnte auch diese Verbindung durch Ineinanderschleifen der betreffenden Rohrenden hergestellt werden. In das Gefäss *r* kommt englische Schwefelsäure; ein unter dasselbe geschobener, auf dem vierten Consol ruhender Kork verhindert das Herunterfallen, so lange im Apparate noch kein Vacuum vorhanden

ist und also *r* noch nicht durch den Luftdruck getragen wird; die geschliffenen Theile werden durch Bestreichen mit einer Spur Talg gedichtet. Das enge Fallrohr *n* der (Sprengel-Crookes'schen) Luftpumpe mündet in das Quecksilberreservoir *p* mit seitlichem Abflussrohr; der Zufluss des Quecksilbers erfolgt durch das Rohr *o*; dieses ist unten zu einer feinen Spitze ausgezogen und durch einen umsponnenen Kautschukschlauch mit dem beweglichen Reservoir *q* — ebenfalls einer umgekehrten Flasche mit abgesprengtem Boden — verbunden. Die Röhren *n* und *o* sind mit durchbohrten Korken in Löchern des dritten und fünften Consols festgeklemmt; die Gefässe *l* und *p* sind ebenso in dem sechsten Consol befestigt und ruhen überdies auf dem Fussbrett des Apparates.

Um den Apparat in Thätigkeit zu bringen, verfährt man folgendermassen:

Man legt unter die Mariotte'sche Flasche so viele Brettchen, dass das untere, in der Flasche befindliche Ende des Rohres *w* um etwa 1^{cm} weniger unter der Mitte der Kugel *a* steht, als die Höhe des Barometerstandes beträgt; bis zu der nämlichen Höhe füllt man *g* mit einem Theile des zu destillirenden Quecksilbers. Mit einem anderen füllt man die Flasche *h* bis zum Halse; wenn man nun den mit einer Spur Wasser befeuchteten Kautschukpfropf langsam in den Hals von *h* eindrückt, so steigt das Quecksilber in *w* und *x*, bis es in letzterem Rohre nach *g* überfliesst; der Heber *x* muss aus engem Rohre (2^{mm} weit) sein, damit er sich ordentlich mit Quecksilber füllt. Ist in *h* nicht so viel Quecksilber, dass sich der Heber beim Einsetzen des Pfropfens von selbst füllt, so hilft man durch vorsichtiges Blasen an dem Rohre *w* nach. Das Gefäss *l* füllt man bis zur Höhe der seitlichen Abflussröhre mit reinem Quecksilber; dann stellt man das Consol, welches *q* trägt, so, dass seine obere Fläche in die Höhe der Einmündungsstelle von *o* in *n* kommt. Jetzt füllt man *q* mit reinem Quecksilber; dieses fliesst nach *n* und führt die Luft aus dem Apparate mit fort. In dem Masse, als die Luft im Apparate verdünnt wird, steigt das Quecksilber aus *l* in *k* und aus *g* in dem ringförmigen Zwischenraume zwischen *k* und *b* auf; um so viel es in *b* steigt, um so viel verringert man die Höhe von *q*. Das aus *p* ablaufende Quecksilber wird immer in *q* wieder aufgegossen; zuletzt muss das Quecksilber bis etwa zur Mitte der Kugel *a* steigen und *q* bis ziemlich zur Höhe des unteren Endes von *o* herabgelassen sein.

Wenn das Quecksilber in dem Rohre *n* keine Luft mehr mitnimmt und die fallenden Tropfen mit hartem, metallischem Klange aufschlagen, beginnt man mit dem Erwärmen. Man bringt anfangs das verschiebbare Gewicht auf dem Regulatorhebel ganz an das Ende des längeren Armes und öffnet den Hahn der Gasleitung nur so weit, dass über dem Drahtnetz des Brenners *c* nur eine ganz kleine, etwa 5^{mm} hohe, die Kugel *a* noch nicht berührende Flamme brennt. Wenn das Quecksilber in *a* auf etwa 200^0 erwärmt ist, verdampft es lebhaft, aber ohne alles Blasenwerfen; die entwickelten Dämpfe verdichten sich in dem Rohre *k* und wärmen dabei das in der oberen Hälfte von *b* befindliche Quecksilber vor; die verdichteten Tropfen sammeln sich in der unteren Hälfte von *kk*, es tritt Quecksilber aus *kk* nach *l*, und wenn das Niveau in *kk* barometerhoch über das Abflussrohr von *l* gestiegen ist, beginnt das Destillat aus *l* abzulaufen. Die Spannung des Quecksilberdampfes bewirkt ein schwaches Sinken des Niveau in *a*; man stellt nun *h* so hoch, dass das Niveau in *a* bis etwa 5^{mm} über die Mitte der Kugel steigt. In dem Maasse, als Quecksilber aus *a* abdestillirt (etwa 600^g in der Stunde), fliesst anderes aus *h* nach *g* und steigt durch *b* auf; sobald *h* bis zum unteren Ende von *w* entleert ist, wird es neu gefüllt. Die von dem unreinen Quecksilber etwa mitgeführten Spuren von Wasser werden von der Schwefelsäure in *r* absorbirt, geringe Mengen von Luft, die das Quecksilber enthält, und von Sauerstoff aus oxydhaltigem Quecksilber entfernt man, indem man etwa alle halbe Stunden das Quecksilber aus *y* wieder nach *q* giesst; natürlich muss man, um kein Quecksilber zu verlieren, von *y* zwei Exemplare haben, deren eines man unter das Abflussrohr von *p* setzt, ehe man das andere in *q* entleert; ebenso braucht man zwei Flaschen *z* zum Auswechseln für das Auffangen des Destillates. Auf die Abflussrohre von *l* und *p* kann man zweckmässig eine rechteckige Glasplatte legen, die nach vorn und nach beiden Seiten so weit vorsteht, dass kein Staub in die Oeffnungen von *y* und *z* fällt; ebenso empfiehlt es sich, die Oeffnung von *q* mit einem runden Deckel mit übergreifendem Rande zu bedecken.

Hat man die richtige Grösse für die Gasflamme ausprobirt, so justirt man den Wärmeregulator und den Druckregulator auf folgende Weise: Man schraubt die Schraube *s* des Wärmeregulators so weit vorwärts, dass die Flamme zu klein wird und nur eben noch nicht verlischt, und öffnet man nun den Hahn der Gasleitung ganz; dabei

wird die Flamme in der Regel wieder etwas zu gross. Jetzt gibt man durch Drehen der Schraube *s* der Flamme wieder die richtige Grösse und schiebt nun das Gewicht auf dem Hebel des Druckregulators so weit nach dem Drehungspunkte, dass die Flamme wieder ein klein wenig zu klein wird; durch Zurückdrehen von *s* giebt man ihr endlich nochmals die richtige Grösse. Ist die Justirung auf diese Art ausgeführt, so behält die Flamme für alle Folgezeit die richtige Grösse auch bei sehr erheblichen Druckschwankungen. Die Aenderungen an der Schraube *s* und an dem verschiebbaren Gewicht des Regulators beim Justiren nehme man langsam vor, weil die Flamme wegen der merklichen Hohlräume im Brennerfusse und im Regulator ihre Grösse nicht momentan ändert. Soll der Apparat auf einige Zeit ausser Gang gesetzt werden, wie es am Abend nöthig ist, so erniedrigt man die Mariotte'sche Flasche *h* um etwa 1^{cm}, bevor man das Gas auslöscht, weil sonst mit dem Verschwinden des Dampfdrucks in *a* das Quecksilber zu hoch steigt. Beim Wiederanwärmen des Apparates am Morgen öffnet man anfangs den Hahn der Gasleitung nur so viel, dass man eben eine Flamme von richtiger Grösse erhält; nach etwa einer halben Stunde ist das Quecksilber im Wärmeregulator so weit erwärmt, dass man den Hahn ganz öffnen kann; gleichzeitig hebt man dann auch *h* wieder auf die richtige Höhe.

Soll der Apparat einmal gereinigt werden, was aber bei nicht übermässig unreinem Quecksilber erst nöthig ist, nachdem man mehrere Centner destillirt hat, so nimmt man den Kork unter der Trockenflasche *r* weg, zieht diese mit vorsichtig drehender Bewegung nach unten ab, hebt das ganz unreine Quecksilber aus *g* mittels eines Hebers heraus und destillirt es in gewöhnlicher Weise aus einer Eisenretorte.

Der Apparat ist etwas complicirt und seine Handhabung erscheint vielleicht in der Beschreibung etwas umständlich; sie ist aber in Wirklichkeit sehr bequem und der Apparat hat sich vielfach gut bewährt — allen anderen Reinigungsmethoden gegenüber hat die Destillation im Vacuum den Vorzug, dass sie in einer Operation unmittelbar trocknes, oxydfreies Quecksilber liefert und zwar bei dem beschriebenen Apparate ohne jede Gefahr eines Quecksilberverlustes und continuirlich. Es sei gestattet, auf das Urtheil von Wild (Petersburger Repertorium für Meteorologie 1874 Bd. 3 No. 1 S. 145) zu verweisen.

Herr Glasbläser R. Götze, Leipzig, Turnerstrasse 15, fertigt den Apparat in ganz vortrefflicher Weise.

Ueber die elektromotorische Kraft von Metallen in den wässerigen Lösungen ihrer Sulfate, Nitrate und Chloride.

Von

Dr. **Franz Streintz**

in Graz.

(Aus den Wiener Sitzungsberichten vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Die vorliegende Untersuchung, welche ich auf Anregung des Directors des physikalischen Institutes in Graz, Herrn Professor L. Boltzmann, unternahm, hat den Zweck, eine Lücke in der ansehnlichen Reihe von Bestimmungen der elektromotorischen Kraft von Elementen, welche aus zwei Metallen und zwei Flüssigkeiten zusammengesetzt sind, zu ergänzen.

J. Regnauld (Compt. rend. T. 43 und 64, s. auch Wiedemann, Galv. Bd. 1 §. 254) hat zwar einige Metalle in verschiedenen wässerigen Lösungen ihrer Verbindungen geprüft, doch lässt seine Arbeit eine consequente Durchführung in der Zusammenstellung der untersuchten Elemente vermissen.

Die liebenswürdige Liberalität von Seite der Direction des Institutes setzte mich in den Stand, sechzehn Metalle in den Lösungen ihrer im Wasser beständigen Sulfate, Nitrate und Chloride in den Kreis der Untersuchung zu ziehen.

Da je zwei Metalle nur in den Lösungen ihrer gleichartigen Verbindungen zu einem Elemente combinirt wurden, so zerfällt die Arbeit in drei Theile, welche mit den Schlagworten Sulfate, Nitrate und Chloride überschrieben erscheinen.

I. Sulfate.

Die Elemente wurden folgendermassen zusammengesetzt: In einem niederen Glasgefässe, dessen Boden mit durch einen Tropfen Schwefelsäure angesäuertem Wasser bedeckt war, standen zwei kleine Thonzellen,

in welchen sich die zu untersuchenden Metalle mit den entsprechenden Lösungen befanden. Die Metalle hatten Stangenform, konnten also durch Klemmschrauben leicht mit der Leitung verbunden werden. (Bei Untersuchung des Quecksilbers wurde dieses Metall in die Thonzelle gegossen, darauf kam die Lösung des Quecksilbersulfates; die Leitung aber wurde durch einen Platindraht hergestellt, dessen durch das Sulfat führende Theil mit einer Schicht Siegellack überzogen war.)

Die Bestimmungen wurden zuletzt nach der Poggendorff'schen Compensationsmethode ausgeführt; als sich jedoch in den Resultaten Abweichungen bis zu zehn, ja sogar fünfzehn Procent ergaben, musste dieselbe aufgegeben werden. Der Grund dieser Schwankungen mag, abgesehen von den Fehlern, welche durch die Umständlichkeit des Verfahrens bedingt sind, hauptsächlich darin liegen, dass ganz geringe Verunreinigungen der Lösungen von bedeutendem Einflusse auf das Resultat sind. Um nur ein Beispiel zu erwähnen, gab das Element Zink in Zinkvitriol, Eisen in neutralem Eisenvitriol

0,602 Daniell,

während dieselbe Combination, deren Eisenvitriol jedoch mit etwas angesäuertem Wasser versetzt wurde, den Werth

0,480 D. E.

für die elektromotorische Kraft lieferte.

An Stelle des die Leitung zwischen den beiden Thonzellen vermittelnden sauren Wassers musste daher destillirtes Wasser treten, das noch so viel Leitungsvermögen besitzt, damit die Spannungsdifferenz zwischen den beiden Metallen an einem Elektrometer geprüft werden kann.

Mit einem erst kürzlich in den Besitz des Institutes gelangten, nach Sir William Thomson von J. White in Glasgow angefertigten Quadranten-Elektrometer mit Umschaltevorrichtung (reversing key) wurde die Untersuchung wieder aufgenommen. Das Instrument wurde genau graduirt; die Leydener Flasche desselben war so geladen, dass ein Daniell-Element einen Ausschlag von ungefähr 110 Theilstrichen Abstand auf der 115^{cm} vom Hohlspiegel entfernt aufgestellten (Kreisbogen-)Scala gab. Zuerst wurde constatirt, dass die Veränderungen der Temperatur des Zimmers, in welchem die Beobachtungen angestellt wurden, keine Aenderungen an der Grösse der elektromotorischen Kraft hervorbrachten. Dann wurde der Einfluss der Concentration der Lösungen untersucht. Hiebei zeigte es sich, dass Veränderungen

von Bedeutung erst bei ziemlich vorgeschrittener Verdünnung der Lösungen stattfanden. Ich theile daher nur die Zahlen mit, die ich an dem Elemente

$$Zn | Zn\,SO_4 + Zn\,SO_4 | Aq + Aq | Cu\,SO_4 + Cu\,SO_4 | Cu,$$

das ich in Zukunft immer durch $Zn_s\,Cu$ bezeichnen werde, gefunden habe. Als Einheit wurde ein $Zn_s\,Cu$ gewählt, dessen Lösungen möglichst concentrirt waren: das specifische Gewicht der Zinksulfatlösung betrug 1,240, das der Kupfersulfatlösung 1,195. Der Bequemlichkeit halber habe ich die elektromotorische Kraft dieses Elementes = 100 gesetzt. Selbstverständlich wurde jedes „Element anderer Concentration" mit jenem verglichen und auf dessen Werth reducirt. Es ergaben sich folgende Zahlen:

Spec. Gew. d. $Zn\,SO_4 + Aq$	Spec. Gew. d. $Cu\,SO_4 + Aq$	Elektrom. Kraft
1,240	1,195 — 1,145	100,0
„	1,130 — 1,100	99,7
„	1,080 — 1,045	99,0
„	1,030 — 1,010	98,5
„	1,000	97,3
1,240 — 1,120	1,195	100,0
1,100 — 1,080	„	100,5
1,063 — 1,005	„	99,8

Es nimmt also die elektromotorische Kraft mit Verdünnung der Kupfervitriollösung etwas ab, während sie mit Verdünnung der Zinkvitriollösung zuerst zunimmt. Auf letztere Thatsache hat übrigens schon Svanberg (Poggend. Ann. Bd. 73) hingewiesen.

Die nachstehende Tabelle enthält die Werthzahlen für die elektromotorische Kraft der Metalle in ihren Sulfatlösungen; die Zahlen sind sämmtlich Mittelwerthe aus acht bis zwölf Beobachtungen. Die einzelnen Beobachtungen weichen im schlimmsten Falle bis zu 5% ab. Die Metalle, deren wässerige Sulfatlösungen beständig, dürften in der Tabelle ziemlich vollständig enthalten sein. Nur das Metall Nickel fehlt: sein Sulfat war durch Kupfervitriol verunreinigt.

Um eine Controle für die Genauigkeit der Werthe zu erhalten, habe ich jedes Metall in seiner Lösung mit jedem der anderen Metalle in der ihm zugehörigen Lösung combinirt. Folgen sich nämlich drei Metalle, wie Zn Cd Cu, auf diese Weise in der Spannungsreihe, so ist:

$$Zn_s\,Cu = Zn_s\,Cd + Cd_s\,Cu.$$



Man überzeugt sich davon leicht, wenn man für $Zn_s Cd$ und $Cd_s Cu$ die entsprechenden Formeln entwickelt, wie dies für $Zn_s Cu$ geschehen ist.

Als Normalelement diente ein $Zn_s Cu$; jedes andere Element wurde mit demselben verglichen.

Tafel I.

Zahl	Angabe der Combination	Beobachtete Mittelwerthe	Zahl	Angabe der Combination	Beobachtete Mittelwerthe
1	$Hg_s Ag$	0,0	19	$Mg_s Zn$	67,0
2	$Cd_s Sn$	11,6	20	$Cd_s Cu$	67,6
3	$Co_s Bi$	12,9	21	$Zn_s Co$	70,2
4	$Bi_s Cu$	16,5	22	$Zn_s Bi$	83,5
5	$Sn_s Co$	27,8	23	$Sn_s Hg$	88,9
6	$Co_s Cu$	29,4	24	$Sn_s Ag$	90,3
7	$Zn_s Cd$	32,6	25	$Cd_s Hg$	99,8
8	$Cu_s Hg$	33,0	26	$Zn_s Cu$	100,0
9	$Cu_s Ag$	33,6	27	$Mg_s Cd$	101,2
10	$Cd_s Co$	38,9	28	$Cd_s Ag$	101,4
11	$Sn_s Bi$	40,2	29	$Mg_s Sn$	112,4
12	$Zn_s Sn$	44,3	30	$Zn_s Ag$	132,6
13	$Bi_s Ag$	49,7	31	$Zn_s Hg$	132,8
14	$Bi_s Hg$	49,9	32	$Mg_s Co$	138,0
15	$Cd_s Bi$	51,2	33	$Mg_s Bi$	149,2
16	$Sn_s Cu$	55,6	34	$Mg_s Cu$	167,5
17	$Co_s Ag$	62,9	35	$Mg_s Hg$	200,8
18	$Co_s Hg$	64,0	36	$Mg_s Ag$	201,1

Die Spannungsreihe der untersuchten Metalle in ihren Sulfaten ordnet sich nach der Tabelle auf folgende Weise:

$$- \text{Mg, Zn, Cd, Sn, Co, Bi, Cu, } \frac{\text{Ag}}{\text{Hg}} +$$

Auffallend ist die Erscheinung, dass Silber und Quecksilber in derselben sich decken, zu einem Elemente verbunden, daher die elektromotorische Kraft Null geben. Es muss demnach für die Grösse der elektromotorischen Kraft gleichgiltig sein, welches von beiden Metallen man mit einem anderen Metalle combinirt. Dies ist auch, geringe, den Veränderungen der Lösungen zuzuschreibende Differenzen abgerechnet, durchwegs der Fall. An dieser Stelle kann auch bemerkt werden, dass die elektromotorische Kraft der Elemente erst constant wird, wenn die Metalle einige Zeit (30 bis 50 Minuten) in ihren Lösungen gestanden haben.

Auf eine weitere merkwürdige Erscheinung möchte ich noch aufmerksam machen. Die Werthe für die elektromotorische Kraft einiger Elemente scheinen nämlich in sehr einfachen Zahlenverhältnissen zu stehen. Schon bei flüchtigem Ueberblicken der Tafel bemerkt man Zahlen, die von 50, 100, 150 und 200 nur um wenige Zehntel abweichen. Ich habe mich daher veranlasst gefunden, einige dieser Zahlen in Gruppen zusammenzustellen. Die in der dritten Colonne dieser Gruppen enthaltenen „berechneten Werthe" wurden dadurch gewonnen, dass jeder der beobachteten Werthe durch sein zugehöriges (in der ersten Colonne angegebenes) Multiplum dividirt und das aus den so erhaltenen Quotienten gefundene arithmetische Mittel mit sämmtlichen Multiplen der Reihe nach multiplicirt wurde.

Multiplum	Beobachtete Werthe		Berechnete Werthe	Differenzen zwischen den beob. und ber. Werthen
1	Bi_s Ag 49,7 Bi_s Hg 49,9 Cd_s Bi 51,2	Mittel 50,3	50,1	+ 0,2
2	Cd_s Hg 99,8 Zn_s Cu 100,0 Mg_s Cd 101,2 Cd_s Ag 101,4	Mittel 100,6	100,3	+ 0,3
3	Mg_s Bi	149,2	150,4	— 1,2
4	Mg_s Ag 201,1 Mg_s Hg 200,8	Mittel 201,0	200,6	+ 0,4
1	Zn_s Cd 32,6 Cu_s Hg 33,0 Cu_s Ag 33,6	Mittel 33,1	33,4	— 0,3
2	Mg_s Zn 67,0 Cd_s Cu 67,6	Mittel 67,3	66,8	+ 0,5
3	Cd_s Hg 99,8 Zn_s Cu 100,0 Mg_s Cd 101,2 Cd_s Ag 101,4	Mittel 100,6	100,2	+ 0,4
4	Zn_s Ag 132,6 Zn_s Hg 132,8	Mittel 132,7	133,6	— 0,9
5	Mg_s Cu	167,5	167,0	+ 0,5
6	Mg_s Hg 200,8 Mg_s Ag 201,1	Mittel 201,0	200,5	+ 0,5

Ausser den angeführten Zahlen liessen sich noch mehrere finden, welche in einfachen Verhältnissen zu einander stehen; so z. B. verhalten sich die Elemente:

$$Co_s Cu : Zn_s Co : Zn_s Cu = 3 : 7 : 10 \text{ u. s. w.}$$

Um die Elemente auf die Daniell-Einheit reduciren zu können, habe ich ein $Zn_s Cu$ mit einem Daniell'schen Elemente (amalgamirtes Zink in Zinkvitriollösung) verglichen, und das Verhältniss

$$\frac{Zn_s Cu}{Hg\ \overline{Zn_s Cu}} = \frac{100}{101}$$

gefunden.

II. Nitrate.

An Stelle der Thonzellen, deren Reinigung sich als ziemlich umständlich erwies, treten Glasbecher; die in denselben enthaltenen Flüssigkeiten wurden durch eine feuchte Schnur in leitende Verbindung gebracht.

Als Normalelement diente jetzt ein

$$Zn \mid Zn(NO_3)_2 + Zn(NO_3)_2 \mid Aq + Aq \mid Cu(NO_3)_2 + Cu(NO_3)_2 \mid Cu,$$

das der Kürze halber durch $Zn_n Cu$ bezeichnet werden soll. — Analog sind die Bezeichnungen für die übrigen Combinationen gewählt.

Es erschien nun nicht mehr nothwendig, alle Metalle unter einander zu Elementen zusammenzustellen. Die Metalle wurden in ihren Nitratlösungen nur mehr mit Zink und Zinknitrat und mit Kupfer in Kupfernitrat verbunden. Die Werthe für alle anderen Combinationen können dann durch Rechnung gefunden werden.

Ein Theil der Elemente blieb in einem Zeitraume von 24 Stunden constant; der andere Theil zeigte erhebliche Veränderungen der elektromotorischen Kraft, sobald die Metalle längere Zeit hindurch mit ihren Lösungen in Berührung gestanden hatten.

Die Elemente wurden unmittelbar nach ihrer Zusammenstellung geprüft; nach dem Verlaufe von einer Stunde, von 24 und 48 Stunden wurden die Beobachtungen wiederholt. Nach 48 Stunden war die elektromotorische Kraft bei sämmtlichen Elementen verändert.



Tafel II.

Multipla	Beobachtete Werthe unmittelbar nach der Zusammenstellung		Beobachtete Werthe nach einer Stunde	Beobachtete Werthe nach 24 Stunden	Mittelwerthe dieser drei Reihen	Berechnete Werthe	Beobachtete Werthe nach 48 Stunden
	Mg_n Zn	58,1	63,5	73,5			80,2
	Mg_n Cu	159,1	163,5	173,2			179,7
	Zu_n Cd	17,5	21,4	29,8			32,6
	Cd_n Cu	81,8	79,0	70,3			68,1
5	Zn_n Sn	25,6	25,1	23,8	24,8	25,0	26,3
15	Sn_n Cu	74,8	75,0	76,3	75,4	75,1	73,6
8	Zn_n Al	38,9	40,3	39,8	39,7	40,0	30,7
12	Al_n Cu	60,7	60,2	60,0	60,3	60,1	69,5
8	Zn_n Pb	40,0	39,8	40,3	40,0	40,0	44,9
12	Pb_n Cu	60,8	60,3	59,8	60,3	60,1	54,0
	Zn_n Fe	41,7	—	—			—
	Fe_n Cu	57,3	—	—			—
	Zn_n Co	67,6	62,5	55,7			57,1
	Co_n Cu	34,0	37,6	44,5			43,2
15	Zn_n Bi	74,8	74,3	75,4	74,8	75,1	71,2
5	Bi_n Cu	25,7	25,5	24,8	25,3	25,0	29,1
	Zn_n Ni	82,6	79,3	73,7			71,7
	Ni_n Cu	17,4	22,0	25,8			28,2
	Zn_n Ag	142,0	140,3	142,1			146,6
	Cu_n Ag	42,1	41,1	42,1			47,0
20	Zn_n Cu	100,0	100,0	100,0			100,0

Die Spannungsreihe der Metalle in ihren Nitratlösungen gestaltet sich nach der Tafel folgendermassen:

$$- \mathrm{Mg, Zn, Cd, Sn}, \frac{\mathrm{Al}}{\mathrm{Pb}}, \mathrm{Fe, Co, Bi, Ni, Cu, Ag} +$$

Die in ihren Sulfatlösungen untersuchten Metalle haben ihre Stellung in der neuen Spannungsreihe nicht geändert.

Um einige Elemente, die hinsichtlich ihrer elektromotorischen Kraft in einfachen Zahlenverhältnissen stehen, nicht wieder gesondert in Gruppen ordnen zu müssen, ist die Zusammenstellung derselben mit den entsprechenden „Multiplen“ und „berechneten Werthen“ schon auf der Tafel vorgenommen worden.

Aus der Proportion

$$\mathrm{Zn_n Sn} : \mathrm{Sn_n} \frac{\mathrm{Al}}{\mathrm{Pb}} : \frac{\mathrm{Al}}{\mathrm{Pb}}{}_{\mathrm{n}} \mathrm{Bi} : \mathrm{Bi_n Cu} = 5:3:7:5$$



lassen sich die Beziehungen zwischen den anderen aus den angeführten Metallen zusammengestellten Elementen leicht finden. Beispielsweise verhält sich

$$Zn_n Sn : Sn_n Bi : Sn_n Cu : Zn_n Cu = 1 : 2 : 3 : 4.$$

Der Vergleich mit dem Daniell-Elemente ergab für die drei ersten Beobachtungsreihen:

$$\frac{Zn_n Cu}{Hg\ Zn_s Cu} = \frac{99{,}3}{101},$$

für die vierte Beobachtungsreihe jedoch:

$$\frac{Zn_n Cu}{Hg\ Zn_s Cu} = \frac{98{,}0}{101}.$$

III. Chloride.

Am veränderlichsten zeigten sich die elektromotorischen Kräfte in den Lösungen dieser Verbindungen. — Als Normalelement diente jetzt ein

$$Zn_{cl}\ Cu = Zn \mid Zn\ Cl_2 + Zn\ Cl_2 \mid Aq + Aq \mid Cu\ Cl_2 + Cu\ Cl_2 \mid Cu,$$

welches von Zeit zu Zeit mit einem Daniell-Elemente verglichen wurde.

Der Vergleich ergab für die zwei ersten Reihen der nachfolgenden Tafel:

$$\frac{Zn_{cl} Cu}{Hg\ Zn_s Cu} = \frac{90{,}7}{101}, \text{ für die dritte Reihe } = \frac{89}{101}.$$

Tafel III.

Zahl	Angabe der Combination	Beobachtete Werthe unmittelbar nach der Zusammenstellung	Beobachtete Werthe nach einer Stunde	Beobachtete Werthe nach 12 Stunden
1	Mg_{cl} Zu	80,0	77,2	77,6
	Mg_{cl} Cu	180,4	177,3	177,8
2	Zn_{cl} Al	16,5	19,8	22,3
	Al_{cl} Cu	84,5	80,2	77,6
3	Zn_{cl} Cd	20,2	25,1	25,0
	Cd_{cl} Cu	79,6	76,4	75,9
4	Zn_{cl} Fe	45,9	47,3	84,0
	Fe_{cl} Cu	53,5	52,8	16,6

Zahl	Angabe der Combination	Beobachtete Werthe unmittelbar nach der Zusammenstellung	Beobachtete Werthe nach einer Stunde	Beobachtete Werthe nach 12 Stunden
5	Zn_{cl} Sn	52,0	52,3	52,7
	Sn_{cl} Cu	48,7	48,2	47,7
6	Zn_{cl} Bi	61,9	63,9	66,5
	Bi_{cl} Cu	37,0	37,4	33,7
7	Zn_{cl} Co	73,1	73,2	72,0
	Co_{cl} Cu	27,4	27,0	28,2
8	Zn_{cl} Sb	80,9	80,4	42,6
	Sb_{cl} Cu	19,2	20,0	57,7
9	Zn_{cl} Ni	108,9	103,7	101,8
	Cu_{cl} Ni	9,0	3,5	1,6
10	Zn_{cl} Hg	113,2	114,4	120,0
	Cu_{cl} Hg	13,4	14,4	20,2
11	Zn_{cl} Pt	157,7	158,0	157,7
	Cu_{cl} Pt	57,4	58,4	57,2
12	Zn_{cl} Au	195,0	194,2	199,0
	Cu_{cl} Au	94,4	94,5	98,5

Zn_{cl} Cu = 100,0.

Die Spannungsreihe der Metalle in den Lösungen ihrer Chloride ist demnach folgende:

— Mg, Zn, Al, Cd, Fe, Sn, Bi, Co, Sb, Cu, Ni, Hg, Pt, Au +

Vergleicht man diese Spannungsreihe mit der vorhergehenden, so findet man, dass einige Metalle ihren Platz vertauscht haben.

Das zur Untersuchung nöthige Material wurde aus der Fabrik des Herrn Dr. Th. Schuchardt in Görlitz als chemisch rein bezogen. Das Platin und Goldchlorid stellte mir mein Freund, Herr J. Mayrhofer, in vollkommen neutraler Lösung dar, wofür ich ihm meinen herzlichsten Dank ausspreche.

Zum Schlusse fühle ich mich angenehm verpflichtet, dem Herrn Director L. Boltzmann für die Anregung zu dieser Arbeit sowohl, als für die freundliche Unterstützung während derselben meinen innigsten Dank auszudrücken.

Theorie der Absorption und Fluorescenz.

Von

E. Lommel.

(Aus den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Die Theorie der Absorption und Fluorescenz, welche in den folgenden Paragraphen entwickelt werden soll, ist in ihren wesentlichen Zügen die nämliche, welche ich in einer früheren Veröffentlichung[1]) als mehr populär gehaltene Skizze bereits mitgetheilt habe. Es handelt sich hier wie dort um die Aufgabe, die Bewegung eines Körpertheilchens (Atoms) zu bestimmen, das, während es nach einer Gleichgewichtslage hinstrebt, von einem periodischen Impulse ergriffen wird. Die gegenwärtige Behandlung dieser Aufgabe unterscheidet sich von der früheren in zwei Punkten. Nämlich erstens dadurch, dass die zu Grunde liegende Bewegungsgleichung durch Hinzufügung eines Gliedes, welches einen der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand ausdrückt, eine allgemeinere Gestalt erhielt; die Einführung eines solchen Widerstandes involvirt offenbar keine neue Hypothese: sie muss vielmehr, da das Vorhandensein eines Widerstandes der allgemeinere in der Natur gewöhnlich vorkommende Fall ist, angesehen werden als Beseitigung der bisher üblichen Hypothese, dass dieser Widerstand ausser Acht gelassen werden dürfe. Zweitens unterscheidet sich die gegenwärtige Darstellung von der früheren dadurch, dass ein Princip, welches in der Akustik allgemein und ausdrücklich anerkannt ist und in der Optik bisher wohl eben so allgemein aber stillschweigend angenommen wurde, nämlich der Satz: „Homogenes Licht besteht aus einfachen pendelartigen Schwingungen", zur Interpretation der Ausdrücke herangezogen wird.

---

[1]) Repertorium Bd. 7 pag. 65. Sitzungsberichte 3. Hft. S. 39. Pogg. Ann. Bd. 143 S. 26.



Die Hypothesen, welche unserer Theorie zu Grunde liegen, sind überhaupt nur wenige, und darunter keine, welche für diese Theorie speciell aufgestellt wäre, sondern nur solche, welche auch sonst in der Wissenschaft allgemein anerkannt sind.

Vor allem wird an der Anschauung festgehalten, dass die schwingenden Bewegungen, welche die Absorption und die Fluorescenz verursachen, innerhalb des Moleküles sich vollziehen, oder, nach der früher von mir gebrauchten Bezeichnung, intramolekulare sind. Unter „Molekül" wird im Sinne der Chemie eine aus Atomen von bestimmter Natur und Anzahl gesetzmässig aufgebaute Atomgruppe verstanden, in welcher jedem Atom eine bestimmte Gleichgewichtslage angewiesen ist, um welche es zu schwingen vermag.

Es wird endlich vorausgesetzt, dass jedes Atom nach seiner Gleichgewichtslage hingezogen werde mit einer Kraft, welche ausdrückbar sei durch eine nach steigenden Potenzen der Verschiebung entwickelbare Function der letzteren, die in der Gleichgewichtslage selbst zu Null wird. Wenn, entgegen der gewöhnlichen Behandlungsweise, welche sich unter der Annahme verschwindend kleiner Schwingungen auf die Berücksichtigung der ersten Potenz der Verschiebung beschränkt, auch noch deren zweite Potenz mit in Rechnung gezogen wird, so wird auch hiemit keine neue Hypothese aufgestellt, sondern nur eine Beschränkung, welche der vollständigen Hypothese gewöhnlich auferlegt wird, theilweise beseitigt.

---

1. Ein Körperatom von der Masse m befinde sich zur Zeit t im Abstande x von seiner Gleichgewichtslage und werde nach dieser hingezogen mit einer Kraft, welche als Function dieses Abstandes ausgedrückt sei durch die Reihe

$$-Ax - Bx^2 - Cx^3 - \dots .$$

Das Körpertheilchen sei ferner einem seiner Geschwindigkeit proportionalen Widerstand $-K\frac{dx}{dt}$ ausgesetzt und empfange ausserdem noch einen periodischen Impuls $-F\sin qt$. Die Gleichung seiner Bewegung lautet alsdann:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -K\frac{dx}{dt} - Ax - Bx^2 - Cx^3 - \dots - F\sin qt,$$



oder, wenn wir

$$\frac{K}{m} = 2k, \quad \frac{A}{m} = p^2, \quad \frac{B}{m} = b\varepsilon, \quad \frac{C}{m} = c\varepsilon^2, \quad \frac{F}{m} = f$$

setzen, wo unter ε eine kleine Grösse verstanden wird, durch deren Verschwinden die Aufgabe auf den gewöhnlich betrachteten Fall unendlich kleiner Schwingungen reducirt wird, folgendermassen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2k\frac{dx}{dt} + p^2x + b\varepsilon x^2 + c\varepsilon^2 x^3 + \ldots + f\sin qt = 0. \qquad (1$$

2. Um diese Gleichung näherungsweise zu integriren, setzen wir

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots.,$$

ordnen nach Potenzen von ε und machen die Coëfficienten dieser Potenzen einzeln der Null gleich. Wir erhalten so zur Bestimmung der Functionen $x_0, x_1 \ldots$ die linearen Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x_0}{dt^2} + 2k\frac{dx_0}{dt} + p^2x_0 + f\sin qt = 0\\
&\frac{d^2x_1}{dt^2} + 2k\frac{dx_1}{dt} + p^2x_1 + bx_0^2 = 0\\
&\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2k\frac{dx_2}{dt} + p^2x_2 + 2bx_0x_1 + cx_0^3 = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (2$$

. . . .

Wenn wir in Gleichung 1 bei der zweiten Potenz von x stehen bleiben und sonach die zweite und die höheren Potenzen von ε vernachlässigen, brauchen wir von den Gleichungen des Systems 2 nur die beiden ersten zu berücksichtigen. Die Integration derselben ergibt:

$$x_0 = M\sin(qt - \alpha) + Ne^{-kt}\sin(rt + \psi) \qquad (3$$

$$\begin{aligned}
x_1 = &-\frac{M^2b}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\sin 2\beta}{4kq}\cos(2qt - 2\alpha - 2\beta)\right) \qquad (4\\
&-\frac{N^2be^{-2kt}}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{\sin 2\gamma}{4kr}\cos(2rt + 2\psi - 2\gamma)\right)\\
&+\frac{MNbe^{-kt}}{q}\left(\frac{\cos[(q-r)t - \alpha - \psi]}{q-2r} - \frac{\cos[(q+r)t - \alpha + \psi]}{q+2r}\right)\\
&+ N_1e^{-kt}\sin(rt + \psi_1),
\end{aligned}$$

wo N, N_1, ψ, ψ_1 willkürliche Constanten sind, die übrigen eingeführten Grössen aber die folgende Bedeutung haben:

$$\left.\begin{aligned}
&M = -\frac{f\sin\alpha}{2kq}, \qquad r = \sqrt{p^2 - k^2},\\
&\operatorname{tg}\alpha = \frac{2kq}{p^2 - q^2}, \quad \operatorname{tg}2\beta = \frac{4kq}{p^2 - 4q^2}, \quad \operatorname{tg}2\gamma = \frac{4kr}{3p^2 - 4k^2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (5$$

3. Der Ausdruck für x_1 verliert seine Geltung, sobald $q = 2r$ ist in diesem Falle hat man die Integrale:

$$x_0 = M \sin(2rt - \alpha) + Ne^{-kt} \sin(rt + \psi) \tag{3a}$$

$$x_1 = -\frac{M^2 b}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{\sin 2\beta}{8kr} \cos(4rt - 2\alpha - 2\beta)\right) \tag{4a}$$

$$-\frac{N^2 b e^{-2kt}}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{\sin 2\gamma}{4kr} \cos(2rt + 2\psi - 2\gamma)\right)$$

$$-\frac{MNbe^{-kt}}{2r^2}\left(\frac{1}{4}\cos(3rt - \alpha + \psi) + \frac{1}{2}\cos(rt - \alpha - \psi)\right.$$

$$\left. + rt \sin(rt - \alpha - \psi)\right) + N' e^{-kt} \sin(rt + \psi'),$$

worin

$$\left.\begin{array}{c} M = -\dfrac{f \sin \alpha}{4kr}, \qquad r = \sqrt{p^2 - k^2}, \\ \operatorname{tg} \alpha = -\dfrac{4kr}{3p^2 - 4k^2}, \ \operatorname{tg} 2\beta = -\dfrac{8kr}{15p^2 - 16k^2}, \\ \operatorname{tg} 2\gamma = \dfrac{4kr}{3p^2 - 4k^2} = -\operatorname{tg}\alpha \end{array}\right\} \tag{5a}$$

zu nehmen ist.

4. Für $k = 0$ gestaltet sich die Auflösung im Allgemeinen wie folgt:

$$x_0 = M \sin qt + N \sin(pt + \psi) \tag{3α}$$

$$x_1 = -\frac{M^2 b}{2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2 - 4q^2} \cos 2qt\right) \tag{4α}$$

$$-\frac{N^2 b}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{3p^2} \cos(2t + 2\psi)\right)$$

$$+\frac{MNb}{q}\left(\frac{\cos[(q-p)t - \psi]}{q - 2p} - \frac{\cos[(q+p)t + \psi]}{q + 2p}\right)$$

$$+ N' \sin(pt + \psi'),$$

wo

$$M = -\frac{f}{p^2 - q^2} \tag{5α}$$

ist. Diese Auflösung wird aber unzulässig in drei Fällen, nämlich für $q = 2p$, für $q = \frac{1}{2}p$ und für $q = p$.

Wenn $q = 2$ ist, hat man zu nehmen:

$$x_0 = \frac{f}{3p^2} \sin 2pt + N \sin(pt + \psi) \tag{3β}$$

$$x_1 = -\frac{f^2 b}{18p^4}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{15p^2}\cos 4pt\right) \tag{4β}$$

$$-\frac{N^2 b}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{3p^2}\cos(2pt + 2\psi)\right)$$

$$-\frac{Nfb}{6p^4}\left(\frac{1}{4}\cos(3pt + \psi) + \frac{1}{2}\cos(pt - \psi) + pt\sin(pt - \psi)\right)$$

$$+ N'\sin(pt + \psi').$$

Wenn $q = \frac{1}{2}p$, gelten folgende Werthe:

$$x_0 = -\frac{4f}{3p^2}\sin\frac{1}{2}pt + N\sin(pt + \psi) \tag{3γ}$$

$$x_1 = -\frac{8f^2 b}{9p^6}\left(1 - \frac{1}{2}pt\sin pt\right) \tag{4γ}$$

$$-\frac{N^2 b}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{3p^2}\cos(2pt + 2\psi)\right)$$

$$-\frac{16Nfb}{3p^4}\left(\frac{1}{3}\cos\left(\frac{1}{2}pt + \psi\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{2}{3}pt + \psi\right)\right)$$

$$+ N'\sin(pt + \psi').$$

Für $q = p$ endlich ergeben sich die Integrale in folgender Gestalt:

$$x_0 = \frac{f}{2p}\,.\,t\cos pt + N\sin(pt + \psi) \tag{3δ}$$

$$x_1 = -\frac{f^2 b}{8p^4}\left(t^2 - \frac{2}{p^2} - \left(\frac{t^2}{3} - \frac{26}{27p^2}\right)\cos 2pt + \frac{8t}{9p}\sin 2pt\right) \tag{4δ}$$

$$-\frac{N^2 b}{2p^2}\left(1 + \frac{1}{3}\cos(2pt + 2\psi)\right)$$

$$+\frac{Nfb}{2p^3}\left(-t\sin\psi + \frac{1}{3}t\sin(2pt + \psi) + \frac{4}{9p}\cos(2pt + \psi)\right)$$

$$+ N'\sin(pt + \psi').$$

5. Betrachten wir zunächst den letzten Fall, wo $k = 0$ und $q = p$ ist, so sehen wir schon in dem Ausdruck x_0 (3δ) ein Glied

$$\frac{f}{2p}t\,.\cos pt$$

auftreten, welches die Zeit t als Factor enthält. Dasselbe stellt eine schwingende Bewegung dar, deren Amplitude der Zeit proportional zunimmt, deren lebendige Kraft demnach ebenfalls mit der Zeit unaufhörlich wächst. Was aber das Körperatom an lebendiger Kraft gewinnt, muss die an ihm vorüberziehende Wellenbewegung, von welcher es den periodischen Impuls $f \sin pt$ empfängt, an Energie verlieren. Diese Wellenbewegung wird daher, indem sie einen Theil ihrer Energie an die Körperatome abgibt, geschwächt, oder, wie man zu sagen pflegt, sie erleidet eine Absorption. Wir gelangen sonach zu dem Kirchhoff'schen Satz: Eine Wellenbewegung wird von einem Körper absorbirt, wenn ihre Periode derjenigen gleich ist, in welcher die Körperatome selbst zu schwingen vermögen.

Dieser aus dem Ausdruck x_0 hergeleitete Satz gilt, gleichviel ob wir nur die erste oder auch noch die zweite Potenz der Verschiebung x in Rechnung ziehen, nur dass im letzteren Fall auch die Bewegung x_1 zur Absorption ihren Beitrag liefert. Das im Ausdruck x_1 (4δ) enthaltene Glied

$$-\frac{N^2 b}{2p^2}\left(1 + \frac{1}{3}\cos(2pt + 2\psi)\right)$$

zeigt nämlich, dass das Körperatom auch in der Octave seines Grundtons zu schwingen fähig ist, und die übrigen Glieder lehren, dass auch diese Octave auf Kosten der einfallenden mit dem Grundton gleichgestimmten Welle an Energie gewinnt.

6. Wenn $q = 2p$ ist, tritt in dem Ausdruck x_1 (4β) das Glied

$$-\frac{Nfb}{6p^3} t \,.\, \sin(pt - \psi)$$

auf, welches zeigt, dass auch eine Welle, deren Schwingungszahl doppelt so gross ist als die dem Grundton des Körpertheilchens eigenthümliche, von diesem absorbirt wird, indem sie eben diesen Grundton verstärkt.

Wir nennen diesen Vorgang, weil die Energie der Welle zur Verstärkung einer schwingenden Bewegung verwendet wird, deren Stimmung um eine Octave tiefer liegt als diejenige der Welle: „Absorption durch die nächsttiefere Octave“.

Wenn $q = \frac{1}{2}p$ ist, so folgt aus dem Gliede

$$\frac{4f^2 b}{p^5} t \cdot \sin pt,$$

dass eine Wellenbewegung, deren Schwingungszahl halb so gross ist als diejenige des Grundtons, von dem Körperatom ebenfalls absorbirt wird, indem sie wiederum dessen Grundton verstärkt.

Diesen Vorgang bezeichnen wir als „Absorption durch die nächsthöhere Octave“.

Wir stellen diese beiden Arten von Absorption als „indirecte Absorption“ der im vorigen Paragraphen betrachteten „directen Absorption“ gegenüber, welche letztere man auch als „Absorption durch Einklang“ bezeichnen könnte. Die indirecte Absorption wird, da sie lediglich durch den Einfluss der zweiten Potenz der Verschiebung bedingt ist, von der directen begreiflicherweise an Intensität übertroffen.

7. Nachdem hiemit der Grenzfall $k = 0$ vorläufig erledigt ist, wenden wir uns zur Betrachtung des allgemeinen Falles (Gleichungen 3 und 4), wo k irgend einen positiven Werth hat, und bestimmen zunächst den Zuwachs an lebendiger Kraft, welchen die schwingende Bewegung des Atoms während der Zeit t durch die Einwirkung des periodischen Impulses gewinnt. Dieser Zuwachs wird dargestellt durch den Ausdruck

$$\frac{m}{2}\left(\int_0^t \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt - \left[\int_0^t \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt\right]_{(f=0)}\right).$$

Es ist aber

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \varepsilon \frac{dx_1}{dt} + \varepsilon^2 \frac{dx_2}{dt} + \cdots,$$

folglich, wenn wir die mit höheren Potenzen von ε multiplicirten Glieder ausser Acht lassen:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 + 2\varepsilon \frac{dx_0}{dt}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \varepsilon^2 \left(\frac{dx_1}{dt^2}\right)^2 + 2\varepsilon^2 \frac{dx_0}{dt}\cdot\frac{dx_2}{dt} + \cdots$$

Berechnen wir nun obigen Ausdruck zuerst nur für das Glied $\left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2$, so ergibt sich:

$$\int_0^t \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 dt - \left[\int_0^t \left(\frac{dx_0}{dt}\right)^2 dt\right]_{(f=0)} = \frac{1}{2} M^2 q^2 t$$

$$+ \frac{1}{4} M^2 q \left(\sin(2qt - 2\alpha) + \sin 2\alpha\right)$$

$$+\frac{MNq[r(q-r)-k^2]}{(q-r)^2+k^2}\Big(\sin(\psi+\alpha)+e^{-kt}\sin[(q-r)t-\psi-\alpha]\Big)$$

$$+\frac{MNkq^2}{(q-r)^2+k^2}\Big(\cos(\psi+\alpha)-e^{-kt}\cos[(q-r)t-\psi-\alpha]\Big)$$

$$-\frac{MNq[r(q+r)+k^2]}{(q+r)^2+k^2}\Big(\sin(\psi-\alpha)-e^{-kt}\sin[(q+r)t+\psi-\alpha]\Big)$$

$$-\frac{MNkq^2}{(q-r)^2+k^2}\Big(\cos(\psi-\alpha)-e^{-kt}\cos[(q+r)t+\psi-\alpha]\Big).$$

Im Vergleich mit dem ersten Gliede, welches der Zeit proportional zunimmt, können die übrigen Glieder, falls der Zeitraum t gross genug gedacht wird, ausser Acht gelassen werden. Nehmen wir vorläufig auch auf die mit den Potenzen von ε multiplicirten Glieder keine Rücksicht, so wird in erster Annäherung die Zunnahme der lebendigen Kraft während der Zeit t dargestellt durch den Ausdruck

$$\frac{m}{4}M^2q^2t,$$

und die Zunnahme während der Zeiteinheit

$$\frac{m}{4}M^2q^2$$

kann als **Mass der Absorption** angesehen werden. Führen wir statt M seinen Werth aus 5 ein, so erhalten wir für die Grösse der molekularen Absorption den Ausdruck

$$\frac{mf^2\sin^2\alpha}{16k^2}, \qquad (6$$

welcher zeigt, dass die Absorption der Intensität der einfallenden Welle und der Grösse $\sin^2\alpha$ direct, dem Quadrate des Widerstandscoëfficienten $2k$ aber umgekehrt proportional ist.

8. Die Absorption erreicht ihren grössten Werth, wenn $\sin\alpha = 1$ oder $\operatorname{tg}\alpha = \infty$ ist. Nun wird aber

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2kq}{p^2-q^2}$$

unendlich, wenn $q = p$ ist, wobei zu bemerken ist, dass die Periode der Eigenschwingung des Atoms im gegenwärtigen allgemeinen Falle nicht mehr durch , sondern durch $r = \sqrt{p^2-k^2}$ (s. 5.) bestimmt wird. Wir gelangen daher zu folgendem Satz:

Das Maximum der (molekularen) Absorption findet statt, wenn $q = p$ ist, d. h. wenn die Schwingungszahl der einfallenden Welle gleich derjenigen ist, die dem

Körperatom eigen wäre, falls dasselbe ohne Widerstand zu schwingen vermöchte.

Dieser Satz enthält den Kirchhoff'schen als speciellen Fall (für $k = 0$) in sich.

9. Die Absorption beschränkt sich jedoch nicht auf dieses Maximum, sondern erstreckt sich mit abnehmender Stärke nach Massgabe des Ausdrucks 6 noch zu beiden Seiten des Werthes $q = p$ auf grössere und kleinere Werthe von q. Man wird daher, wenn man durch den absorbirenden Körper gegangenes weisses Licht mittelst des Prismas zerlegt, an der entsprechenden Stelle des Spectrums einen Absorptionsstreifen erblicken, der um so breiter, verwaschener und weniger intensiv erscheint, je grösser der Widerstandscoëfficient $2k$ ist, und dessen Intensitätsverhältnisse überhaupt durch den Ausdruck 6, wenn man ihn als Function von q betrachtet, dargestellt werden. Wir erhalten demnach ein Bild des Absorptionsstreifens, wenn wir den Ausdruck $\sin^2\alpha$ als eine Curve verzeichnet denken, welche auf die Schwingungszahlen[1] q als Abscissen bezogen ist. Man überzeugt sich leicht, dass diese Absorptionscurve nach der weniger brechbaren Seite hin steiler abfällt als nach der brechbareren. Je kleiner k wird, desto schmaler und schwärzer stellt sich der Absorptionsstreif dar, bis er sich in dem Grenzfalle $k = 0$ auf eine scharfe dunkle Linie reducirt.

10. Dass schmale dunkle Absorptionslinien nur bei gasförmigen Körpern beobachtet werden, feste und flüssige Absorbientien dagegen stets mehr oder weniger breite Absorptionsstreifen darbieten, würde sich demnach aus der Annahme erklären, dass innerhalb der Moleküle eines vollkommenen Gases die Schwingungen der Atome ohne Widerstand erfolgen, während sie innerhalb der Moleküle flüssiger und fester Körper einem, vielleicht durch die Cohäsionsverhältnisse bedingten, Widerstand unterworfen sind.

Wenn ein solcher Widerstand einwirkt, so ist, wie die Gleichung

$$r = \sqrt{p^2 - k^2}$$

---

1) Wir denken uns überhaupt in gegenwärtiger Abhandlung das Spectrum entlang einer nach den Schwingungszahlen getheilten Abscissenlinie aufgetragen. Diese Darstellung ist eben so naturgemäss wie die nach Wellenlängen, hat aber gegenüber dieser den Vortheil, dass sie sich dem prismatischen Spectrum enger anschliesst.



zeigt, die Schwingungszahl des Eigentons des Atoms kleiner als diejenige der stärkstabsorbirten Welle. Obgleich daher diese Art der Absorption zwar nicht mehr „Absorption durch Einklang“ genannt werden kann, so behalten wir doch die Bezeichnung „directe Absorption“ für dieselbe bei, da die früher so bezeichnete (nach unserer soeben ausgesprochenen Ansicht nur bei Gasen vorkommende) Absorptionsart sich als Grenzfall ($k = 0$) an den gegenwärtigen allgemeineren Fall unmittelbar anschliesst.

11. Wenden wir uns nun zur Betrachtung derjenigen Theile des Energiezuwachses, welche mit den Potenzen von ε behaftet sind, so ergibt sich zunächst, dass die Glieder, welche aus der Integration der Geschwindigkeitsproducte hervorgehen, sämmtlich von der Form derjenigen sind, welche wir oben in den durch Integration von $\left(\frac{d x_0}{d t}\right)^2$ erhaltenen Ausdruck gegenüber dem mit t multiplicirten Gliede vernachlässigen durften; um so mehr dürfen daher die hier in Rede stehenden Theile neben diesem Gliede ausser Acht gelassen werden.

Dagegen liefert die Integration von $\left(\frac{d x_1}{d t}\right)^2$ noch das der Zeit proportionale Glied

$$\frac{m}{4} \cdot \frac{M^4 b^2 \varepsilon^2 \sin^2 2\beta}{16 k^2} \cdot t,$$

gegen welches die übrigen Glieder, die wiederum von der oben bezeichneten Beschaffenheit sind, vernachlässigt werden können, falls nicht etwa $q = 2r$ ist oder diesem Werthe nahekommt, ein Fall, der eine besondere weiter unten folgende Behandlung erfordert. Demnach muss, um eine zweite Annäherung zu erhalten, dem obigen Absorptionsausdruck $\frac{m}{4} M^2 q^2$ noch das Glied

$$\frac{m}{4} b^2 \varepsilon^2 \cdot \frac{M^4 \sin^2 2\beta}{16 k^2} \tag{7}$$

hinzugefügt werden. Dasselbe bleibt im Vergleich mit jener ersten Annäherung im Allgemeinen sehr unbeträchtlich und kann daher, wenn wir uns mit der Darstellung der directen Absorption in ihren Hauptzügen, wie sie oben gegeben wurde, begnügen wollen, unberücksichtigt bleiben.

12. Wenn $q = 2r$ ist, verliert die Gleichnng 4 ihre Geltung und die Gleichung 4a tritt an ihre Stelle. In dem Ausdrucke für x_1 begegnen wir jetzt dem Gliede

$$-\frac{MNb}{2r} e^{-kt} \cdot t \cdot \sin(rt - \alpha - \psi),$$

welches eine schwingende Bewegung darstellt, deren veränderliche Amplitude mit der Zeit bis zu einem bei $t = \frac{1}{k}$ erreichten Maximum anwächst. In dem Ausdrucke für $\frac{dx_1}{dt}$ erscheinen die entsprechenden Glieder

$$-\frac{MNb}{2} e^{-kt} \cdot t \cdot \left(\cos(rt - \alpha - \psi) - \frac{k}{r} \sin(rt - \alpha - \psi)\right),$$

welche, wenn man bei Berechnung des Integrales von $\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2$ alle Glieder ausser Acht lässt, welche Kreisfunctionen enthalten, und daher, da sie bei wachsender Zeit bald positiv, bald negativ werden, eine dauernde Zunahme der Energie nicht bedingen können, einen Zuwachs der lebendigen Kraft während der Zeit t in folgender Form:

$$\frac{m}{4} b^2 \varepsilon^2 \cdot \frac{M^2 N^2 p^2}{4r^2} \left[\frac{1}{4k^3}(1 - e^{-2kt}) - \frac{e^{-2kt}}{2k}\left(t^2 + \frac{t}{k}\right)\right] \tag{8}$$

ergeben. Da der eingeklammerte Ausdruck mit wachsender Zeit bis zu dem Grenzwerthe $\frac{1}{4k^3}$ fortwährend zunimmt, so zeigt dieses Glied die Absorption der Welle an, deren Schwingungszahl doppelt so gross ist als diejenige des wirklichen[1]) Grundtons des Körperatoms. Wir bezeichnen, im Anschluss an den bereits erwähnten Grenzfall, diesen Vorgang als „indirecte Absorption durch die nächstniedere Octave“.

13. Diese Absorption erstreckt sich jedoch nicht bloss auf diejenige Welle, für welche genau $q = 2r$ ist, sondern auch auf die beiderseits benachbarten, für welche q dem Werthe $2r$ nahekommt. Ist dies nämlich der Fall, so darf bei Berechnung der zweiten Annäherung aus den allgemeinen Gleichungen (4) das Glied

$$\frac{m}{4} b^2 \varepsilon^2 \cdot \frac{M^2 N^2}{2kq^2} \cdot \frac{(q - r)^2 + k^2}{(q - 2r)^2} (1 - e^{-2kt}), \tag{9}$$

1) Im Gegensatz zu dem „idealen“ Grundton p, den das Atom geben würde, wenn es ohne Widerstand schwingen könnte.

welches bei Betrachtung der directen Absorption ($q = p$) gegenüber den mit t proportionalen Gliedern ausser Acht gelassen wurde, nicht mehr vernachlässigt werden. Dasselbe nimmt bei wachsendem t bis zu einem Grenzwerthe zu, welcher um so beträchtlicher ausfällt, je mehr sich q von der einen oder der andern Seite her dem Werthe $2r$ nähert. Wir sehen daraus, dass auch die indirecte Absorption zu einem Absorptionsstreifen Anlass gibt, der um so breiter und verwaschener erscheint, je grösser k ist, sich für $k = 0$ dagegen zu einer schmalen Absorptionslinie zusammenzieht.

Von einer Absorption durch die nächsthöhere Octave dagegen kann, solange k einen merklichen Werth besitzt, nicht die Rede sein, da das oben bereits berechnete Glied der zweiten Annäherung (7), welchem im Grenzfalle $k = 0$ diese Art von Absorption entspricht, weder für $q = \frac{1}{2}$ noch für $q = \frac{1}{2}r$ zu einem Maximum wird.

14. Durch die absorbirte Wellenbewegung wird das Körperatom selbst in schwingende Bewegung versetzt oder seine bereits vorhandene Bewegung wird verstärkt. Es wird dadurch selbst zum Ausgangspunkt einer Wellenbewegung, die sich von ihm aus in das umgebende Mittel (in den Aether, wenn es sich um Licht handelt) fortpflanzt. Die schwingende Bewegung des Atoms wird, in erster Annäherung, dargestellt durch den Ausdruck

$$x_0 = M \sin(qt - \alpha) + Ne^{-kt} \sin(rt + \psi).$$

dessen zweites Glied

$$Ne^{-kt} \sin(rt + \psi)$$

die Eigenschwingung des Atoms repräsentirt, und nun zunächst betrachtet werden soll. Vermöge des Factors e^{-kt} wird diese Bewegung mit der Zeit immer schwächer und verklingt um so rascher, je grösser k ist. Dieser Umstand berechtigt aber keineswegs zu der Annahme, dass diese Schwingung überhaupt nicht in die Erscheinung trete und deshalb ausser Acht gelassen werden dürfe.

Halten wir nun an dem Grundsatze fest, dass homogenes Licht nur durch einfache pendelartige Schwingungen hervorgebracht werde, so kann diese Schwingung mit veränderlicher Amplitude kein homogenes Licht darstellen. Um sie in ihre homogenen Bestandtheile zu zerlegen, entwickeln wir den Factor e^{-kt} nach dem Fourier'schen Lehrsatz und erhalten:

$$e^{-kt} = \frac{1-e^{-ka}}{ka} + \frac{2k}{a}\left(\frac{1+e^{-ka}}{k^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\cdot\cos\frac{\pi t}{a} + \frac{1-e^{-ka}}{k^2+\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}\cos\frac{2\pi t}{a}\right.$$
$$\left. + \frac{1+e^{-ka}}{k^2+\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}\cos\frac{3\pi t}{a} + \dots\right),$$

eine Entwickelung, welche für alle Werthe von t zwischen 0 und a, sowie an diesen Grenzen selbst giltig ist. Die Zerlegung der Eigenschwingung des Atoms in ihre einfach pendelartigen (homogenen) Bestandtheile ergibt sich demnach wie folgt:

$$e^{-kt}\sin(rt+\psi)$$
$$= \frac{1-e^{-ka}}{ka}\left\{\sin(rt+\psi) + \frac{1+e^{-ka}}{1-e^{-ka}}\cdot\frac{k^2}{k^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\sin\left[\left(r-\frac{\pi}{a}\right)t+\psi\right]\right.$$
$$+ \frac{k^2}{k^2+\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}\sin\left[\left(r-\frac{2\pi}{a}\right)t+\psi\right]$$
$$+ \frac{1+e^{-ka}}{1-e^{-ka}}\cdot\frac{k^2}{k^2+\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}\sin\left[\left(r-\frac{3\pi}{a}\right)t+\psi\right] + \dots$$
$$+ \frac{1+e^{-ka}}{1-e^{-ka}}\cdot\frac{k^2}{k^2+\left(\frac{\pi}{a}\right)^2}\sin\left[\left(r+\frac{3\pi}{a}\right)t+\psi\right]$$
$$+ \frac{k^2}{k^2+\left(\frac{2\pi}{a}\right)^2}\sin\left[\left(r+\frac{2\pi}{a}\right)t+\psi\right]$$
$$\left. + \frac{1+e^{-ka}}{1-e^{-ka}}\cdot\frac{k^2}{k^2+\left(\frac{3\pi}{a}\right)^2}\cdot\sin\left[\left(r+\frac{3\pi}{a}\right)t+\psi\right] + \dots\right\}.$$

Der Ausdruck $e^{-kt}\sin(rt+\psi)$ gilt von $t=0$ bis $t=\infty$, die Reihenentwickelung von $t=0$ bis $t=a$. Letztere wird daher mit jenem vollkommen identisch, wenn wir a unendlich werden lassen. Um dieser Forderung zu genügen, setzen wir $\frac{\pi}{a}=\delta$, indem wir unter δ eine zum Verschwinden bestimmte Grösse verstehen, und berücksichtigen, dass $\lim e^{-\frac{\pi k}{\delta}} = 0$ ist. Der obige Ausdruck nimmt alsdann folgende Gestalt an:

$$e^{-kt}\sin(rt+\psi) \tag{10}$$
$$= \lim \frac{\delta}{\pi k}\Big\{\sin(rt+\psi)\frac{k^2}{k^2+\delta^2}\sin[(r-\delta)t+\psi]$$
$$+\frac{k^2}{k^2+(2\delta)^2}\sin[(r-2\delta)t-\psi]$$
$$+\frac{k^2}{k^2+(3\delta)^2}\sin[(r-3\delta)t+\psi]+\ldots$$
$$+\frac{k^2}{k^2+\delta^2}\sin[(r+\delta)t+\psi]$$
$$+\frac{k^2}{k^2+(2\delta)^2}\sin[(r+2\delta)t+\psi]$$
$$+\frac{k^2}{k^2+(3\delta)^2}\sin[(r+3\delta)t+\psi]+\ldots\Big\},$$

oder, wenn man sich an die Definition des bestimmten Integrale erinnert:

$$e^{-kt}\sin(rt+\psi) = \frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin[(r+z)t+\psi]}{k^2+z^2}dz. \tag{10a}$$

Die Schwingung $e^{-kt}\sin(rt+\psi)$ ist demnach gleichbedeutend mit einer Reihe von unendlich vielen pendelartigen Schwingungen mit unendlich kleinen Amplituden, deren Schwingungszahlen sich in stetiger Aufeinanderfolge der Schwingungszahl[1]) r zu beiden Seiten anschliessen, während die Amplituden von dieser mittleren „Hauptschwingung" an nach beiden Seiten hin stetig abnehmen[2]).

Das von einem Körperatom, welches unter dem Einflusse eines Widerstandes schwingt, ausgestrahlte Licht ist demnach nicht homogen, sondern wird durch das Prisma in ein continuirliches Spectrum ausgebreitet, welches sich von der der Hauptschwingungszahl r entsprechenden Stelle aus nach beiden Seiten hin um so

---

1) Die Schwingungszahl ist eigentlich nicht r, sondern $\frac{r}{2\pi}$; wir erlauben uns aber der Kürze wegen, und da ein Missverständniss nicht zu besorgen ist, den Werth r selbst als Repräsentanten der Schwingungszahl zu gebrauchen.

2) Die Entwickelung 10, oder das bestimmte Integral 10a, scheint uns, als der analytische Ausdruck für ein continuirliches Spectrum, für die theoretische Optik von hervorragender Wichtigkeit zu sein. Beide Formeln sind übrigens aus der Theorie der Fourier'schen Integrale hinlänglich bekannt.

weiter ausdehnt, je grösser der Widerstandscoëfficient k ist. Die Hauptschwingungszahl r liegt vermöge der Gleichung

$$r = \sqrt{p^2 - k^2}$$

stets tiefer als die Schwingungszahl p der stärksten Absorption, welche dem Atom, im Falle es ohne Widerstand schwingen könnte, eigen wäre.

15. Wir wenden diese Sätze zunächst an auf die Lichtentwickelung glühender Gase und Dämpfe, sei es dass dieselben in einer Flamme oder durch elektrische Entladungen oder auf irgend eine andere Art zum Leuchten gebracht werden. Denn auch auf diese Fälle, in welchen das Atom nicht durch einen periodischen Impuls, sondern durch andere Ursachen in Schwingung versetzt wird, gelten unsere Gleichungen, wenn man $f = 0$ setzt, und die Eigenschwingung des Atoms wird auch hier durch $e^{-kt} \sin(rt + \psi)$ dargestellt.

Im vollkommenen Gaszustand, so haben wir oben angenommen, ist $k = 0$.

Wird daher ein vollkommenes Gas zum Selbstleuchten gebracht, so enthält sein Spectrum eine schmale scharfe helle Linie von der Schwingungszahl p.

Die Grösse dieser Schwingungszahl, also die Stelle der Linie im Spectrum, ist bedingt durch die Masse des Atoms und die Kraft, mit welcher dasselbe in der Entfernungseinheit nach seiner Gleichgewichtslage gezogen wird, also durch Grössen, welche vermöge des Baues und der Zusammenstellung des Moleküls, welchem das Atom angehört, ein- für allemal gegeben sind; sie ist daher für das Molekül charakteristisch.

Entfernt sich das Gas von dem vollkommenen Gaszustande, indem seine Dichte oder sein Druck wächst, so wird der Widerstandscoëfficient $2k$ merklich und nimmt mit wachsender Verdichtung immer mehr zu. Alsdann folgt aus den obigen Sätzen:

Bei Vergrösserung der Dichte oder des Drucks eines Gases erleidet seine helle Spectrallinie eine Verbreiterung und gleichzeitige Verschiebung nach der weniger brechbaren Seite hin.

Diese Folgerung wird durch Beobachtungen, welche Herr J. J. Müller[1]) an den Dämpfen von Natrium, Lithium und Thallium,

1) Pogg. Ann. Bd. 150 S. 313.

sowie an Wasserstoffgas durchgeführt hat, ferner durch eine Beobachtung Zöllner's[1]) an Natriumdampf bestätigt.

Wächst die Dichte oder der Druck des Gases noch mehr, so dehnt sich sein Spectrum immer weiter aus und wird zu einem continuirlichen. Dieser Satz entspricht einer allgemein bekannten Thatsache.

Die Bewegungsgleichung (1), von welcher wir ausgingen, liefert nur eine einzige Hauptschwingung r oder p und bezieht sich daher eigentlich nur auf solche Körper, welche im gasförmigen Zustande nur eine einzige helle Spectrallinie zeigen. Wir beschränken uns hier auf diesen einfachsten Fall, weil derselbe zur Darlegung der Theorie vollkommen ausreicht, und eine grössere Allgemeinheit nur die Darstellung compliciren, für unsere gegenwärtige Absicht aber keinen wesentlichen Nutzen bringen würde. Die bisher aus dem einfachsten Falle gezogenen Folgerungen behalten nämlich auch dann ihre Giltigkeit, wenn das Atom mehrerer Hauptschwingungen fähig ist[2]).

Lassen wir daher die obigen Sätze auch für Körper gelten, welche im vollkommenen Gaszustande eine beliebige Anzahl heller Spectrallinien darbieten, so erkennen wir, dass das Linienspectrum eines Gases, indem sich dieses von dem Zustande der Vollkommenheit entfernt, durch Verbreiterung und Abwärtsschiebung der Linien in ein Bandenspectrum und endlich durch Zusammenfliessen der immer breiter werdenden Banden in ein continuirliches Spectrum übergeht.

16. Werden die Atome eines Körpers durch den periodischen Impuls einer einfallenden Lichtwelle zum Selbstleuchten gebracht, so nennen wir diesen Leuchtprocess Fluorescenz.

Dieser Vorgang, soweit er von dem Gliede $e^{-kt} \sin (rt + \psi)$ abhängt, charakterisirt sich nach den vorausgegangenen Entwickelungen wie folgt:

Die einfallende Welle erleidet directe Absorption, welche sich im Spectrum des hindurchgegangenen Lichtes durch einen Absorptionsstreifen kundgibt, dessen Maximum der Schwingungszahl p des „idealen“ Grundtons entspricht.

---

1) Pogg. Ann. Bd. 142 S. 109.

2) Wenn das Molekül aus n Atomen besteht, so werden die Bewegungen seiner Atome durch $3n$ Differentialgleichungen bestimmt, und die Schwingungszahlen r, deren jedes Atom fähig ist, ergeben sich als die Wurzeln einer algebraischen Gleichung vom $3n$ten Grade. Wir behalten uns vor, einen solchen allgemeineren Fall in einer späteren Arbeit eingehender zu behandeln.



Durch die absorbirte Welle werden die Körperatome in schwingende Bewegung gesetzt und strahlen nun Licht aus, dessen Hauptschwingungszahl r (der wirkliche Grundton) vermöge der Gleichung

$$r = \sqrt{p^2 - k^2}$$

stets tiefer liegt als diejenige des Absorptionsmaximums.

Das ausgesendete Licht (Fluorescenzlicht) ist nicht homogen, sondern breitet sich zu beiden Seiten der Hauptschwingung r nach Massgabe der obigen Entwickelung (10 oder 10a) zu einem mehr oder weniger breiten continuirlichen Spectralstreifen (Fluorescenzspectrum) aus.

Da jeder absorbirte Strahl die Schwingung $e^{-kt} \sin(rt + \psi)$ hervorruft, so ergibt sich:

Jeder dem Absorptionsgebiet angehörige homogene Lichtstrahl erregt das ganze zusammengesetzte Fluorescenzspectrum.

Greifen daher — was bei allen bekannten in diese Kategorie gehörigen fluorescirenden Substanzen wirklich der Fall ist — Absorptionsgebiet und Fluorescenzspectrum eine Strecke weit über einander, so erregt jeder in diese gemeinschaftliche Strecke fallende homogene Lichtstrahl nicht nur die Strahlen des Fluorescenzlichts, welche eine kleinere oder gleichgrosse, sondern auch diejenigen, welche eine grössere Schwingungszahl haben als er selbst.

17. Fluorescenzspectrum und Absorptionsstreif stehen unter sich im innigsten und nothwendigen Zusammenhange; jenes stellt die Lichtemission vor, zu welcher diese Absorption gehört. Der auf hellem Spectralgrunde hervortretende dunkle Absorptionsstreif kann demnach als die Umkehrung des Fluorescenzspectrums angesehen werden, wie die dunkle D-Linie die Umkehrung der hellen Natriumlinie ist, nur dass in jenem Falle mit der Umkehrung zugleich eine Verschiebung und eine Aenderung des Aussehens verknüpft ist. Die Breitenausdehnung und die Intensitätsvertheilung des Fluorescenzlichts und des Absorptionsstreifens befolgen nämlich ganz verschiedene von einander unabhängige Gesetze, welche resp. durch die Formeln (10a) und (6) ausgedrückt sind. Der Absorptionsstreif, obgleich als „Umkehrung" des Fluorescenzspectrums aufzufassen, erscheint daher hinsichtlich jener Merkmale keineswegs als das blosse negative Gegen-

bild desselben, sondern behauptet seinen besonderen, davon verschiedenen Charakter.

18. Wenn das betrachtete Atom nur einer einzigen Hauptschwingung r fähig ist, wird in dem Fluorescenzspectrum der Schwingungszahl r entsprechend nur ein Maximum und in dem zugehörigen Absorptionsgebiet bei der Schwingungszahl p nur ein Minimum der Intensität auftreten. Sind aber mehrere Hauptschwingungen $r, r', r''\ldots$ vorhanden, welche dem sichtbaren Theil des Spectrums angehören, so kann das Fluorescenzspectrum, welches jetzt als aus der Uebereinanderlagerung mehrerer nach dem Gesetze (10a) constituirter Spectren entstanden anzusehen ist, mehrere Maxima der Lichtstärke darbieten, welche aber im Allgemeinen weder in der Anzahl noch in der Lage mit den Schwingungszahlen $r, r', r''\ldots$ übereinstimmen werden, da ja an jeder Stelle des resultirenden Fluorescenzspectrums eine Intensität herrschen muss, welche gleich der Summe der daselbst sich übereinanderlegenden Componenten ist, und sonach die Maxima der Componenten verwischt und verschoben werden. Aehnliches gilt von dem zugehörigen Absorptionsgebiet, welches in diesem Falle aus der Uebereinanderlagerung mehrerer Absorptionsstreifen resultirt, deren Maxima einzeln genommen den Schwingungszahlen $p, p', p''\ldots$ entsprechen würden. Eine Aehnlichkeit im Aussehen des Fluorescenzspectrums und Absorptionsspectrums wird hier noch weniger zu erwarten sein als in dem oben betrachteten einfachsten Falle. Es können z. B. in dem Fluorescenzspectrum mehrere Maxima und Minima der Helligkeit wahrnehmbar sein, während das zugehörige Absorptionsgebiet entsprechende Intensitätswechsel nicht erkennen lässt, und umgekehrt.

19. Um die Intensität des von dem schwingenden Atom ausgestrahlten Fluorescenzlichts auszudrücken, bestimmen wir die willkürlichen Constanten N und ψ aus der Bedingung, dass das Atom zur Zeit $t = 0$ sich in seiner Gleichgewichtslage in Ruhe befinde. Aus den beiden Bedingungsgleichungen

$$[x_0]_0 = 0 \quad \text{und} \quad \left[\frac{dx_0}{dt}\right]_0 = 0,$$

d. i.

$$M \sin \alpha - N \sin \psi = 0$$
$$Mq \cos \alpha + N(r \cos \psi - k \sin \psi) = 0,$$

ergibt sich aber

$$N^2 r^2 = M^2 [q^2 - 2kq \sin\alpha \cos\alpha + (p^2 - q^2) \sin^2\alpha],$$

wo $N^2 r^2$ als Mass der Intensität der durch den periodischen Impuls hervorgerufenen Eigenschwingung zu betrachten ist. Vermöge der Relation

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2kq}{p^2 - q^2}$$

ist aber

$$(p^2 - q^2) \sin^2\alpha - 2kq \sin\alpha \cos\alpha = 0.$$

Wir finden demnach:

$$N^2 r^2 = M^2 q^2 \tag{11}$$

und gelangen also zu folgendem aus der Erfahrung bekannten Satz: Die Intensität des durch irgend einen homogenen Strahl hervorgerufenen Fluorescenzlichts ist proportional der Energie, mit welcher derselbe absorbirt wird.

20. Wir wollen nun annehmen, dass das Körperatom ausser der Schwingung r, welche dem sichtbaren Spectrum angehört und durch directe Absorption zu dem Absorptionsstreifen Anlass gibt, von welchem bisher die Rede war, noch einer oder mehrerer Schwingungen $r_1, r_2, r_3 \ldots$ fähig sei, welche in die nächsttiefere Octave des sichtbaren Spectrums fallen. Es werden alsdann vermöge der indirecten Absorption durch die nächsttiefere Octave entsprechende Absorptionsstreifen innerhalb des sichtbaren Spectrums auftreten.

Nun nehmen wir folgenden Satz zu Hilfe, welcher sich aus den mit 1 analogen allgemeineren Bewegungsgleichungen, die im Falle des Vorhandenseins mehrerer Schwingungen gelten, analytisch beweisen lässt[1]).

Wenn ein Atom, welches mehrerer Schwingungen ($r, r_1, r_2, r_3 \ldots$) fähig ist, durch (directe oder indirecte) Absorption in Bewegung gesetzt wird, so wird im Allgemeinen nicht nur diejenige Schwingung wachgerufen, welche zu der betreffenden Absorption den nächsten Anlass gibt, sondern die übrigen Schwingungen, deren das Atom (oder das Molekül, dem es angehört) fähig ist, treten ebenfalls auf.

1) Dieser Beweis soll in einer späteren Abhandlung durchgeführt werden.

In dem gegenwärtig vorausgesetzten Falle ruft also der direct absorbirte Strahl p nicht nur die sichtbare Schwingung r, sondern auch die unsichtbaren (ultrarothen) $r_1, r_2, r_3 \ldots$ hervor, und der indirect absorbirte Strahl $2r_1$ weckt nicht nur die unsichtbare Schwingung r_1, sondern nebst den unsichtbaren Schwingungen $r_2, r_3 \ldots$ auch die sichtbare r.

Bei einem Körper von der vorausgesetzten Beschaffenheit erregt also jeder direct oder indirect absorbirte Strahl nach Massgabe seiner Absorptionsfähigkeit das nämliche (durch die Hauptschwingung r oder die Hauptschwingungen $r, r', r'' \ldots$ charakterisirte) Fluorescenzspectrum hervor.

Projicirt man daher ein Sonnenspectrum auf die Oberfläche eines solchen Körpers, so zeigt dasselbe überall die nämliche Fluorescenzfarbe, und jede Stelle, auf welche ein Maximum der Absorption trifft, ist durch ein entsprechendes Maximum der Fluorescenz ausgezeichnet.

21. Werfen wir nun einen Rückblick auf das bisher Erkannte, so erhalten wir ein vollständiges und bis ins Einzelne getreues Bild des Leuchtprocesses, welchen ich in mehreren vorausgegangenen experimentellen Arbeiten [1]) als Fluorescenz erster Art bezeichnet habe. Die Körper, welchen dieselbe rein und unvermischt eigen ist, bilden eine erste Classe der fluorescirenden Substanzen. Zu ihr gehören, soweit bis jetzt bekannt ist, folgende Körper:

	Beginn der Fluorescenz im Spectrum	Spectrum des Fluorescenzlichts	Maximum des Fluorescenzlichts	Absorptionsmaximum
1. Chlorophyll	28	26—40	30	32
2. Naphthalinroth	41	27—60	48	56
3. Brasileïn mit Soda	47	29—65	58	65
4. Purpurin mit Alaun	47	26—68	55	65
5. Safflorcarmin	48	32—69	58	70
6. Eosin	50	28—77	65	76
7. Purpurin, ätherische Lösung	55	30—75	65	74
8. Fluoresceïn	59	30—88	75	86
9. Uranglas	75	35—86	68	85

Diese Substanzen sind nach dem Beginn der Fluorescenz im projicirten Spectrum oder dem Beginn des Absorptionsgebiets, welcher

1) Repertorium Bd. 13 S. 591. — Pogg. Ann. Bd. 159 S. 514. — Sitzungsberichte Hft. 8 S. 188, Hft. 9 S. 196.

in der zweiten Columne angegeben ist, geordnet. Die dritte Columne enthält die Grenzen des Spectrums des Fluorescenzlichts. In der vierten Columne ist die hellste Stelle des Fluorescenzspectrums, in der fünften die dunkelste Stelle des kräftigsten Absorptionsstreifens (bei sehr verdünnter Lösung) angegeben. Sämmtliche Zahlen beziehen sich auf die Bunsen'sche Spectroskop-Scala.

Um die vollständige Uebereinstimmung der Ergebnisse der Erfahrung mit unserer Theorie zu erkennen, genügt es, die Sätze, welche für die Körper dieser ersten Classe empirisch gefunden wurden, der Reihe nach aufzuzählen und dieselben nur hie und da, wo es nöthig erscheint, mit Seitenblicken auf die Theorie zu begleiten.

1) Bei den Körpern der erten Classe ruft jeder absorbirte homogene Lichtstrahl das ganze (zusammengesetzte) Fluorescenzspectrum hervor.

Diejenigen homogenen Strahlen, welche in die dem Fluorescenzspectrum und dem Absorptionsgebiet gemeinschaftliche Strecke fallen, errregen sowohl die Strahlen des Fluorescenzlichts, welche eine kleinere oder gleichgrosse, als auch diejenigen, welche eine grössere Schwingungszahl besitzen als der erregende Strahl.

2) Jeder dieser Körper ist durch einen sehr starken Absorptionsstreifen ausgezeichnet, welcher selbst bei sehr grosser Verdünnung, wenn die Absorption in den übrigen Theilen des Spectrums nicht mehr wahrnehmbar ist, noch sichtbar bleibt.

Nach der Theorie ist dieser Absorptionsstreif als durch directe Absorption entstanden anzusehen und bildet in dem oben erläuterten Sinne die Umkehrung des Fluorescenzspectrums.

3) Die dunkelste Stelle dieses Absorptionsstreifs entspricht stets einer höheren Schwingungszahl als die hellste Stelle des Fluorescenzspectrums.

4) Ausser diesem Absorptionsstreifen findet noch eine schwächere Absorption statt, welche sich über den ganzen hinter ihm gelegenen brechbareren Theil des Spectrums bis ins Ultraviolett erstreckt.

Diese schwächere Absorption kann der Theorie zufolge zum Theil als indirecte Absorption durch die nächsttiefere Octave betrachtet werden.

5) Projicirt man das Spectrum auf die Oberfläche der Substanz, so erstreckt sich die Fluorescenz vom Beginne der Absorption an über den brechbareren Theil des Spectrums bis ins Ultraviolett. In diesem „fluorescirenden" Spectrum entspricht jedem Maximum der Absorption ein Maximum der Fluorescenz, welches um so intensiver ist, je energischer die zugehörige Absorption ist.

Das intensivste Maximum der Fluorescenz entspricht stets dem Absorptionsstreifen, welchen wir als durch directe Absorption hervorgebracht ansehen.

6) Das fluorescirende Spectrum der Körper erster Classe ist überall gleichfarbig, abgesehen von jenen leichten Aenderungen der Nuance, welche durch die von der Substanz auf ihr eigenes aus dem Innern dringendes Fluorescenzlicht ausgeübte Absorption verursacht werden und welche in der Abhandlung „über die Intensität des Fluorescenzlichts"[1]) eingehender besprochen wurden.

22. Die Fluorescenz erster Art kann nur bei solchen Körpern vorkommen, welche einen oder mehrere in den Bereich des sichtbaren Spectrums fallende Eigenschwingungen $r, r', r'' \ldots$ und in Folge dessen in demselben Bereiche einen oder mehrere durch directe Absorption entstandene Absorptionsstreifen ($p, p', p'' \ldots$) besitzen. Sie ist ein durch absorbirtes Licht hervorgerufenes Selbstleuchten der Körpermoleküle mit den ihnen vermöge ihres inneren Baues und ihrer äusseren gegenseitigen Verkettung eigenthümlichen Farbentönen. Die Zusammensetzung des Fluorescenzlichts erster Art ist demnach nur von der Natur des fluorescirenden Körpers, nicht aber von der Schwingungszahl des erregenden Lichtes abhängig.

Nun wollen wir zeigen, dass es noch eine Fluorescenz zweiter Art gibt, deren Farbenmischung nicht allein von der Natur des fluorescirenden Körpers, sondern auch von der Schwingungszahl des erregenden Lichtes abhängig ist und die nur durch indirecte Absorption hervorgerufen wird.

Wir betrachten nämlich das in dem Ausdruck x_1 (4) enthaltene Glied

$$\frac{MNbe^{-kt}}{q(q-2r)} \cdot \cos\left[(q-r)t - \alpha - \psi\right],$$

aus welchem oben die indirecte Absorption abgeleitet wurde, und nehmen an, dass dem Körperatom zwar keine dem sichtbaren Spectrum

1) Repertorium Bd. 13 S. 610. — Pogg. Ann. Bd. 140 S. 75.

angehörige Schwingung, dagegen ausser der Schwingung r_1, welche in die nächsttiefere Octave des sichtbaren Spectrums fällt, eine noch tiefere Schwingung r_2 eigenthümlich sei. Vermöge der Schwingung r_1 wird der Lichtstrahl $2r_1$ nebst seinen beiderseitigen Nachbarstrahlen indirect absorbirt, wodurch aber nicht nur die Schwingung r_1, sondern, nach dem oben (20) angeführten Satze, auch die Schwingung r_2 und ausserdem, dem obigen Gliede entsprechend, noch die Schwingungen $q - r_1$ und $q - r_2$ wachgerufen werden. Die Schwingung $q - r_1$ fällt, da ja q nahe an $2r_1$ liegt, in die nächsttiefere Octave des sichtbaren Spectrums und bleibt daher unsichtbar; die Schwingung $q - r_2$ dagegen kann in den Bereich des sichtbaren Spectrums fallen und als Fluorescenzlicht wahrgenommen werden. Dasselbe ist eben so wenig als das Fluorescenzlicht erster Art homogen, sondern besteht wie dieses aus unzählig vielen einfachen pendelartigen Schwingungen, welche zu beiden Seiten der Hauptschwingung $q - r_2$ nach auf- und nach abwärts mit abnehmender Lichtärke sich stetig an einander reihen, und gibt daher durch das Prisma zerlegt ein continuirliches Spectrum. Es ergibt sich nämlich in ähnlicher Weise wie oben:

$$e^{-kt}\cos[(q - r_2)t - \alpha - \psi] = \frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos[(q - r_2 + z)t - \alpha - \psi]}{k^2 + z^2}dz, \quad (12$$

ein Ausdruck, welcher, in derselben Weise wie oben interpretirt, die vorstehende Behauptung rechtfertigt.

Da r_2, als die 2πfache der Schwingungszahl eines Atoms, jedenfalls eine sehr grosse Zahl ist, so wird die Hauptschwingung $q - r_2$ beträchtlich tiefer liegen als diejenige q des erregenden Strahls. Dem Integral 12 zufolge, welches die Ausbreitung der Schwingung $q - r_2$ zu einem continuirlichen Spectrum ausdrückt, erstreckt sich diese Ausbreitung zwar, mathematisch gesprochen, nach beiden Seiten hin ins Unendliche. Für grosse Werthe von z sind aber die Elemente des Integrals unmerklich gegenüber denjenigen, welche kleinen Werthen von z entsprechen, und jene werden daher gegen diese für die physische Wahrnehmung verschwinden, noch ehe z den grossen Werth r_2 erreicht hat. Es ist demnach, soweit es sich um wahrnehmbare Schwingungen handelt, stets $q - r_2 + z < q$, d. h. die Schwingungszahlen des Fluorescenzlichts zweiter Art sind stets kleiner als die Schwingungszahl des erregenden homogenen Lichtes.

Dieser nur für die Fluorescenz zweiter Art giltige Satz, welchen wir die „Stockes'sche Regel“ nennen, wurde früher, ehe die Fluorescenz erster Art entdeckt war, für ein allgemeines, alle Fluorescenzerscheinungen beherrschendes Gesetz gehalten.

Sind mehrere tiefer gelegene Schwingungen r_2, r_3 ... vorhanden, so können im Spectrum des Fluorescenzlichts zweiter Art mehrere Maxima der Lichtstärke auftreten, welche jedoch mit den Absorptionsverhältnissen, die ja von ganz anderen Schwingungen r_1, r_1' ... abhängen, in keiner Beziehung stehen.

23. Diejenigen Körper, welche die Fluorescenz zweiter Art rein und unvermischt darbieten, bilden eine zweite Classe fluorescirender Substanzen; zu ihr gehört die Mehrzahl der bis jetzt untersuchten fluorescirenden Stoffe, und eben darum erscheint es angemessen, den obigen für diese Classe charakteristischen Satz als „Regel“ zu bezeichnen. Die bekanntesten hieher gehörigen Körper finden sich in der bereits citirten Abhandlung[1]) aufgezählt. Dass auch hier die Forderungen der Theorie mit der Erfahrung im Einklang stehen, wird am besten erkannt, wenn wir die für die Körper zweiter Classe empirisch gefundenen Sätze anführen und, wo es nöthig erscheint, einen Hinweis auf die Theorie hinzufügen.

1) Das Fluorescenzlicht zweiter Art ist sets von geringerer Brechbarkeit als das erregende homogene Licht. Lässt man daher das erregende homogene Licht von höherer zu niedrigerer Brechbarkeit übergehen, so wird auch das Fluorescenzspectrum nach der weniger brechbaren Seite zurückgeschoben.

Demgemäss ändert sich bei diesem Uebergang auch der Farbenton des mit blossem Auge wahrgenommenen Fluorescenzlichts; die Fluorescenzfarbe ist also von der Schwingungsdauer des erregenden Lichtes abhängig.

Diese Abhängigkeit gibt sich namentlich auch dadurch zu erkennen, dass bei Erregung mit violettem und blauem Licht die brechbareren Theile des Fluorescenzspectrums verhältnissmässig stärker hervortreten als bei Erregung mit weissem Licht.

1) Repertorium Bd 13 p. 591. — Sitzungsberichte Hft. 9 S. 196.



2) Zur zweiten Classe gehören alle fluorescirende Substanzen, die nur eine einseitige Absorption des brechbareren Endes des Spectrums zeigen.

Sind Absorptionstreifen vorhanden, so erscheinen dieselben als breite verwaschene Bänder, sog. Schatten, welche bei wachsender Verdünnung sehr bald verschwinden, noch ehe die Absorption des Violett aufhört wahrnehmbar zu sein.

So starke Absorptionsstreifen wie bei den Körpern der ersten Classe kommen bei den Körpern der zweiten Classe nicht vor. Diese erscheinen im durchgehenden Licht gewöhnlich gelb, braun oder farblos, letzteres nämlich dann, wenn nur das äusserste Violett und das Ultraviolett der Absorption unterliegen, während jene lebhaft gefärbt und stark tingirend sind.

Die Absorption der Körper der zweiten Classe ist demnach entschieden anders geartet als diejenige der Körper erster Classe. Dieses Verhalten stimmt augenscheinlich zu der Forderung der Theorie, dass die Fluorescenz zweiter Art nur durch indirecte Absorption hervorgerufen werde.

3) Auch hier entspricht im fluorescirenden Spectrum jedem Maximum der Absorption ein Maximum der Fluorescenz.

4) Das fluorescirende Spectrum der Körper zweiter Classe ist ungleichfarbig mit allmählicher Aenderung des Farbentons; geht man nämlich im fluorescirenden Spectrum vom Beginne desselben gegen das brechbarere Ende hin, so wird das Fluorescenzlicht reicher an brechbareren Strahlen.

24. Die beiden Arten von Fluorescenz, welche wir bis jetzt kennen lernten, sind, so ähnlich sie dem Beobachter auf den ersten Blick auch erscheinen mögen, dennoch ihrem Wesen nach von einander sehr verschieden. Nimmt man die Analogie mit der Akustik zu Hilfe, so kann man, wie ich dies schon früher[1]) gethan habe, die erste Art als „Fluorescenz durch Resonanz", die zweite Art als „Fluorescenz durch Differenztöne (Combinationstöne)" bezeichnen. Bei jener werden durch directe und indirecte Absorption die unmittelbar vernehmbaren Eigentöne des Körpers geweckt, deren Schwingungszahlen denjenigen der direct absorbirten Welle nahe liegen; bei

1) Repertorium Bd. 7 p. 65. — Pogg. Ann. Bd. 143 S. 45. — Sitzungsberichte Hft. 3 S. 39.

dieser werden durch indirecte Absorption tiefer liegende, für sich nicht vernehmbare Schwingungen hervorgerufen, welche mit denjenigen der absorbirten Welle combinirt vernehmbare Differenztöne liefern.

25. Es kann nun ferner noch der Fall eintreten, dass das Körperatom 1) einer oder mehrerer Schwingungen, die in das sichtbare Spectrum fallen, 2) einer oder mehrerer der nächsttieferen Octave angehöriger Schwingungen und 3) einer oder mehrerer noch tiefer gelegener Schwingungen fähig ist. Das Fluorescenzspectrum eines so beschaffenen Körpers muss aus zwei Theilen bestehen, von denen der eine die Fluorescenz erster Art besitzt und demnach der Stockes'schen Regel nicht gehorcht, während der andere mit Fluorescenz zweiter Art begabte der Stokes'schen Regel unterworfen ist. Die Substanzen, welchen diese „zusammengesetzte Fluorescenz“ eigen ist, bilden eine dritte Classe der fluorescirenden Körper, zu welcher, soweit bis jetzt bekannt, die folgenden Körper gehören:

	Beginn der Fluorescenz im Spectrum	Spectrum des Fluorescenzlichts	Maximum des Fluorescenzlichts erster Art	Absorptions-maximum
1. Chamaeleïngrün	28	**28—42**; 49—165	37	39
2. Chamaeleïnblau	35	23—45; **45—60**; 60—150	54	58
3. Orseille	38	**30—54**; 54—83	44	52
4. Chamaeleïnroth	40	**30—58**; 63—120	54	57
5. Lacmus	44	**32—55**; 55—79	47	50
6. Fluoranilin	46	**30—64**; 64—110	56	60

Die fett gedruckten Zahlen geben die Grenzen desjenigen Theils des Fluorescenzspectrums an, welcher der Stockes'schen Regel nicht gehorcht.

Auch hinsichtlich der Körper der dritten Classe stimmen die Thatsachen mit den Forderungen der Theorie vollständig überein. Namentlich bemerken wir:

1) Alle Körper der dritten Classe besitzen, wie diejenigen der ersten Classe, einen sehr starken Absorptionsstreifen und sind daher wie diese stets lebhaft gefärbt.

Dieser Absorptionsstreif ist der Theorie zufolge als durch directe Absorption entstanden zu betrachten und gehört als Umkehrung zu dem nach erster Art fluorescirenden Theil des Fluorescenzspectrums.

2) Das fluorescirende Spectrum, in welchem ebenfalls jedem Maximum der Absorption ein Maximum der Fluo-

rescenz entspricht, besteht aus zwei Theilen, einem in seiner ganzen Erstreckung gleichfarbigen und aus einem anders gefärbten mit allmählicher Farbenänderung.

An der Grenze beider Theile findet gewöhnlich ein nahezu plötzlicher Farbenwechsel statt.

Ueberhaupt verhalten sich die Körper der dritten Classe wie Mischungen aus einer Substanz erster und einer solchen zweiter Classe. Man kann auch in der That Erscheinungen dieser Art nach Belieben hervorrufen, wenn man zwei solche Substanzen, welche nicht chemisch auf einander wirken, mit einander mischt.

Die Orseille- und Lacmusauszüge sind sicherlich, das Fluoranilin wahrscheinlich, die Chamaeleïnfarbstoffe möglicherweise solche Mischungen aus zwei verschiedenen fluorescirenden Stoffen. Aber wenn auch für alle diese Körper nachgewiesen wäre, dass sie Mischungen sind, und sonach vom Standpunkte der Erfahrung aus die dritte Classe entbehrlich würde, so müsste dieselbe vom Standpunkte der Theorie aus dennoch offen gehalten werden, da theoretisch die Möglichkeit bestehen bliebe, dass ein chemisch einheitliches Molekül von der oben vorausgesetzten Beschaffenheit beide Arten von Fluorescenz zugleich besitze.

26. Wir kommen nun zur Betrachtung des Gliedes

$$M \sin (q t - \alpha)$$

der Gleichung 3. Dasselbe stellt eine mit der einfallenden Welle isochrone pendelartige Schwingung dar und zeigt uns, dass das Körperatom auch noch homogenes, mit dem einfallenden homogenen Lichte gleichfarbiges Licht ausstrahlt, dessen Intensität der Absorptionsgrösse proportional ist.

Da dieses Glied den Factor e^{-kt} nicht enthält und demnach das entsprechende Licht nicht zu einem continuirlichen Spectrum ausgebreitet und dadurch geschwächt wird, so kann dieses Licht, selbst wenn die erregenden Strahlen nur schwach absorbirt werden, noch wahrgenommen werden. In der That hat Lallemand[1]) diese von ihm so genannte „isochromatische Fluorescenz“ bei allen von ihm untersuchten Körpern, mit Ausnahme des Steinsalzes und des Bergkrystalls, nachgewiesen. Da das isochromatische Fluorescenzlicht bei Erregung mit homogenem Licht selbst homogen ist und daher im

1) A. Lallemand, de l'illumination des corps transparents et opaques. Journal de physique par d'Almeida T. V p. 329.

Spectroskop eine schmale Linie gibt, so kann es bei Beobachtung der gewöhnlichen (eigentlichen) Fluorescenz, wenn dieselbe durch homogenes Licht hervorgerufen wird, nicht störend wirken. Bei Erregung mit weissem Sonnenlicht dagegen liefert das isochromatische Fluorescenzlicht ein continuirliches Spectrum mit den Fraunhofer'schen Linien.

27. Ausser dem bereits besprochenen Gliede, welches $q - 2r$ im Nenner enthält, umfasst der Ausdruck x_1 (Gl. 4) noch mehrere Glieder, welche jetzt noch kurz zu betrachten sind.

Das Glied

$$-\frac{M^2 b \sin 2\beta}{8kq} \cos(2qt - 2\alpha - 2\beta)$$

stellt eine homogene Schwingung dar, welche eine Octave höher liegt als diejenige der einfallenden Welle und daher, wenn diese dem sichtbaren Spectrum angehört, in das ultraviolette Gebiet fällt.

Das Glied

$$-\frac{N^2 b \sin 2\gamma}{8kr} e^{-2kt} \cos(2rt + 2\psi - 2\gamma)$$

gehört als Octave des Grundtons zur Eigenbewegung des Atoms, welche auch ohne Anregung durch einen periodischen Impuls auftritt; diese Schwingung kann in den Bereich des sichtbaren Spectrums fallen, wenn der Grundton r dessen nächsttieferer Octave angehört. Bedenkt man jedoch, dass der Factor $\sin 2\gamma$, wie ein Blick auf den Ausdruck für $\operatorname{tg} 2\gamma$ (5) zeigt, für grosse Schwingungszahlen, wie sie hier allein in Betracht kommen, stets sehr klein bleibt, so wird man auch in diesem Falle nicht erwarten dürfen, eine entsprechende Lichterscheinung wahrzunehmen.

Das Glied

$$-\frac{MNb}{q(q+2r)} e^{-kt} \cos[(q+r)t - \alpha + \psi]$$

endlich stellt den Summationston aus der Schwingung der anregenden Welle und dem Eigenton des Atoms dar, welcher, wenn jene dem sichtbaren Spectrum angehört, für kleine Werthe von r ebenfalls in diesen Bereich fallen könnte. Gegenüber dem Gliede jedoch, welches dem Differenzton entspricht und $q - 2r$ im Nenner enthält, kann dieses sowohl wie die beiden vorigen Glieder als verschwindend angesehen werden.

28. Jeder fluorescirende Körper ist nothwendig auch ein absorbirender. Dieser Satz lässt sich nicht umkehren, wenn wir unter Fluorescenz in der bisher üblichen Weise eine sichtbare und nicht isochromatische Strahlung verstehen. Ein absorbirender Körper wird nämlich keine Fluorescenz in diesem Sinne zeigen: 1) bei directer Absorption, wenn das Fluorescenzspectrum in das ultrarothe Gebiet fällt, und 2) bei indirecter Absorption, wenn keine Schwingungen vorhanden sind, die tief genug wären, um mit den erregenden Strahlen sichtbare Differenztöne zu geben. In beiden Fällen ruft nämlich das absorbirte Licht nur eine unsichtbare ultrarothe Strahlung hervor, welche allerdings mit der Fluorescenz ihrem Wesen nach identisch ist.

Die isochromatische Fluorescenz freilich kommt, wie bereits erwähnt wurde, allen absorbirenden Körpern ohne Ausnahme zu.

Ueber ein Aneroidbarometer mit Spiegelablesung.

Von

W. C. Röntgen.

(Hiezu Tafel I.)

Schon vor mehreren Jahren theilte ich in einer Abhandlung über das Verhältniss der specifischen Wärmen von Gasen[1]) mit, dass ich die bei jener Untersuchung gewonnenen Erfahrungen über die Vorzüge und die Brauchbarkeit der dort beschriebenen Methode zur Messung von schnell verlaufenden kleinen Druckänderungen in Gasen zur Construction eines Barometers zu verwerthen beabsichtigte, welches die bei Anwendung eines Quecksilberbarometers der Beobachtung entschwindenden Schwankungen des Luftdruckes zu beobachten und zu messen gestattete[2]). Ich veranlasste auch sofort Herrn Mechaniker Goldschmidt in Zürich, ein solches Instrument nach meinen Angaben und Zeichnungen zu verfertigen; allein es vergingen einige Jahre, bis ich das zuletzt von Herrn Mechaniker Dr. Müller in Stuttgart fertig gemachte Barometer in einer den gestellten Anforderungen entsprechenden Form erhielt. Dasselbe soll in Folgendem kurz beschrieben werden. Siehe dazu Taf. I Fig. 1, 2 und 3.

Mit A sind die fünf über einander gelagerten, fast luftleeren Büchsen aus starkem Neusilberblech bezeichnet, welche denjenigen Theil des Apparates bilden, der die Aenderungen des Druckes der ihn umgebenden Luft sichtbar und der Messung zugänglich machen

1) Pogg. Ann. Bd. 148.

2) Seither hat Herr Kohlrausch in Pogg. Ann. Bd. 150 S. 423 ein nach seinen Angaben construirtes Variationsbarometer beschrieben, bei welchem ebenfalls die Spiegelablesung zur Messung von geringen Druckänderungen verwendet wird.

soll. Die Construction dieser Büchsen ist dieselbe wie bei allen Goldschmidt'schen Aneroiden; die unterste ist auf dem Boden eines cylindrischen Messinggehäuses *BB* befestigt und die oberste trägt eine sorgfältig gearbeitete Stahlspitze. Diese Spitze geht durch eine Oeffnung des Deckels des erwähnten Gehäuses und berührt die genau eben geschliffene und fein polirte untere Fläche eines horizontalen Hebels *a*, der um eine horizontale Achse *bb* leicht drehbar ist. Auf die Construction dieser Achse sowie ihrer Steinlager ist besondere Sorgfalt verwendet; dieselbe ist leicht beweglich, schlottert jedoch nicht im geringsten. Von den Lagern dieser Achse mag vorläufig angenommen werden, dass sie mit dem Deckel resp. mit dem Boden des Messinggehäuses unverrückbar fest verbunden seien; es wird alsdann eine Hebung oder Senkung der Spitze in Folge einer Abnahme oder Zunahme des Druckes der Luft eine Drehung dieser Achse bewirken. Mit der Achse dreht sich das darauf befestigte Spiegelchen *c*; der Betrag dieser Drehung wird in bekannter Weise mittelst Fernrohr und verticaler Scala gemessen. Ich fand, dass die Stahlspitze bei einer Abnahme des Barometerstandes von 1^{mm} Quecksilber um $0{,}023^{mm}$ gehoben wird; nehmen wir an, dass die Spitze den horizontalen Hebel in einer Entfernung von $0{,}5^{mm}$ von der geometrischen Drehachse trifft und dass das Fernrohr mit Scala in einer Entfernung von 2^{m} vom Spiegel aufgestellt ist, so ergibt sich für eine Aenderung des Barometerstandes von 1^{mm} eine Verschiebung der Scala im Fernrohr von 184^{mm}. Da nun bei mässiger Vergrösserung des Fernrohrs unter den angegebenen Bedingungen noch sehr wohl Bruchtheile eines Millimeters (Scalentheiles) geschätzt werden können, so sind wir im Stande, Schwankungen des Luftdruckes im Betrage von $^{1}/_{200}{}^{mm}$ Quecksilber zu beobachten und bis auf diese Grösse genau zu messen.

Diese Schwankungen können überdies verhältnissmässig rasch verlaufen, ohne dass man befürchten muss, dieselben mit zufälligen Eigenschwingungen der Büchsen zu verwechseln; denn solche Eigenschwingungen machen sich in Folge ihrer äusserst kleinen Schwingungsdauer nur durch ein Undeutlichwerden des Spiegelbildes bemerkbar und werden sehr rasch gedämpft.

Ich habe oben die Entfernung der Drehachse von dem Berührungspunkte von Hebel und Spitze beispielsweise zu $0{,}5^{mm}$ angenommen. Diese Entfernung, welche für die Empfindlichkeit des Instrumentes massgebend ist, lässt sich innerhalb weiter Grenzen ändern. Durch

Drehen der Schraube C wird nämlich der Schlitten D, welcher die Drehachse trägt, auf dem Deckel des Messinggehäuses horizontal verschoben und somit diese Achse der Spitze genähert oder von derselben entfernt. Um zu jeder Zeit über die Stellung des Schlittens resp. über die Empfindlichkeit Aufschluss zu erhalten, ist der Schlitten mit einer Theilung versehen, welche sich an einem auf den festen Gleitschienen angebrachten Index vorüber bewegt, und ist der Kopf der Schraube getheilt. Es wird jeder Stellung des Schlittens offenbar eine bestimmte Empfindlichkeit entsprechen, wenn wir dafür Sorge tragen, dass die Spitze gegen den Deckel des Gehäuses keine horizontale Verschiebung erleidet. Diese Bedingung wird erfüllt durch die Feder EE Taf. I Fig. 3; dieselbe verbindet den Fuss der Spitze mit zwei Stellen des Gehäuses und gestattet in Folge ihrer eigenthümlichen Form sehr leicht Verschiebungen der Spitze in der Verticalen, verhindert dagegen jede horizontale Bewegung derselben.

Durch diese Feder wird das Instrument ausserdem bedeutend transportfähiger, denn das sonst nur unten befestigte Büchsensystem ist sehr schwankend und läuft bei starken Erschütterungen sehr leicht Gefahr beschädigt zu werden.

Eine kurze Ueberlegung zeigt, dass die beschriebenen, allerdings wesentlichsten Theile des Barometers nicht ausreichen zur vollständigen Lösung der anfangs gestellten Aufgabe. Denn nehmen wir wieder beispielsweise den Fall, dass die Spitze den horizontalen Hebel in einer Entfernung von $0{,}5^{mm}$ von der Drehachse trifft, so können wir wohl bei dem augenblicklich herrschenden Barometerstande die Variationen beobachten; allein wenn sich nach Verlauf einiger Zeit der Barometerstand stark, z. B. um 20^{mm} geändert hat, so wird der Hebel nicht mehr horizontal resp. das Spiegelchen nicht mehr vertical stehen, sondern, da die Spitze um $0{,}46^{mm}$ höher oder tiefer steht als vorhin, um nahezu 45^0 gegen die Horizontale geneigt sein; eine Beobachtung mit Fernrohr und Scala wäre alsdann nicht mehr möglich. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, wurde die Drehachse auch in verticaler Richtung beweglich gemacht; durch Drehen der Schraube F wird die auf einem Schlitten G befestigte Drehachse gehoben oder gesenkt und kann derselben bei jedem Baromerstande eine passende Stellung gegeben werden.

Es lässt sich durch diese verticale Schraube noch ein zweites Ziel erreichen. Es entspricht offenbar jeder Höhe der Spitze über

dem Deckel des Gehäuses ein bestimmter Barometerstand; kennen wir somit diese Höhe, so wird zu jeder Zeit mit Hilfe einer einmal entworfenen Calibrirungstabelle der Barometerstand gegeben sein; mit andern Worten, der Apparat lässt sich auch als Stationsbarometer verwenden. Zur Messung dieser Höhe ist nun die verticale Schraube vorzüglich geeignet; der Schlitten *G* ist mit einem Index versehen, der sich an einer festen, dem Schraubengewinde entsprechenden Theilung vorüber bewegt, und der Schraubenkopf ist in 100 Theile getheilt. Mit diesem Massstabe lässt sich nun die augenblickliche Stellung des Schlittens bestimmen; soll diese Stellung auch massgebend sein für die gesuchte Höhe der Spitze, so muss man in jedem Falle sich noch überzeugen, dass bei der Messung der Schlitten resp. die Drehachse sich immer in derselben verticalen Entfernung von der Spitze befindet.

Zu diesem Zwecke dient die Vorrichtung, welche in Taf. I Fig. 2 (Durchschnitt und Grundriss) in zweifacher Vergrösserung gezeichnet ist. Auf der Drehachse ist ein Spiegelchen *d* befestigt, neben demselben und ihm möglichst nahe befindet sich ein zweites *f*, das jedoch mit dem Schlitten unverrückbar fest verbunden ist; die Lage der beiden Spiegelchen ist so gewählt, dass, wenn der Hebel *a* genau parallel der Verschiebungsrichtung des horizontalen Schlittens, oder sagen wir der Einfachheit wegen genau horizontal ist, die Spiegelchen in einer Ebene liegen. Ein durch die Lupe *H* sehendes Auge sieht in diesem Falle die von den beiden Spiegelchen reflectirten Hälften eines geraden bei *g* angebrachten, der Drehachse parallelen Striches als einfachen Strich. Ist dagegen der Hebel nicht genau horizontal, so machen die Spiegelchen einen Winkel mit einander und das Auge beobachtet zwei neben einander liegende, gegen einander verschobene Hälften des Striches. Da nun die Lage des Hebels durch die verticale Entfernung der Drehachse von der Spitze bedingt ist, so wird zu jeder Zeit, wenn durch die Lupe die Coincidenz der beiden Spiegelbilder beobachtet wird, die Drehachse sich in derselben verticalen Entfernung von der Spitze befinden. In diesem Falle ist, wie oben erwähnt, die Stellung des verticalen Schlittens ein Mass für die Höhe der Stahlspitze oder für den augenblicklichen Barometerstand. Soll somit der herrschende Barometerstand mit dem Instrumente bestimmt werden, so wird die verticale Schraube so lange gedreht, bis durch die Lupe die besprochene Coincidenz beobachtet wird, und darauf die Stellung

des Schlittens abgelesen. Wie ich mich öfters überzeugte, ist diese Methode der Einstellung äusserst bequem und genau. Ein Theilstrich (wirkliche Grösse nahezu 1^{mm}) des Schraubenkopfes entspricht $0{,}15^{mm}$ Quecksilber.

Das kleine Schräubchen *h*, sowie die eigenthümliche Form der Fassung des Spiegelchens sind nothwendig, um das Spiegelchen ein- für allemal zu justiren.

Die in der Zeichnung sichtbare zweite Stahlspitze *i* ist auf dem Deckel des Gehäuses fest geschraubt und hat den doppelten Zweck, erstens von Zeit zu Zeit zu controliren, ob der eigentlich messende Theil des Apparates (verticale Schraube, Schlitten, Achse etc.) sich seit der Vergleichung des Instrumentes mit dem Quecksilberbarometer geändert hat, und zweitens die zuletzt besprochene Justirung vorzunehmen. Damit der Hebel anf dieser Spitze zu liegen kommt, wird durch Drehen der verticalen Schraube die Achse so weit gehoben, bis dieselbe bei einer Verschiebung des horizontalen Schlittens frei über die bewegliche Spitze hinweggeht. Darauf verschiebt man den horizontalen Schlitten so weit (in der Zeichnung nach vorn), bis derselbe gegen die Schraube *k* stösst, und lässt nun den verticalen Schlitten herunter. Die bei der Coincidenz der beiden Striche an der verticalen Theilung gemachte Ablesung ist selbstredend vom augenblicklichen Barometerstande unabhängig und wird überhaupt nur dann zu verschiedenen Zeiten verschieden ausfallen, wenn durch den häufigen und längeren Gebrauch des Instrumentes oder durch zufällige störende Einflüsse der messende Theil sich geändert hat. Solche Aenderungen habe ich bis jetzt nicht beobachtet; sollten dieselben jedoch auftreten, so kann man sie in der angegebenen Weise bestimmen und in einfacher Weise bei der Reduction der Ablesungen auf Millimeter Quecksilber in Rechnung ziehen.

Während der Zeit, wo das Instrument nicht gebraucht wird, wird durch eine in der Zeichnung bei *lmn* sichtbare einfache Vorrichtung der Hebel von der Spitze abgehoben; es ist alsdann eine gegenseitige Verletzung der beiden Stahltheile nicht zu befürchten.

Das Intervall des Barometerstandes, innerhalb dessen der Apparat benutzt werden kann, beträgt nahezu $250-800^{mm}$ Quecksilber. Die durchwegs solide Construction, das sehr geringe Gewicht und die compendiöse Form machen den Apparat sehr transportfähig; folglich ist derselbe sehr geeignet zu Höhenbestimmungen. Ich habe ihn in

der That auch öfters dazu verwendet und immer mit überraschend gutem Erfolge. Nur muss bei jeder Ablesung für eine feste Aufstellung gesorgt werden, denn bei Erschütterungen ist eine genaue Einstellung nicht möglich. Diese Aufstellung lässt sich in verschiedener Weise ausführen; ich habe meistens ein kleines mitgenommenes Brettchen auf meinen senkrecht in den Boden gesteckten Alpenstock geschraubt und auf dasselbe das Instrumentchen gestellt.

Das in der Zeichnung bei *J* angegebene Thermometer dient zur Bestimmung der anzubringenden Temperaturcorrectionen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass das Aneroid benutzt werden kann, um kleine Druckänderungen eines in einem Raum eingeschlossenen Gases genau zu verfolgen und zu messen. Zu diesem Zwecke wird dasselbe, wie aus der Zeichnung ersichtlich, auf einen kleinen Luftpumpenteller gestellt und durch eine Glocke (nicht in der Zeichnung wiedergegeben), die, um eine Spiegelablesung zu ermöglichen, in der Höhe des verticalen Spiegelchens mit einer planparallelen Glasplatte versehen ist, von der äusseren Luft abgesperrt. Um dem Barometer eine grössere Standfestigkeit zu geben, ist dasselbe unten durch einen Haken *K* mit dem Teller verbunden. Dieser Haken wird durch eine Feder gehalten und kann, nachdem die Fussschrauben *L* genügend hinaufgeschraubt sind, leicht von dem Aneroid gelöst werden.

Beschreibung einiger leicht herzustellender physikalischer Apparate.

Von

Dr. Leonhard Weber,

Privatdocent an der Universität Kiel.

I. Zur Demonstration des Toricelli'schen Theoremes über die Ausflussgeschwindigkeit von Flüssigkeiten aus Gefässöffnungen, die im Vergleiche zum Gefäss eng sind, kann man sich folgenden Verfahrens bedienen:

Eine Glasröhre AB (Fig. 1) von ca. 15^{mm} innerem Durchmesser schmelze man an dem einen Ende B bis auf eine feine Oeffnung zu. Durch aufgeklebte Papierstreifen oder durch eingerissene Striche markire man diejenigen Stellen der Röhre, welche von der unteren Oeffnung um 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64^{cm} entfernt sind. Die so präparirte Röhre klemme man in verticaler Stellung in ein Stativ und setze unter dieselbe ein Gefäss zur Aufnahme der ausfliessenden Flüssigkeit.

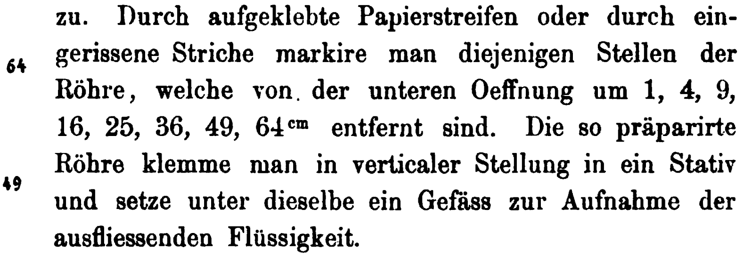


Fig. 1.

Um mit dieser Vorrichtung zunächst nachzuweisen, dass die Ausflussgeschwindigkeit v unabhängig ist von dem specifischen Gewicht der Flüssigkeit, fülle man die Röhre mit Quecksilber, indem man mit einem Finger der linken Hand die Oeffnung verschliesst und mit der rechten so viel Quecksilber einfüllt, bis dasselbe bei einer der oberen Marken (etwa 64^{cm}) steht. Sodann lasse man das Quecksilber ausfliessen und beobachte etwa mit Hilfe eines Metronoms die Zeit t, welche verläuft bis das Niveau des Quecksilbers die untere Marke (1^{cm}) erreicht. Wiederholt man dieselbe Operation mit Wasser oder Alkohol, so ergibt sich genau die gleiche Zeit t.

Die von mir benutzten Röhren ergaben bei einer Ausflussdauer von ca. 45 Secunden nur einen Fehler von $\mp$ 1 Secunde.

Um ferner zu zeigen, dass die Ausflussgeschwindigkeiten und mithin die Ausflussmengen proportional sind den Quadratwurzeln aus den Flüssigkeitshöhen, lasse man wiederum eine der oben genannten Flüssigkeiten von der Marke (64^{cm}) ausfliessen und beobachte diejenigen Zeiten, welche beim Sinken des Niveau von einer Marke zur andern verstreichen. Es zeigt sich, dass diese Zeiten unter einander gleich sind und dass daher

$$v \text{ proportional } \sqrt{h}$$

sein muss.

II. Apparat zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten.

Zwei Glasröhren von annähernd gleicher Weite biege man, wie aus Fig. 2 ersichtlich ist, um und verbinde die kurzen Enden durch einen Gummischlauch. Beide Röhren stelle man mit Hilfe zweier Stative senkrecht und nahe an einander auf.

Giesst man nun in die offenen Enden einige Tropfen der zu vergleichenden Flüssigkeiten, etwa Wasser in A, Alkohol in B, so wird die Luft in den umgebogenen Theilen der Röhren und im Gummischlauch dadurch abgeschlossen. Giesst man sodann in vorsichtiger Weise abwechselnd in A und B weitere Quanta von Wasser und Alkohol, so werden die Niveaux in den offenen Schenkeln steigen, während die in dem abgeschlossenen Theile mehr und mehr comprimirte Luft nur ein äusserst langsames Steigen in den kurzen Schenkeln gestattet.

A B

Fig. 2.

Wie leicht zu übersehen, sind die Niveaudifferenzen in A und B umgekehrt proportional den specifischen Gewichten der beiden Flüssigkeiten. Eine Messung derselben ergibt daher unmittelbar das specifische Gewicht der einen Flüssigkeit, wenn das der anderen bekannt ist.

Das Verfahren gestattet bei hinreichend langen Röhren und dadurch ermöglichten grossen Niveaudifferenzen oder auch bei Anwendung eines Kathetometers eine nicht unerhebliche Genauigkeit.

III. Apparat zur Destillation von Quecksilber.

Der Apparat besteht im Wesentlichen aus einer Glasröhre, wie sie in Fig. 3 dargestellt ist. Die Dimensionen des von mir gebrauchten Exemplars sind: Länge des Schenkels A bis zur Erweiterung C gerechnet 76^{cm}; Länge der Erweiterung C $6{,}5^{\mathrm{cm}}$; Länge des oberen Stückes bis zur spitzwinkligen Biegung gerechnet 4^{cm}; Länge des Schenkels B bis zur stumpfwinkligen Biegung gerechnet 77^{cm}. Innerer Durchmesser der Röhre $0{,}7^{\mathrm{cm}}$; Durchmesser der Erweiterung C 3^{cm}; Abstand der Schenkel A und B $13{,}5^{\mathrm{cm}}$.

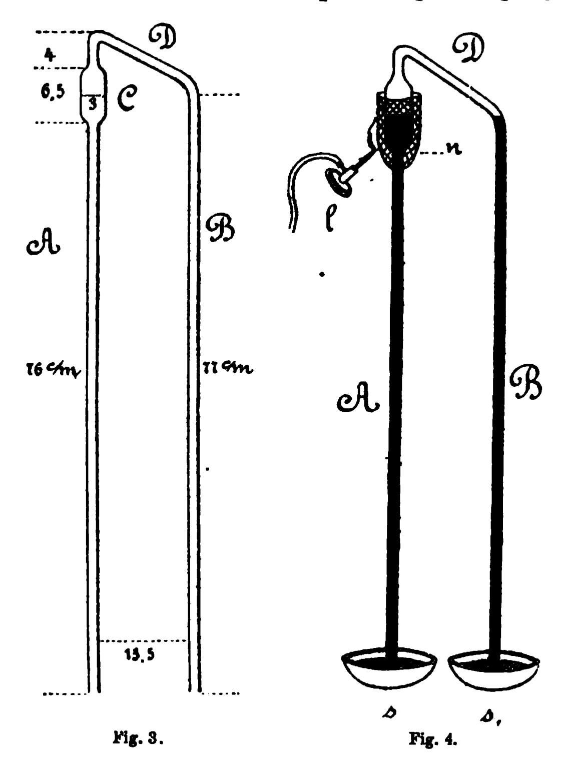


Fig. 3. Fig. 4.

Eine solche Röhre wird mit reinem Quecksilber gefüllt. Die dabei nach oben gekehrten offenen Enden verschliesse man sodann mit zwei Fingern, indem man die überragenden Quecksilberkuppen abdrückt, und tauche dieselben, während gleichzeitig ein Gehilfe die ganze Röhre umkehrt, unter die Quecksilberoberflächen zweier Schalen s und s_1 (Fig. 4). Die nun durch einige Stative festzustellende Röhre wird in ihrem oberen Theile ein Toricelli'sches Vacuum zeigen. Die oben angegebenen Dimensionen sind so gewählt, dass bei mittlerem Barometerstand das eine Niveau in der Mitte der Erweiterung C steht (wenn nämlich das Quecksilber in den Schalen s und s_1 ca. 3^{cm} hoch steht). Man umgebe sodann die Erweiterung C mit einem Drahtnetze n und bringe eine bis auf ein Minimum reducirte Bunsen'sche Gasflamme l an dasselbe. An der erwärmten Oberfläche werden sich nun mit grosser Leichtigkeit Quecksilberdämpfe bilden, welche sich an den kälteren Theilen D alsbald in Gestalt sehr feiner Kügelchen niederschlagen und zu grösseren

Tropfen sich vereinigend in den Schenkel *B* hinunterfliessen. Fig. 4 zeigt den so zusammengestellten Apparat.

Man übersieht unmittelbar, dass mittelst dieses Verfahrens schmutziges, durch Metalle verunreinigtes Quecksilber, welches in die Schale *s* gegossen wird, in chemisch reines aus der Schale s_1 zu entnehmendes Quecksilber verwandelt wird.

Den auf die beschriebene Weise eingeleiteten Destillationsprocess kann man tagelang sich selbst überlassen, indem man nur dafür zu sorgen hat, dass die beiden Schalen rechtzeitig resp. gefüllt und geleert werden.

In dem physikalischen Institute zu Kiel habe ich mit einem solchen Apparate eine grössere Menge Quecksilber destillirt und durchschnittlich ca. 2 Kilogramm in 24 Stunden erhalten.

Es versteht sich von selbst, dass, wenn das zur ursprünglichen Füllung der Röhre angewandte Quecksilber nicht völlig rein war, erst eine näherungsweise successive sich steigernde Reinheit in der Schale s_1 erzielt wird, nachdem der Process eine Zeit lang fortgesetzt ist.

Die Vortheile des beschriebenen Verfahrens gegenüber der Destillation unter dem gewöhnlichen Athmosphärendruck bestehen:

1) in geringem Verbrauch an Feuerung,
2) darin, dass bei dem langsamen Verdampfen ein mechanisches Ueberreissen anderer Metalltheilchen nicht stattfindet,
3) darin, dass der Process ohne dauernde Beaufsichtigung stattfinden kann, und
4) darin, dass eine Belästigung durch Quecksilberdämpfe ausgeschlossen ist.

IV. Zur Darstellung des Lichtphänomens der Geissler-chen Röhren kann man die unter III. beschriebene und eben so gefüllte Glasröhre benutzen, indem man die Leitungsdrähte eines Inductoriums in die beiden Schalen *s* und s_1 einführt. Die Erweiterung *C* ist zu diesem Zweck natürlich überflüssig.

Wählt man eine andere Röhre von solcher Beschaffenheit, dass das obere Vacuum eine beträchtliche Länge bekommt, so kann es bei Anwesenheit geringer Luftspuren vorkommen, dass die elektrischen Entladungen nicht sogleich stattfinden. Neigt man dann aber die Röhre vorsichtig, wodurch der Abstand zwischen den oberen Niveaux verkleinert wird, so wird das Lichtphänomen beginnen und man kann alsdann die Röhre wieder senkrecht stellen, ohne dass nach einmal seingleiteter Entladung das Lichtphänomen aufhörte.

Ueber die experimentelle Demonstration der Poinsot-schen Drehungstheorie.

Von

A. v. Obermayer.

(Hiezu Tafel III.)

Im Bande IV dieses Repertoriums S. 361 und Tafel XXV hat Herr Prof. Mach über das im Titel bezeichnete Thema geschrieben. Es ist schade, dass Herr Prof. Mach die Zeichnungen, welche er auf den Halbellipsoiden und auf den Platten erhielt, nicht veröffentlichte; namentlich die ersteren gewähren durch den blossen Anblick eine Uebersicht über die Bewegung der Momentendrehachse im Körper[1]).

Ich habe einen ähnlichen Apparat wie Herr Prof. Mach, nur wie es scheint in grösseren Dimensionen, construiren lassen und theile auf Tafel III die damit sowohl auf dem Ellipsoide als auf den Platten erhaltenen Curven mit.

Die Fig. 1 stellt die obere Ansicht des um die mittlere Achse b gelegenen Halbellipsoides dar; b steht senkrecht zur Ebene der Zeichnung.

Die durch b hindurchgehenden, in der Projection als Gerade erscheinenden Ellipsen $b'bb'$ und $b''bb''$, welche der geometrische Ort aller Tangirungspunkte von Ebenen sind, deren senkrechter Abstand vom Mittelpunkt des Ellipsoides gleich b ist, werden erhalten, indem man das Ellipsoid mit der mittleren Achse auf die festgehaltene berusste Glasplatte aufsetzt, langsam dreht und sanft auf den Rand des Ellipsoides drückt. Auf dem Ellipsoide zeichnet sich dann die eine dieser Ellipsen auf der berussten Glassplatte die Spirale Fig. 2 auf.

Die beiden Ellipsen $b'b'$ und $b''b''$ theilen das Centralellipsoid in zwei Doppelkeile $b'ab''$ und $b'ab''$ Kommt die ursprüngliche Momentenachse in einem dieser Keile zum Vorschein, so bleibt sie auch im weiteren Verlaufe in demselben, beschreibt also entweder die Curven um die Achse der a oder um jene der c.

1) Neue Theorie der Drehung der Körper von Poinsot; deutsch von Schellbach 1851 S. 34. Auch Ritter, Analytische Mechanik S. 255

Im ersteren Falle entstehen auf der berussten Glasplatte die Curven Fig. 3, 4, 5, welche geschlossen wie Fig. 3 und Fig. 4 sind, wenn die Winkel, welche zwei äussere oder innere Scheitel der Curve am Mittelpunkte bilden, mit vier Rechten commensurabel sind — oder ungeschlossen, wenn dies nicht der Fall ist.

Im Falle die Momentenachse des Körpers in dem um c herum liegenden Keile bleibt, entstehen Curven wie Fig. 6, die unter denselben Bedingungen geöffnet oder geschlossen sind wie im vorhergehenden Falle.

Die Figuren 3, 4, 6 sind mit Halbellipsoiden vom Achsenverhältnisse 8,2 : 10,0 : 13,9 beschrieben, der zugehörige Körper ist ein Ellipsoid vom Achsenverhältnisse 1 : 5 : 7.

Die Fig. 5 ist mit einem Halbellipsoide vom Achsenverhältnisse 2 : 3 : 4 verzeichnet. Es gibt keinen homogenen Körper, dem dieses Ellipsoid als Centralellipsoid entspräche. Es ist eben nicht jedes beliebige dreiachsige Ellipsoid auch das Centralellipsoid irgend eines homogenen Körpers.

Den homogenen Parallelopipeden oder dreiachsigen Ellipsoiden von den halben Seitenlängen, bzw. Halbachsen a, b, c und der Masse M kommen Hauptträgheitsmomente von der Form

$$A = \frac{M}{n}(b^2 + c^2),\ B = \frac{M}{n}(c^2 + a^2),\ C = \frac{M}{n}(a^2 + b^2) \qquad (1$$

zu, worin $n = 3$ für das Parallelopiped und $n = 5$ für das Ellipsoid zu nehmen ist. Diesen Körpern entsprechen nur jene dreiachsigen Ellipsoide als Centralellipsoide, deren reciproke Quadrate der Halbachsen statt A, B, C in die obigen Gleichungen 1 eingesetzt für a^2, b^2 und c^2 positive Werthe liefern.

Man kann um den Schwerpunkt jedes homogenen Körpers als Mittelpunkt ein dreiachsiges homogenes Ellipsoid construiren, welches um jede durch den gemeinschaftlichen Schwerpunkt gezogene Linie dasselbe Trägheitsmoment besitzt wie der Körper, dem also dasselbe Centralellipsoid wie dem Körper zukommt.

Sind A', B', C' die Hauptträgheitsmomente jenes Körpers, so hat man hiezu bloss zu setzen:

$$\frac{M}{5}(b^2 + c^2) = A',\ \frac{M}{5}(c^2 + a^2) = B',\ \frac{M}{5}(a^2 + b^2) = C'$$

und hieraus die Quadrate der Halbachsen a^2, b^2 und c^2 des gesuchten Ellipsoides zu bestimmen. Führt man dies wirklich aus, so erhält man:

$$a^2 = \frac{5}{2M}(B+C-A),\ b^2 = \frac{5}{2M}(C+A-B),\ c^2 = \frac{5}{2M}(A+B-C).$$

Da nun

$$A = \int (y^2+z^2)\,\mathrm{dm},\quad B = \int (z^2+x^2)\,\mathrm{dm},\quad C = \int (x^2+y^2)\,\mathrm{dm}$$

ist, ergibt sich:

$$a^2 = \frac{5}{M}\int x^2\,\mathrm{dm},\quad b^2 = \frac{5}{M}\int y^2\,\mathrm{dm},\quad c^2 = \frac{5}{M}\int z^2\,\mathrm{dm},$$

woraus man ersieht, dass für a^2, b^2 und c^2 stets positive Werthe erhalten werden; denn diese Grössen sind den Summen der Producte der einzelnen Massenelemente in die Quadrate ihrer Abstände von den Coordinatenebenen, d. i. wesentlich positiven Grössen proportional.

Da also jeder homogene Körper durch ein dreiachsiges homogenes Ellipsoid von gleichem Centralellipsoid ersetzt werden kann, so folgt, dass jedes dreiachsige Ellipsoid, welches nicht Centralellipsoid eines homogenen dreiachsigen Ellipsoides ist, auch kein Centralellipsoid für irgend einen anderen Körper sein kann.

Bibliographische Mittheilung.

Ch. Chambers, The Meteorology of the Bombay Presidency.
A. v. Obermayer, Lehrbuch der Physik. Wien, Braumüller.
Robert H. Thurston, Report on cold rolled Iron and Steel. Pittsburgh.

XV. Band. 2. Heft.



REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE & ASTRONOMISCHE INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN.

FÜNFZEHNTER BAND.

Inhalt des 2. Heftes

(mit Tafel IV bis VI).

MÜNCHEN, 1879.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Den Herren Abnehmern des Repertoriums zur gefälligen Beachtung.

Das Repertorium für Experimental-Physik erschien vom Jahre 1878 Band XIV ab, einem wiederholt ausgedrückten Wunsche vieler Abnehmer entsprechend, gleichzeitig aber auch veranlasst durch die immer reichlicher zufliessenden Beiträge der Herren Mitarbeiter, bekanntlich in jährlich zwölf statt früher sechs Heften. Trotz der doppelt zu gebenden Anzahl Hefte wurde der Preis der Zeitschrift nur um den kaum nennenswerthen Betrag von 80 ₰. erhöht. Die Verlagshandlung ging bei dieser geringen Preiserhöhung von der Voraussetzung aus, dass der Umfang des Repertoriums sich nunmehr gleich bleiben werde.

Das einlaufende Material zum Repertorium ist aber noch immer im Wachsen begriffen; es dürfte den Herren Abnehmern kaum entgangen sein, dass der Umfang desselben auch im verflossenen Jahre wieder um ein Bedeutendes sich vermehrt, in den letzten Jahren überhaupt sich nahezu verdoppelt hat, während der Inhalt des Repertoriums aber auch um so Vieles reichhaltiger geworden ist.

Die Verlagshandlung hat mit der bisherigen Beibehaltung und beziehungsweise geringen Erhöhung des Preises, welcher mit den gestiegenen Herstellungskosten in keinem Verhältniss stand, sehr erhebliche Opfer gebracht. Die Herren Abnehmer werden es deshalb nicht unbillig finden, wenn die Verlagshandlung zur Verminderung derselben den Preis des Repertoriums vom Jahrgang 1879 Band XV ab auf

Mark 24. —

feststellt.

Auch bei einem weiteren mässigen Wachsen des Materials wird eine Wiederholung der Preissteigerung von nun ab voraussichtlich entbehrlich sein.

Das neue meteorologisch-magnetische Observatorium für St. Petersburg in Pawlowsk.

Von

H. Wild.

(Hiezu Tafel IV und V.)

Schon im Jahre 1830 wurde in St. Petersburg auf Veranlassung des Akademikers Kupffer für die Akademie der Wissenschaften ein besonderes magnetisches Observatorium erbaut. Dasselbe bestand indessen nur aus einem kleinen eisenfreien hölzernen Hause, das auf einem freien Platze des Glacis der Peter-Pauls-Festung gelegen war, und demgemäss sind daselbst auch nicht fortlaufende, sondern mehr vereinzelte absolute Bestimmungen der magnetischen Elemente gemacht worden, welche sogar nur bis zum Jahre 1835 reichen. Erst 1840 erfolgte gleichzeitig mit der Begründung der meteorologisch-magnetischen Observatorien bei den Bergwerken in Katharinenburg, Barnaul und Nertschinsk auch die eines eigentlich meteorologisch-magnetischen Observatoriums für St. Petersburg auf einem freien Platze beim Berginstitute zwischen der 22. und 23. Linie von Wassili-Ostrow. Dasselbe war nach denselben Plänen Kupffer's wie die übrigen Observatorien erbaut worden und bestand aus einem kleineren eisenfreien Gebäude für absolute magnetische Messungen und Zeitbestimmungen und aus einem grösseren für die magnetischen Variationsbeobachtungen, in und bei welchem auch die meteorologischen Beobachtungen angestellt wurden. In diesem Observatorium, wie in den übrigen Observatorien des Bergwesens, sind dann von 1841 bis 1862, also über 20 Jahre, mit kleinen Unterbrechungen stündliche meteorologische und magnetische Variationsbeobachtungen ausgeführt worden, deren sonst unschätzbarer Werth für die Wissenschaft leider durch den Umstand erheblich geschmälert wird, dass wegen unzu-

reichenden wissenschaftlichen Hilfspersonals nicht bloss etwa in den entfernten Orten, sondern auch in St. Petersburg selbst die Controle der Beobachter wie der Beobachtungsinstrumente eine ungenügende war. So sind in St. Petersburg die zur Controle der magnetischen Variationsinstrumente nöthigen absoluten Messungen nur von 1841 bis 1845 und von da an bis 1862 gar nicht mehr angestellt worden. Nach Begründung des physikalischen Central-Observatoriums im Jahre 1848 wurde auch das meteorologisch-magnetische Observatorium beim Bergwesen der Aufsicht desselben unterstellt und sodann zu Anfang der sechziger Jahre auf dem Terrain des letzteren selbst zwischen der 23. und 24. Linie von Wassili-Ostrow ein neues grösseres magnetisches Observatorium erbaut, das Herr Kupffer offenbar ursprünglich sowohl für absolute magnetische Messungen als auch für Variationsbeobachtungen bestimmt hatte und demgemäss auch ganz eisenfrei herstellen liess.

In dieses Gebäude wurden nach 1862 die meteorologischen Beobachtungen aus dem Observatorium beim Berginstitute übergeführt und sodann das letztere als baufällig abgebrochen. Magnetische Variationsbeobachtungen und begleitende absolute Messungen haben indessen in diesem neuen Gebäude erst im Jahre 1868 begonnen, und dabei wurde bald erkannt, dass darin der störende Einfluss der Eisenmassen des nahen Hauptgebäudes noch viel zu gross sei, um sichere absolute Messungen zu gestatten. Als ich daher im Jahre 1869 den noch von Herrn Kupffer angeschafften Magnetographen einrichtete und in regelmässige Function setzte, wurden die nothwendigen absoluten magnetischen Messungen anfänglich in der Mitte eines an das Observatorium angrenzenden Landstückes im Freien auf einer Steinsäule, später, als dieses Landstück von der Stadt dem Observatorium geschenkt worden war, in einer um diese Säule gebauten eisenfreien kleinen (3^m breiten und tiefen) Holzhütte angestellt. Dieser auf die Länge der Zeit in Anbetracht der Rauheit unseres Klimas offenbar ganz unhaltbare Zustand des Localitäten des St. Petersburger meteorologisch-magnetischen Observatoriums wurde noch dadurch verschlimmert, dass sich von Jahr zu Jahr die Frequenz auf der an demselben vorbeiführenden gepflasterten Strasse und damit die störenden Erschütterungen bei allen, insbesondere aber den magnetischen Instrumenten steigerte, dass durch Anlage von Fabriken, Stapelplätzen u. dgl. in unmittelbarer Nähe des Observatoriums all-

mählich bedeutende Eisenmassen permanent oder zeitweise um dasselbe aufgehäuft wurden, endlich dass die den theilweise veränderten Zwecken nicht angepasste Construction der Gebäude sowohl der Genauigkeit der meteorologischen wie auch der magnetischen Beobachtungen und Registrirungen, namentlich bezüglich der Temperaturconstanz der Räume, wesentlich Abbruch that.

Demzufolge konnte eine Verlegung des meteorologisch-magnetischen Observatoriums für St. Petersburg in eine günstigere Lage irgendwo in der Umgebung der Stadt, wie sie schon früher einmal projectirt worden war, nur eine Frage der Zeit sein; sie wurde möglich, als Seine Kaiserliche Hoheit der Grossfürst Konstantin Nikolajewitsch im Sommer 1874 in seinem Park in Pawlowsk ein grosses und sehr günstig gelegenes Landstück für ein solch neues Observatorium grossmüthigst schenkte.

Am 1. Juni 1875 erfolgte die Allerhöchste Bestätigung des von der Akademie der Wissenschaften dem Unterrichtsministerium vorgestellten Projects zur Begründung eines meteorologisch-magnetischen Observatoriums in Pawlowsk als Filial-Institut des physikalischen Central-Observatoriums; im Jahre darauf, am 20. Mai, fand in Gegenwart Seiner Kaiserlichen Hoheit des Grossfürsten Konstantin Nikolajewitsch die feierliche Grundsteinlegung statt, und schon im folgenden Jahre wurden von dem den Bau leitenden Architekten Herrn Marine-Ingenieur Tschikalew und dem Bauunternehmer Herrn Ssakulin am 15. August sämmtliche Gebäude fertig übergeben, so dass die innere Einrichtung der Lokalitäten und die Aufstellung aller Instrumente bis Ende 1877 vollendet werden und somit die normale Thätigkeit der neuen Anstalt mit dem 1. Januar 1878 (n. Stils) in jeder Richtung ihren Anfang nehmen konnte.

Nach diesem kurzen historischen Abriss über die Entstehung des neuen Instituts gehe ich zur Beschreibung desselben, seiner Einrichtungen und Instrumente über.

Das 7½ Dessjatinen (8 Hektaren) grosse, von einem Zaun und Graben umschlossene Landstück des Observatoriums hat eine rautenförmige Gestalt. Die schmäleren (im Mittel 117,5 Faden = 250^{m} langen) Seiten der Raute stossen an zwei sehr wenig befahrene Strassen, welche von Pawlowsk nach der Colonie Etjup einerseits und nach der Fedorowski'schen Niederlassung andererseits führen. Jenseits dieser Strassen, sowie längs der einen längeren (135 Faden = 288^{m}) Seite

des Landstücks erstreckt sich der Grossfürstliche Park, wo nicht gebaut werden soll. An der zweiten längeren Seite (175 Faden = 373^m) führt ein Waldweg vorbei, der aber vom freien Felde ausserhalb nur durch einen ungefähr 20 Faden (42^m) breiten Waldsaum getrennt ist. Es ist also unser Landstück ganz am Rande des Parkes, unweit des freien Feldes gelegen und daher kein Waldklima für dasselbe zu befürchten. Die nächsten fremden Häuser sind die der Colonie Etjup, von denen indessen nur eines oder zwei mit Eisen gedeckt sind; sie sind über 200 Faden (427^m) entfernt. Die Entfernung bis zu den nächsten Landhäusern von Pawlowsk beträgt 350 Faden (747^m) und diejenige von der Eisenbahnstation Pawlowsk in gerader Richtung 2 Werst (2,1 Kilometer). Auf diesem Terrain werden also jedenfalls für lange Zeit weder Störungen durch Erschütterungen noch solche durch Eisenmassen von aussen her zu befürchten sein.

Den an drei verschiedenen Stellen des Terrains ausgeführten Bohrungen zufolge besteht der Untergrund ziemlich gleichförmig aus einer 4 bis 5 Zoll (10^{cm}) dicken Humusschicht, auf welche eine ungefähr 1 Faden (2,1^m) mächtige Schicht reinen Sandes folgt; darunter liegt, durch eine dünne Geröllschicht getrennt, Lehm. Das Terrain fällt von der Fedorowski'schen Strasse gegen die Etjup'sche hin um ungefähr 2 Faden (4,3^m) ab, und ebenso hat auch die Lehmschicht einen, allerdings etwas geringeren Fall dahin, so dass das Wasser gegen Etjup hin abfliesst und auf dieser Seite der Boden stellenweise etwas sumpfig war. Seit indessen der das ganze Landstück früher bedeckende Wald gelichtet und namentlich in der Mitte auf eine grössere Strecke ganz ausgerodet ist und seit zur Gewinnung der auf den magnetischen Pavillon für Variationsbeobachtungen aufzuschüttenden Erde auf der Seite gegen Etjup hin durch Ausgrabung des Sandes bis auf die Lehmschicht herunter ein grösserer Teich entstanden ist, wo sich das Wasser ansammelt und dann in den Umfassungsgraben abfliesst, ist das Terrain auch an den tiefer gelegenen Stellen trocken geworden.

Das Institut umfasst drei wissenschaftliche Gebäude, nämlich ein steinernes Hauptgebäude mit Thurm, hauptsächlich für meteorologische Beobachtungen, ein steinernes, doppelt gewölbtes, mit Erde überdecktes Gebäude für magnetische Variationsbeobachtungen und einen hölzernen, ganz eisenfreien Pavillon für absolute magnetische Messungen und für Zeitbestimmungen. Die

Pläne desselben sind nach meinen Angaben von dem Architekten der Akademie der Wissenschaften, Herrn Boltenhagen, entworfen und constructiv entwickelt worden. Die vier wirthschaftlichen hölzernen Gebäude enthalten die Wohnungen für die Beamten, die Diener, sowie die nöthigen Räume für ökonomische Bedürfnisse, wie Stallung, Remise, Eiskeller, Waschküche, Holzbehälter etc.

Diese Gebäude sind derartig auf dem Landstücke vertheilt, dass alle wirthschaftlichen Gebäude, wie auch das Hauptgebäude, nahe dem Eingang zum Observatorium von der Fedorowski'schen Strasse her liegen, während dagegen die beiden Gebäude für magnetische Beobachtungen mehr in der Mitte des Terrains erbaut sind.

Die letzteren sind also von den vorbeiführenden Strassen beiderseits ungefähr 75 Faden (160^{m}) entfernt, liegen 40 Faden (85^{m}) aus einander und stehen nahezu um eben so viel je von der näheren Terraingrenze ab. Da sie zudem von dem Hauptgebäude und den übrigen Gebäuden des Observatoriums, die alle nicht mit Eisen, sondern mit Dachpappe gedeckt sind, um mindestens 60 Faden (128^{m}) entfernt liegen, so sind dort weder von diesen Gebäuden her noch auch von auf den Strassen vorüberfahrenden Wagen mechanische oder magnetische Störungen für die Beobachtungen zu befürchten. Bis dahin haben wir auch in der That bei den Beobachtungen keine Spur von Erschütterungen oder anderen Störungen wahrnehmen können. Uebrigens haben wir auch im Hauptgebäude, dessen Mitte von der Strasse bloss 30 Faden (64^{m}) entfernt ist, noch keinerlei Erschütterungen bemerkt.

Das Hauptgebäude, wie alle übrigen genau von Nord nach Süd orientirt und im Grundriss nahezu ein Quadrat von 8 Faden (17^{m}) Seite darstellend, hat zwei Stockwerke und einen Thurm von 11 Faden (23,5^{m}) Höhe, der sich über seiner Mitte erhebt. Im unteren Stockwerk, wenig über dem Erdboden erhaben, befinden sich ausser Vestibul und Treppenraum die Werkstätten für Metall- und Holzarbeiten, ein physikalisches Laboratorium mit den nöthigen Hilfsinstrumenten für Längenmessungen, Wägungen, Magnetisiren von Stahlmagneten und Untersuchen derselben, Instrumente zur Bestimmung der elektromotorischen Kräfte und Widerstände galvanischer Elemente wie auch der Drahtleitungen, Luftpumpen zum Evacuiren etc., ferner ein chemisches Laboratorium für die nöthigen chemischen Operationen und für die Destillation von Wasser, und daran anstossend ein beson-

deres photographisches Laboratorium mit Dunkelkammer zur Präparirung der Papiere für die photographisch registrirenden Apparate, endlich zwischen den ersten beiden ein Raum für die galvanischen Batterien und ihre Reinigung. Ausserdem enthält dieses Stockwerk noch ein Wohnzimmer für den Diener dieses Hauses und in einem Anbau an die Werkstätte die Pumpe, um das Wasser aus dem Brunnen in den im Thurm befindlichen Behälter zu heben, von wo dann die Laboratorien im Hauptgebäude selbst, wie auch alle Wohngebäude mit Wasser versorgt werden. Im Centrum endlich dieser Etage befinden sich die beiden Luftheizungsöfen für das ganze Gebäude und unmittelbar darüber in einem gewölbten runden Saal der zweiten Etage diejenigen Instrumente, für welche besonders eine gewisse Constanz der Temperatur erforderlich ist, nämlich ein Regulator von Wirén dahier mit Quecksilbercompensationspendel, 2 nach mittlerer Zeit gehende Box-Chronometer und 2 nach Sternzeit gehende Taschen-Chronometer, eine Pendeluhr mit elektrischem Secundenschluss und endlich der elektrisch selbstregistrirende Barograph mit Temperatur-Compensation. Die diesen Mittelsaal umgebenden Räume enthalten ein Arbeitscabinet für den Director, ein solches für den Verweser des Observatoriums, ferner einen grösseren Saal, in welchem die von Herrn Staatssecretär v. Golownin geschenkte Bibliothek aufgestellt ist, ein die wissenschaftliche Handbibliothek enthaltendes Cabinet, ein grösseres Zimmer für die Bearbeitungen der Beobachtungen und endlich das Zimmer für den dejourirenden Beobachter, in welchem überdies die Barometer (2 Quecksilberbarometer und ein Aneroid-) für directe Ablesung, das elektrische Zählwerk des auf dem Thurme aufgestellten Normalanemometers, der Druckapparat des v. Oettingen-schen Componenten-Anemographs construirt von Schultze in Dorpat, die Pendeluhren mit 10 Minuten-Contact für die elektrisch registrirenden Apparate, der Chronograph und endlich die Telephonstation zur Correspondenz mit den magnetischen Gebäuden sich befinden. Aus diesem Dejourzimmer gelangt der Beobachter durch eine kleine Wendeltreppe unmittelbar in den Batterieraum darunter und aus diesem durch eine doppelte Glasthür in den an die Nordseite des Gebäudes angelehnten hölzernen Pavillon, wo die Thermometer und Hygrometer aufgestellt sind. Dieser geräumige, 16,5′ (5^m) hohe, 17,5′ ($5{,}3^m$) tiefe und weite Pavillon mit wenig geneigtem doppelten Dach ist nach der Nordseite ganz offen und seitlich, bis auf einen

durch Glasfenster und Thüren davon abgetrennten Corridor gegen das Haus hin, unten bis zu einer Höhe von 5′ (1,5 m) vom Boden ebenfalls offen, von da an aufwärts durch stellbare Jalousien geschlossen. Die Thermometer können entweder von dem erwähnten Corridor aus durch die Glasfenster mit einem Fernrohr abgelesen werden, oder man kann auch auf gegitterten Brettergängen zu den einzelnen Instrumenten gelangen, welche sämmtlich auf besonderen, unmittelbar im Erdboden eingegrabenen Pfählen ruhen. Es befinden sich nämlich da ein Thermometergehäuse für directe Beobachtung der Temperatur und Feuchtigkeit der Luft mit Psychrometer und Haarhygrometer, Maximum- und Minimum-Thermometer, wie sie auf den gewöhnlichen meteorologischen Stationen bei uns eingeführt sind, ein elektrisch registrirender Thermo- und Hygrograph von Hasler & Escher nach meinen Angaben construirt, aus dessen Gehäuse mit Controlinstrumenten für directe Beobachtung ein 15′ (4,6 m) langes Ventilationsrohr durch das Dach des Pavillons hindurch nach aussen geführt ist, ferner ein photographisch registrirendes Psychrometer von Adie (älterer Construction) und endlich mein Wag-Evaporometer für directe Ablesung. Die Thermometergefässe liegen alle in einer Höhe von ungefähr 8′ (2,4 m) über dem Boden (Rasen).

Gewissermassen im Anschluss an diesen Thermometerpavillon befinden sich mitten auf dem weiten freien Rasenplatze an der Nordseite des Hauptgebäudes in 24 Faden (51 m) Entfernung von demselben das Radiationsthermometer mit schwarzer Kugel in luftleerer Hülle 4′ (1,2 m) über dem Boden und auf dem Boden selbst ein gewöhnliches und ein Weingeist-Minimumthermometer zur Beobachtung der Temperatur unmittelbar an der Erdoberfläche. Ebendaselbst sind auch 2 Regenmesser verschiedenen Systems für directe Beobachtung (2 m über der Erdoberfläche), sowie in zwei besonderen kleinen Holzhütten ein electrisch registrirender Ombro- und Atmograph und elektrisch registrirender Ombro- und Anemograph, beide von Hasler nach meinen Angaben construirt, aufgestellt. Diese Apparate sind durch unterirdische Kabel mit Uhr und Batterie im Hauptgebäude verbunden. An derselben Stelle sollen später noch die Erdthermometer und ein zweiter aus dem Central-Observatorium dahin noch überzuführender elektrisch registrirender Thermo- und Hygrograph etablirt werden. Schwimmende Verdunstungsmesser endlich werden im Jahre 1878 beim Teich eingerichtet werden.

Der erwähnte mit dem Ombrograph verbundene Anemograph hat nur zum Zweck, den Unterschied des Windes nahe dem Boden und in der Höhe zu ermitteln. Als Norm für die Windbeobachtung gelten die auf der Plattform des Thurmes aufgestellten Anemometer. Sie bestehen aus meiner kleinen Windfahne mit Windstärketafel für directe Beobachtung wie auf gewöhnlichen meteorologischen Stationen, welche sich noch 12,5′ (3,8^{m}) über das Thurmdach erhebt, also 89,5′ (27,3^{m}) hoch über dem Erdboden ist, dem v. Oettingen'schen Componenten-Anemograph von Schultze, dessen Robinson'sches Schalenkreuz sich 16′ (4,9^{m}) über die Plattform des Thurmes erhebt, also 93′ (28,3^{m}) über der Erdoberfläche sich befindet und dessen Componentenzerleger in der obersten Etage des Thurmes auch eine directe Ablesung der Windrichtung und seiner Geschwindigkeit in gewöhnlicher Weise gestattet. (Der zugehörige Druckapparat für die Windcomponenten ist, wie schon oben bemerkt, unten im Zimmer des dejourirenden Beobachters aufgestellt und durch ein Kabel mit dem Componentenzerleger im Thurm verbunden.) Als zweiter Anemograph dient ein von Munro in London nach dem Muster der bekannten Kew'schen Anemographen construirtes Instrument Das Robinson'sche Schalenkreuz desselben ist 11′ (3,3^{m}) über der Plattform des Thurmes und somit 88′ (26,8^{m}) über dem Erdboden aufgestellt, der Schreibapparat befindet sich wieder in der obersten Etage des Thurmes, durch dessen Dach wie beim Componenten-Anemograph die Verbindungsstangen durchgehen. Die Schalenkreuze und Fahnen dieser Apparate sind trotz der daraus für die Reinigung erwachsenden Unbequemlichkeit so hoch über dem Thurmdach placirt, um störende Einflüsse einerseits von nahen Tannenbäumen, von welchen mehrere die Höhe des Thurmes erreichen, andererseits von Stauungen des Windes am Thurm selbst besser zu eliminiren. Zur Verification der Anemographen ist endlich auf dem Thurm noch ein transportables, nach Belieben in die Höhe des einen oder andern zu bringendes Robinson'sches Normalanemometer construirt von Schultze in Dorpat aufgestellt. Das zugehörige elektrische Zählwerk befindet sich, wie schon erwähnt, im Dejourzimmer.

Fügen wir hinzu, dass noch ein zweiter photographisch registrirender Barograph von Adie im unterirdischen magnetischen Pavillon aufgestellt ist, so sehen wir also, dass nicht bloss alle meteorologischen Instrumente für directe Beobachtung zur Vermeidung einseitiger

Ablesungsfehler, sondern auch die meteorologischen selbstregistrirenden Apparate behufs Wahrung der Continuität der Aufzeichnungen im Falle von Störungen bei dem einen oder andern Apparat doppelt vorhanden sind. Für die Qualität der Instrumente bürgen die bisherigen befriedigenden Erfahrungen an Apparaten gleicher Construction in St. Petersburg. Es ist kaum nöthig, hinzuzufügen, dass behufs Erzielung richtiger absoluter Werthe die Barometer vermittelst eines Uebertragungsbarometers 1. Classe nach dem Normalbarometer des Central-Observatoriums und sämmtliche Thermometer nach dem Normalthermometer des letzteren verificirt sind. Die Constanten des Normalanemometers endlich sind ebenfalls auf dem Rotationsapparat des Central-Observatoriums neu bestimmt worden.

So ist, soweit dies die äusseren localen Bedingungen und die instrumentellen Hilfsmittel betrifft, für eine sowohl der absoluten Sicherheit als der Continuität nach genügende Bestimmung der gewöhnlichen meteorologischen Elemente gesorgt.

Was die magnetischen Beobachtungen anbelangt, so dürfte es nicht überflüssig sein, vor der Beschreibung der betreffenden Gebäude mit einigen Worten der Principien zu gedenken, welche mich bei der Anlage und Einrichtung derselben leiteten. Dass für die absoluten magnetischen Messungen in gehöriger Entfernung von den übrigen eisenhaltigen Gebäuden des Instituts ein besonderer eisenfreier Pavillon zu errichten sei, war ohne Weiteres klar. Es schien auch nach dem Vorgang bei andern magnetischen Observatorien unmittelbar geboten, mit diesem Gebäude das Local für die Zeitbestimmungen zu verbinden, da ja dort auch schon zur Ermittlung der Azimute der Miren für die Declinationsmessungen astronomische Beobachtungen anzustellen sind. Dagegen konnte man sich noch fragen, wie es mit den Localitäten für die magnetischen Variationsbeobachtungen gehalten werden sollte. Für die letzteren wird nicht sowohl eine vollständige Eisenfreiheit der nächsten Umgebung als eine constante Lage allfällig vorhandener geringerer Eisenmassen, resp. also eine vollkommene Constanz des magnetischen Einflusses der letzteren gefordert. Durch die Beziehung auf die absoluten Messungen ist dann dieser störende Einfluss zugleich mit dem, welchen schon die Magnete der verschiedenen Variationsapparate auf einander ausüben, zu eliminiren. Da ausserdem eine grössere Constanz der Temperatur der Localitäten bei diesen Variationsbeobachtungen geboten ist, um eine Reihe schwer

zu eliminirender Störungen bei den bezüglichen Instrumenten zu vermeiden, so hat man meistentheils die Räume für dieselben mit denen der meteorologischen Beobachtungen, ja sogar mit den Wohngebäuden verbunden. An einigen Orten wie in Greenwich und Kew, theilweise auch in München, Utrecht und Wien, hat man dabei der Bedingung der Temperaturconstanz durch Placirung der Variationsapparate in Kellerräumen besser zu genügen gesucht. Demzufolge war auch mein erster Gedanke, die magnetischen Variationsapparate in einem Souterrain des Hauptgebäudes unterzubringen, was ja auch sonst viele Vortheile für die Controle der Instrumente, die directen Beobachtungen, die Operationen beim Magnetograph etc. gehabt hätte. Der Umstand indessen, dass in einer Entfernung von 8,5^m (4 Faden = halbe Breite oder Tiefe des Hauptgebäudes) schon ein Stahlmagnet von 70 Gramm Gewicht durch seinen permanenten Magnetismus und eine weiche Eisenmasse von 2$^3/_4$ Kilogramm durch ihren inducirten Magnetismus eine 0,1 Bogenminute betragende Störung auf das Declinatorium ausüben kann, verbot wenigstens in unserem Falle die Realisirung dieses Gedankens. Denn die eisernen Wasserleitungsröhren nebst Wasserbehälter im Thurm und Pumpe unten, die Drehbank, der Ambos, der Schraubstock etc. der Werkstätte, die magnetelektrische Maschine und die Luftpumpe des physikalischen Laboratoriums repräsentiren über 100mal grössere Eisen- und Stahlmassen als die oben angegebenen Grenzen, und wenn sie auch zum grösseren Theil fix sind und ihr beträchtlicher, störender Einfluss somit als constant, wie oben bemerkt, weniger zu befürchten wäre, so sind doch ausserdem in den Werkstätten und Bureaux des Hauptgebäudes noch so viel transportable eiserne Instrumente und Geräthschaften vorhanden, dass auch bloss von ihnen her sehr erhebliche variable Störungen auf im gleichen Gebäude befindliche Variationsapparate unvermeidlich erfolgt wären. So erschien denn die Errichtung eines dritten ganz besonderen Gebäudes für die magnetischen Variationsapparate unter unseren Verhältnissen geboten.

Wer je eingehender mit erdmagnetischen Beobachtungen sich beschäftigt hat, weiss, wie störend der Einfluss der Temperaturveränderungen der Umgebung auf die Variationsinstrumente und insbesondere auf die zur Bestimmung der Horizontal- und der Vertical-Intensität dienenden ist. Die durch Temperaturdifferenzen erzeugten Luftströmungen im Innern der Magnetgehäuse, die Abhängigkeit des Stabmagnetismus von der Temperatur der Stäbe sind so schwer zu

eliminiren oder in Rechnung zu bringen, dass durch die hieraus entstehenden Unsicherheiten ein beträchtlicher Theil der durch Spiegelablesung mit Fernrohr und Scale erzielten Genauigkeit dieser Variationsbeobachtungen wieder im Resultat verloren geht. Raschere und beträchtliche Temperaturvariationen müssen also jedenfalls bei diesen Instrumenten vermieden werden. Der Einfluss der langsamen und stetigen Aenderung aber der Temperatur der fraglichen Localitäten, wie sie z. B. im Laufe des Jahres zu erfolgen pflegt, lässt sich allerdings mit Hilfe der absoluten Messungen ziemlich sicher bestimmen; allein auch in dieser Richtung müsste es doch als ein bedeutender Fortschritt bezeichnet werden, wenn es gelänge, die Temperatur dieser Instrumente überhaupt ganz constant zu erhalten. (Man hat versucht, auch bei ihnen analog wie bei Pendeluhren und Chronometern eine Temperaturcompensation einzurichten, allein der Erfolg der letzteren ist ein viel geringerer gewesen als bei jenen Instrumenten.) Bei der grossen Jahresamplitude der Lufttemperatur in St. Petersburg konnte dieses Ziel, wenn überhaupt, so jedenfalls nur durch ganz besondere Vorkehrungen erreicht werden und zwar um so mehr, als es an der für dieses Gebäude ausgewählten Stelle des Terrains nicht anging, dasselbe unterirdisch anzulegen, indem man dort schon in weniger als 1 Faden (2^m) Tiefe auf Grundwasser stiess. Das oberirdisch aufzuführende Gebäude war also behufs Vergrösserung der Masse, resp. Verlangsamung und Verminderung der Temperaturvariationen darin mit Erde zu überschütten. Diese Erdaufschüttung hätte eine Dicke von ungefähr 9^m haben müssen, wenn dadurch die äusseren Schwankungen der mittleren Lufttemperatur im Laufe des Jahres (28^0 C.) auf 1^0 C. reducirt werden sollten; da aber in Wirklichkeit eine solche Aufschüttung von höchstens $1{,}5^m$ ausführbar erschien, durch welche die jährliche Temperaturvariation nur auf ungefähr 15^0 C. herabgedrückt wird, so musste zur Erzielung einer constanten Temperatur im Innern jedenfalls zu künstlichen Erwärmungs- resp. Abkühlungsquellen daselbst gegriffen werden. Um nun bloss erstere als bequemer herzustellende zu benutzen und zugleich zu Anfang des Sommers beim Eindringen feuchtwarmer Luft aus dem Freien in das Gebäude daselbst Condensationen des Wasserdampfes thunlichst zu vermeiden, musste in Anbetracht der Thatsache, dass der natürliche Erdboden bei uns in $1{,}5^m$ Tiefe im April eine Minimumtemperatur von nahe 0^0 und im August als Maximum ungefähr 15^0 erreicht, die

herzustellende constante Temperatur jedenfalls höher als die letztere gewählt werden. Dieselbe wird sogar kaum niedriger als 20° C. gegriffen werden können, da ja die drei Flammen des Magnetographs bereits eine beständige, nicht unerhebliche Wärmequelle repräsentiren. Eine solch höhere Temperatur bietet aber auch noch den weiteren Vortheil dar, dass durch die Gegenwart des Beobachters und besonderer Beleuchtungslampen bei den directen Ablesungen der Instrumente weniger starke Störungen des Temperaturgleichgewichts erfolgen. Das Local ist also — auch schon der Ventilation halber — das ganze Jahr hindurch stärker oder schwächer zu beheizen, und da war denn nun bei der Anlage der Oefen wieder darauf zu achten, dass einmal keine einseitige Erwärmung der Localitäten und sodann trotz allfälliger Unvorsichtigkeit des Heizers auch keine plötzliche Temperaturveränderung erfolgen könne. Zu dem Ende waren jedenfalls langsam wirkende Luftheizungsöfen zu verwenden, und zur Erzielung einer gleichförmigeren Vertheilung der Temperatur hielt ich es für das Beste, die warme Luft daraus nicht unmittelbar in die Zimmer zu leiten, sondern dieselbe zunächst in einem dieselben ganz umgebenden Corridor und auch in dem Zwischenraum einer doppelten Gewölbdecke circuliren zu lassen, ehe sie in die Zimmer selbst tritt und aus diesen dann am Boden in die Ventilationskamine abfliesst.

Diesen Ueberlegungen gemäss ist das Gebäude für magnetische Variationsapparate, das wir in der Folge kurz mit „unterirdischem magnetischen Pavillon“ bezeichnen wollen, entworfen und ausgeführt worden. Es besteht aus zwei gewölbten Sälen von je 3 Faden (6,4^{m}) Breite und Tiefe, welche durch einen 6′ (1,8^{m}) breiten Corridor von einander getrennt, auf den hinteren Seiten halb kreisförmig abgerundet und in der Mitte der Gewölbe 16′ (4,8^{m}) hoch sind. Ueber dieses Gewölbe ist ein zweites gebaut, welches unten die beiden Säle als 4′ (1,2^{m}) breiter Corridor umgibt und beiderseits mit dem Gang zwischen denselben communicirt. Diesen Corridoren wird an den dem Eingang zugewandten Enden durch daselbst angebrachte Luftheizungsöfen warme Luft zugeführt, welche am hinteren geschlossenen Ende derselben durch eine grosse Oeffnung im inneren Gewölbe in die Säle gelangt und durch Ventilationskamine nahe den Rauchkaminen der Oefen nach aussen abfliesst. Die Kamine durchsetzen die Erdaufschüttung über dem äusseren Gewölbe und ragen zur Vermehrung des Zuges noch mehr als einen Faden über den ganz mit Rasen bekleideten

Hügel empor, welchen das Gebäude mit seiner Erdbedeckung darstellt. Der ganze Bau sammt dem tunnelartigen Eingang von Norden aus ist mit Cementmörtel aus gewöhnlichen rothen Backsteinen hergestellt, also, da diese etwas Eisen enthalten, nicht ganz eisenfrei; dagegen sind alle beweglichen Theile, wie Schlösser und Hängen der Thüren, Ventilationsklappen, Ofenthüren, Ofenbrücke etc., aus Messing oder Kupfer gearbeitet. Jeder Saal ist gegen den Corridor zu durch eine Thür verschlossen und ausserdem befinden sich in grösseren Zwischenräumen in dem Eingangscorridor noch drei Thüren, welche die directe Communication der Aussenluft mit dem Innern verhindern und den Wärmeaustausch erschweren.

Im einen Saal nun ist der aus dem Central-Observatorium im December nach Pawlowsk übergeführte Magnetograph (von Adie in London nach dem Muster des Kew'schen angefertigt) aufgestellt, an welchem bei dieser Gelegenheit mehrere Verbesserungen angebracht worden sind. Sowohl beim Unifilar- als beim Bifilarmagnetometer wurden nämlich doppelt so hohe Fadenträger angebracht, um die Torsionseinflüsse der Aufhängefäden zu vermindern und so die Apparate in ihrem Verhalten constanter zu machen. Höhere und bessere Glasglocken waren für alle drei Instrumente des Magnetographs (Unifilar-, Bifilar- und Lloyd'sche Wage) beschafft und ein wirklich luftdichter Verschluss dieser Magnetgehäuse erzielt worden, so dass dieselben, wenn die Erfahrung es als nützlich herausstellen sollte, evacuirt werden können. Die die Magnete umgebenden Kupferdämpfer wurden ferner, um jetzt schon den störenden Einfluss allfälliger Luftströme im Innern der Gehäuse auf die Magnete zu verringern, einerseits durch Glasplatten geschlossen. Der Raum gestattete es, die drei Instrumente weiter aus einander zu rücken, resp. vom registrirenden Theil in der Mitte weiter zu entfernen, wodurch dieselben empfindlicher wurden und auch die Fernröhren und Scalen für directe Ablesung der Magnetstände besser zu placiren waren. Da die Steinsäulen des Magnetographs nicht wie in St. Petersburg bloss auf dem Mosaikfussboden des Zimmers, sondern auf besondere, diesen durchsetzende Steinfundamente gestellt sind, so darf ein hoher Grad von Stabilität dieser Instrumente erwartet werden. Wie in St. Petersburg, so werden auch hier die Verbrennungsproducte der drei Tag und Nacht brennenden Lampen, die für die photographische Registrirung dienen, durch Blechschornsteine über denselben in eines der Ventilationskamine abgeführt.

Ausser dem Magnetographen befindet sich in diesem Saale nur noch der oben schon erwähnte, ebenfalls photographisch registrirende Barograph von Adie. Er wurde wegen der Temperaturconstanz des Raumes hieher placirt.

Die magnetischen Variationsapparate für directe Ablesung sind im zweiten Saale auf besonderen, ebenfalls direct im Untergrund fundamentirten Granitpfeilern aufgestellt. Sie bestehen aus einem Unifilar, einem Bifilar-Magnetometer, einer Lloyd'schen Wage und einem Variations-Inclinatorium. Die ersteren beiden Instrumente sind nach meinen Angaben von Edelmann in München construirt und unterscheiden sich von anderen Instrumenten der Art hauptsächlich durch eine grössere Stabilität aller Theile, obschon die Aufhängefäden nahezu 1^m lang sind, durch eine starke Dämpfung der kleinen (bloss 33^{gr} schweren) Magnete, möglichste Elimination störender Luftströmungen durch die Construction und durch die Möglichkeit, das Magnetgehäuse vollständig zu evacuiren und evacuirt zu erhalten, ohne dass deshalb der Magnet aufhört von aussen sichtbar und somit controlirbar zu sein. Die Lloyd'sche Wage ist durch gänzliche Umarbeitung eines älteren, im Central-Observatorium befindlichen Instrumentes dieser Art entstanden; dieselbe wurde mit einem Dämpfer und insbesondere mit einer Spiegelablesung, wie ich sie für Wagen überhaupt angegeben habe, versehen, welche trotz der Drehung um eine horizontale Achse doch die viel bequemere Ablesung an einer horizontalen Scale wie bei den Magnetometern gestattet; auch da wurde auf eine grosse Stabilität aller Theile geachtet. — Die zu diesen drei Instrumenten gehörigen Scalen und Fernröhren sind ebenfalls sehr stabil auf Steintischen aufgestellt, die unveränderte Lage der Fernröhren wird überdies durch feste Mirenspiegel an den Apparaten controlirt, und die Scalen sind der Unveränderlichkeit halber auf Glas getheilt, was überdies eine sehr gute und einfache Beleuchtung der Theilung in diesem ganz dunkeln Raume für die Beobachtung gestattet. Der Beobachter setzt zu dem Ende nur seine mit einer Linse versehene eisenfreie Handlaterne auf ein Tischchen hinter die Scale und lässt das Licht derselben durch die Glasscale hindurch auf die Spiegel der Instrumente fallen. Im Fernrohr betrachtet projiciren sich dann die schwarzen Theilstriche scharf auf einem sehr hellen Hintergrund. — Das Variations-Inclinatorium ist das von Gambey in Paris nach den Angaben des Herrn Kupffer verfertigte, welches der Letztere am 25. August

1830 der Akademie vorlegte und im *Recueil d'observations magnétiques faites à St.-Pétersbourg* p. 99 ff. beschrieben hat. Da mit diesem Instrumente von Herrn Kupffer die ersten Beobachtungen über die tägliche Variation der Inclination gemacht worden sind und sich dasselbe noch sehr wohl erhalten im physikalischen Cabinet der Akademie vorfand, so schien es mir interessant, durch längere Beobachtungen zu untersuchen, inwiefern seine Angaben mit den aus den Beobachtungen am Bifilar und an der Lloyd'schen Wage abgeleiteten Inclinationen übereinstimmen. Die vier Instrumente sind so angeordnet, dass sie die geringsten Störungen auf einander ausüben; am beträchtlichsten ist diejenige, welche die Magnetnadel des Kupffer'schen Variations-Inclinatoriums auf die Lloyd'sche Wage ausübt; auch sie beträgt aber bloss — wenn man die Nadel ganz aus dem Local entfernt oder in den Apparat legt — 2,4 Scalentheile = 1′ 24″.

In diesem Raum befindet sich noch unmittelbar vor dem Steintisch mit den Ablesefernröhren eine Pendeluhr, welche auf elektromagnetischem Wege mit der elektrischen Uhr im Hauptgebäude in synchronem Gange erhalten werden soll und zur sicheren Angabe der Beobachtungszeit dient. Dieselbe bewirkt zugleich durch ein alle Stunden ausgelöstes Laufwerk einen elektrischen Contact, welcher durch eine Leitung in passend angebrachte Solenoide bei den drei Instrumenten des Magnetographs den Strom eines galvanischen Elements schickt und durch kurze Ablenkung ihrer Magnete die Stundenmarken auf den photographischen Curven hervorbringt. Auf dem Uhrgehäuse endlich befindet sich ein kleines elektrisches Läutwerk, an welchem dem Beobachter bei den Variationsinstrumenten vom Gebäude für absolute Messungen her Signale für gleichzeitige Ablesungen der letzteren gegeben werden können. Ausserdem kann man vermittels einer anderen elektrischen Glocke im Corridor Signale vom Hauptgebäude her senden und ebenso vermittels Taster in beiden Sälen welche dorthin geben und durch Telephone nach beiden Seiten hin correspondiren.

Während der unterirdische magnetische Pavillon, wie wir gesehen haben, ohne Schaden für seinen Zweck nicht ganz eisenfrei hergestellt wurde, ist dagegen das Gebäude für absolute magnetische Messungen, das ich in der Folge kurz mit „hölzernem magnetischen Pavillon“ bezeichnen werde, vollkommen eisenfrei. Alle Metalltheile, wie Schlösser, Hängen, Nägel und Schrauben, Ofenklappen etc., sind von Kupfer oder Messing gearbeitet und überdies noch besonders an

einem empfindlichen Magnetometer auf vollkommene Eisenfreiheit untersucht. Dasselbe ist bezüglich der Kalksteine für die Fundamente, der weissen Backsteine für die Oefen und Kamine, sowie des für die Postamente bestimmten Granits geschehen. Während des Baues wurde von unserer Seite wiederholt eine scharfe Controle ausgeübt, dass die bei demselben beschäftigten Arbeiter, wie es befohlen war, keine Eisennägel, selbst nicht zu den Gerüsten u. dgl., verwendeten. Eine genaue Inspection des Gebäudes nach seiner Vollendung, aber vor dem Oelfarbanstrich der Wände und dem Theeren des Pappdaches liess uns nirgends eine Spur von Eisen auffinden. — Der Hauptsaal dieses Gebäudes hat wie der ganze Pavillon überhaupt die Form eines Kreuzes. Ueber der Mitte des Kreuzes erhebt sich eine 9′ (2,7 ^{m}) ins Quadrat haltende, mit dreifachen Fenstern versehene Laterne, die so hoch ist, dass die Strahlen der Sonne auch bei ihrem höchsten Stande nur die Wände der Laterne treffen und nicht direct ins Innere des Zimmers gelangen können. Am nördlichen und südlichen Ende des Saales befinden sich nahe an der Decke niedrige Fenster, von welchen das südliche durch eine Store bedeckt werden kann; der östliche Kreuzarm des Saales communicirt durch doppelte Glasflügelthüren mit dem Anbau für die Zeitbestimmungen, während der westliche Arm ebenfalls durch doppelte Thüren und Fenster mit dem Entrée und den Ofenräumen seitlich vom letzteren in Verbindung steht. Die Beheizung des Hauptsaals erfolgt ganz analog wie beim unterirdischen Pavillon, indem die beiden Luftheizungsöfen ihre warme Luft auch zuerst in Corridore abgeben, welche die Nord- und Südseite des Saales nach aussen umgeben und aus denen die Luft dann erst am östlichen Ende in den Saal und von da am westlichen Ende in die Ventilationskamine tritt. Auf diese Weise wird erzielt, dass wenigstens während der Dauer der absoluten Messungen, d. h. während etwa 2 Stunden, keine merklichen Temperaturänderungen im Saal erfolgen. Der Anbau für die Zeitbestimmungen, der auch noch einen directen Ausgang ins Freie besitzt, bleibt selbstverständlich ungeheizt; doch kann er im Fall plötzlich eintretenden Thauwetters nach grösserer Kälte zur Verhütung allfälliger Condensationen durch Oeffnen der Thüren zum geheizten Hauptsaal etwas temperirt werden.

In diesem Anbau für Zeitbestimmungen befinden sich zwei im Untergrund fundamentirte Granitpfeiler, von welchen der eine, mitten unter dem Meridiandurchschnitt stehende, ein eisenfreies Pas-

sagen-Instrument von Pistor & Martins in Berlin trägt, während auf dem anderen, unter einer im Dach eingesetzten Laterne das von Brauer nach meinen Angaben construirte magnetisch-astronomische Universal-Instrument aufgestellt ist. Das erstere dient in der üblichen Weise zur Bestimmung der Uhrfehler durch Beobachtung der Durchgänge von Gestirnen durch den Meridian; das letztere soll zunächst hauptsächlich zur Messung der absoluten Declination dienen, da hier Sommer und Winter die Temperatur sehr nahe gleich der äusseren sein und so bei der Beobachtung der Miren durch Oeffnungen in der Wand die störenden Luftströmungen in den letzteren, wie sie bei Temperaturdifferenzen eintreten, wegfallen werden. Solcher Miren, die genau im astronomischen Meridian des Durchgangsinstruments behufs gleichzeitiger Controle seines Azimuts aufgestellt sind, gibt es zwei, eine nach Nord und eine nach Süd. Beide sind ungefähr 140^m (66 Faden) vom Passageninstrument entfernt und bestehen einfach aus einer rechtwinklig umgebogenen, auf einem Steinpfeiler solide befestigten Messingplatte, in deren verticalem Theil ein quadratisches Loch von 20^{mm} Seite eingeschnitten ist. Die Steinpfeiler sind zum Schutz gegen äussere Einflüsse von ungefähr 1 Faden (2^m) ins Geviert haltenden Holzhütten umgeben, welche auf der Seite gegen den magnetischen Pavillon hin je in der Höhe der Messingplatte ein kleineres Fenster aus Spiegelglas, sowie unmittelbar über dem Stein ein grösseres Glasfenster im Dach besitzen. Das letztere dient Tags über zur Beleuchtung der Oeffnung in der Messingplatte, indem ein Spiegel hinter der letzteren das vom Himmel einfallende Licht auf diese wirft; Nachts wird eine Oellampe mit mattem Glas zur Beleuchtung hinter die Messingplatte gestellt. Beide Mirenhäuschen sind übrigens je gegen Süden von Wald umgeben und so gegen starke Erwärmungen durch die Sonne geschützt.

Obschon das erwähnte magnetische Universalinstrument auch zur Bestimmung der Inclination und Horizontal-Intensität benutzt werden kann, so werden diese Elemente doch für gewöhnlich im heizbaren Hauptsaal bestimmt. Die Inclinationsmessungen geschehen mit einem gewöhnlichen Inclinatorium von Dover in London, das schon in St. Petersburg seit zwei Jahren dazu benutzt wurde; es hat seinen festen Standort auf einem Granitpfeiler im südlichen Kreuzarm des Saales, welcher Pfeiler ebenso wie alle andern auf einem besonderen, durch den Mosaikfussboden des Saals heraufgehenden Fundamente

ruht. Auf einem ähnlichen Pfeiler im westlichen Kreuzarm steht ein neuerer magnetischer Theodolith von Brauer, der vor der Hand zu den Bestimmungen der Horizontal-Intensität durch die übliche Combination von Schwingungs- und Ablenkungsbeobachtungen dient.

Obschon durch diese räumliche Trennung der Apparate zur absoluten Bestimmung der drei Elemente des Erdmagnetismus, sowie durch ihre bleibende feste Aufstellung gewiss bereits ein Fortschritt in der Sicherheit diesser Messungen erzielt worden ist, so können dieselben doch noch nicht als absolut richtige betrachtet werden, indem beim Inclinatorium die Individualität des Instruments, insbesondere der Nadeln, eine Rolle spielen, also Zweifel über die absolute Richtigkeit der Resultate übrig lassen kann und sodann beim Universalinstrument und magnetischen Theodolith ein mit den gewöhnlichen Mitteln nicht nachweisbarer kleiner Eisengehalt von Messingtheilen, die dem Magnet nahe kommen, merkliche, wenn auch kleine Fehler in den damit gewonnenen absoluten Werthen der Declination und Horizontal-Intensität zur Folge haben kann. Die constanten individuellen Fehler dieser Instrumente werden durch Vergleich mit den Resultaten folgender Instrumente bestimmt werden, welche ihrer Einrichtung nach keine solchen zeigen können.

Unter der Laterne in der Mitte des Saales, nahezu 1^m excentrisch gegen Norden hin ist auf einer runden Granitsäule ein Passagen-Instrument von Ertel & Sohn in München mit grossem Horizontalkreis aufgestellt, dessen vier Nonien je 5″ ganz sicher ablesen lassen. Der untere Theil dieses sehr stabil gebauten Instrumentes ist eisenfrei; in die Lager desselben wird für magnetische Beobachtungen ein ebenfalls eisenfreies gerades Fernrohr, für die astronomischen dagegen ein gebrochenes Fernrohr mit Stahlachsen und verticalem Einstellkreise gelegt. Die letzteren, die astronomischen Beobachtungen nämlich, beschränken sich auf die Bestimmung des Azimuts der nördlichen Mire, welche von dieser Stelle aus ebenfalls durch mit Stöpseln verschliessbare Oeffnungen in den beiden Wänden des Pavillons sichtbar ist. Zur Azimutbestimmung ist in der Decke des Saales in einer zu der Erdachse parallelen Geraden durch die Fernrohrachse eine weite Holzröhre eingesetzt, die über das Dach hinausragt, beiderseits durch Klappen verschlossen werden kann und die Beobachtung des Polarsterns in seiner ganzen Bahn um den Pol ge-

stattet. Selbstverständlich können diese Beobachtungen nur in der besseren Jahreszeit ausgeführt werden, wenn man, was für die übrigen Instrumente wünschenswerth ist, die Abkühlung des Saales auf die Umgebungstemperatur während des Winters vermeiden will. Dasselbe gilt von der Einstellung des ungebrochenen Fernrohrs auf die Mire behufs Bestimmung der absoluten Declination, da auch da das Bild der letzteren bei erheblichen Temperaturunterschieden im Zimmer und im Freien durch die entstehenden Luftströmungen in den Oeffnungen sehr unruhig wird. Die Einstellung dagegen des Fernrohrs auf den Declinationsmagneten im nördlichen Kreuzarm des Saales kann zu jeder Zeit erfolgen. Derselbe, ein hohler Stahlcylinder von 150^{mm} Länge mit eingeschlossenem Collimator, ist an einem Coconfaden aufgehängt, dessen oberer Halter mit Torsionskopf 3^{m} über dem Zimmerboden auf zwei starken Holzlatten ruht, die selbst von zwei seitlichen Säulen aus Stuck auf Granitpfeilern getragen werden. Der Magnet ist zur Abhaltung von Luftströmungen durch ein Kästchen von Holz und Glas umschlossen, das auf einer Stucksäule unter ihm ruht, und kann im Uebrigen in der üblichen Weise in seiner Fassung um 180^{0} umgedreht durch einen Torsionsstab ersetzt werden etc. Er ist also in keiner Weise in der nächsten Nachbarschaft störenden magnetischen Einflüssen ausgesetzt, und da auch in der weiteren Umgebung keine so grossen Eisen- und Stahlmassen vorkommen, dass sie eine merkliche Störung bewirken könnten, so sind die so gewonnenen Resultate wohl als wahre absolute Declinationswerthe zu betrachten.

Um analog in genügender Entfernung von verborgenen kleinen Eisenmassen auch die Horizontal-Intensität bestimmen zu können, wird zunächst durch Beobachtung mit dem Fernrohr die Schwingungsdauer desselben, zur Declinationsmessung benutzten Stahlmagneten bestimmt — die nothwendigen Zuthaten zur Ermittlung des Trägheitsmoments sind ebenfalls vorhanden —, darauf wird demselben von unten mikrometrisch ein im Centrum eines getheilten Kreises sitzender Stuhl genähert, der ihn fixirt und mittelst dessen er genau um 90^{0} nach der einen oder andern Seite gedreht, resp. also senkrecht zum magnetischen Meridian gestellt werden kann. In dieser Stellung lässt man ihn dann ablenkend auf einen in seiner Verlängerung seitlich an demselben Gerüst aufgehängten kleineren, mit Spiegel versehenen Magneten einwirken, dessen Ablenkung aus dem magnetischen Meridian vermittelst desselben Fernrohrs auf dem Ertel'schen Kreise und einer

darüber aufgestellten, in Millimeter getheilten Glasscale gemessen wird. Dieser kleine Magnet ist übrigens ebenfalls durch einen Torsionsstab zu ersetzen, mit einem Gehäuse aus Glas und Holz umgeben und mit einer besonderen Beruhigungsvorrichtung versehen. Die Entfernung der beiden Magnete wird an ihren Suspensionsfäden in der Nähe der oberen Enden derselben gemessen. Dort wird nämlich ein getheilter Messingstab in horizontaler Lage von vier zweckmässig seiner Länge nach vertheilten Rollen, die auch an den erwähnten Holzlatten befestigt sind, getragen und lässt sich an die Fäden bis zur Berührung mit der getheilten Fläche heranschieben, worauf man mit Mikrometer-Mikroskopen die Entfernung der Fäden von den nächsten Theilstrichen ganz genau messen kann. Zur Ausführung dieser Messung ist auf der hinteren Seite in passender Höhe ein von Wand zu Wand gehender Steg angebracht, zu dem man mit einer Treppe gelangt. Uebrigens hängen von dem Gerüst nicht bloss ein, sondern vier solcher, unten mit Spiegel und Torsionsstäben beschwerter Fäden in den Entfernungen von 32 und 42 Zoll beiderseits vom Declinationsmagnet beständig herab, so dass für vollständige Ablenkungsbeobachtungen nur der Reihe nach alle vier Torsionsstäbe durch den gleich schweren Magnet zu ersetzen sind. Die Glaskästchen dieser vier Ablenkungsapparate stehen auf eichenen Tischen, welche die seitlichen Säulen umgeben und nach aussen zwischen der Wand und Säule noch je einen Multiplicator tragen. Die Magnete dieser beiden Multiplicatoren sind mit Coconfäden an demselben Gerüst aufgehängt und mit Spiegeln versehen, deren Stellung ebenfalls mit Fernrohr und Scale auf dem Ertel'schen Kreise beobachtet werden. Von diesen Multiplicatoren gehört der eine zu einem älteren von Leyser in Leipzig angefertigten Inductions-Inclinatorium, der andere zu einem entsprechenden, vor Kurzem erst von Meyerstein in Göttingen construirten, etwas vollkommeneren Apparate. Diese zwei Inductorrollen mit ihren Gestellen sind am entgegengesetzten Saalende, also in möglichst grosser Entfernung von den Multiplicatoren, beiderseits vom Pfeiler des gewöhnlichen Inclinatoriums, ebenfalls auf besonderen Fundamenten aufgestellt. Sie werden dazu dienen, die absoluten Fehler der gewöhnlichen Inclinatorien von Zeit zu Zeit neu zu bestimmen.

Wie hier elektromagnetische Wirkungen zur sicheren absoluten Bestimmung der Inclination verwendet werden, so sollen dieselben ebenfalls zu einer einfacheren und vielleicht auch sichereren absoluten

Messung der Horizontal-Intensität nach den Vorschlägen von Neumann und W. Weber benutzt werden. Zu dem Ende ist auf einem Granitpfeiler im östlichen Kreuzarm eine Tangentenboussole mit Spiegelablesung und auf einem zweiten Pfeiler im westlichen Theil des Saales ein bifilar aufgehängtes Solenoid ebenfalls mit Spiegelablesung aufgestellt. Die zugehörigen Fernröhren mit Glasscalen stehen auch wieder auf Granitpfeilern in der Mitte des Saales unter der Laterne, von welcher her die Scalen wie beim Declinatorium ihre Beleuchtung empfangen. Die definitiven bezüglichen Apparate sind übrigens erst in Construction begriffen, so dass die vorhandenen, eine Tangentenboussole und ein Elektrodynamometer aus dem physikalischen Cabinet der Akademie, nur als provisorische für Vorstudien zu betrachten sind. Demgemäss trete ich hier auch nicht näher auf diesen Theil der Instrumente ein.

Aus demselben Grunde, d. h. weil die Instrumente noch nicht ganz vollendet und aufgestellt sind, erwähne ich ebenfalls nur ganz kurz, dass auf zwei anderen Granitpfeilern mehr gegen die Mitte des Saales hin Hilfsinstrumente zur Bestimmung der Temperaturcoëfficienten der Magnete werden zu stehen kommen. Das eine ist gewissermassen ein Bifilar-Magnetometer, welches durch ein umgebendes Wasserreservoir auf verschiedene Temperaturen gebracht werden kann, das andere eine Art magnetischer Theodolith, welcher zu Ablenkungsbeobachtungen nach der Weber'schen Methode dienen wird und ausserdem auch noch zu Versuchen über das Variations-Inclinatorium mit Eiseninduction benutzt werden soll. Beide Instrumente werden ebenfalls mit Spiegelablesung versehen sein.

Zu den Zeitbestimmungen in diesem Saal ist in der Mitte desselben nahe der Säule mit dem Ertel'schen Passageninstrument auf einem besonderen Sockel eine Pendeluhr aufgestellt, welche ebenso wie im unterirdischen Pavillon auf elektromagnetischem Wege in synchronem Gang mit der elektrischen Uhr des Hauptgebäudes erhalten wird. Zu dem Ende ist das Hauptgebäude mit dem hölzernen Pavillon und dieser mit dem unterirdischen durch ein unterirdisches Kabel verbunden, das sieben durch Guttapercha von einander isolirte Kupferdrähte enthält und durch eine Kupferbandhülle gegen äussere Einflüsse geschützt ist. Einer dieser Drähte dient also zur Leitung des Regulirungsstromes für die Uhren, drei andere vermitteln die elektrischen Glockensignale vom Hauptgebäude zu den beiden Pavillons, und von

diesen zurück, ein fünfter verbindet das Telephon im Hauptgebäude mit denen in den beiden Pavillons, ein sechster gestattet, vom hölzernen Pavillon aus auf dem Chronographen im Hauptgebäude Zeitmarken für genauere Messungen zu machen, und der siebente leitet zum hölzernen Pavillon den Strom, mittelst dessen von da im unterirdischen Pavillon die Signale für simultane Ablesungen an den Variationsinstrumenten zur Zeit der absoluten Messungen gegeben werden. Derselbe Strom wird auch noch im hölzernen Pavillon zur Beruhigung der Magnete mittelst eines Solenoids verwerthet. — Eine Vereinigung der nöthigen Taster für diese verschiedenen Signale und Zeichen befindet sich im hölzernen Pavillon sowohl in der Mitte des Hauptsaals zur Benutzung bei den Beobachtungspfeilern als auch im Meridianzimmer bei den dortigen Instrumenten.

Es bedarf schliesslich kaum noch der Erwähnung, dass alle Magnete der verschiedenen Instrumente im hölzernen Pavillon für gewöhnlich im Hauptgebäude deponirt sind und von dort nur nach Bedürfniss der absoluten Messungen am einen oder andern Instrument jeweilen herübergebracht werden, und dass die Constanten der Intensitätsapparate auf die Normalen für Längeneinheit und Gewicht der Centralanstalt bezogen sind.

Aus alle dem ist ersichtlich, dass nichts versäumt worden ist, um auch bei den magnetischen Messungen eine grössere Genauigkeit zu erzielen; insbesondere ist auch da und zwar sowohl bei den Variationsbeobachtungen als auch bei absoluten Messungen dafür gesorgt, dass durch Anwendung verschiedener Instrumente für dasselbe Beobachtungselement der allfällige individuelle Einfluss der ersteren besser erkannt und im Resultat eliminirt werden könne.

Sämmtliche Instrumente, sowohl die meteorologischen als magnetischen, sind unter meiner unmittelbaren Leitung aufgestellt und justirt worden. Bei der Einrichtung und Aufstellung haben mich die Herren Scheurer, Mechaniker des Central-Observatoriums, und Herr Döring, Mechaniker des Observatoriums in Pawlowsk, unterstützt; bei der Justirung und Constantenbestimmung sämmtlicher Apparate leistete Herr Mielberg als Verweser des Observatoriums seinen Beistand. Ich kann nicht unerwähnt lassen, dass die Herren Tschikalew als Architekt und Ssakulin als Bauunternehmer auch bei den für die Aufstellung der Instrumente nöthigen baulichen Einrichtungen uns mit Rath und That weit über ihre Pflicht hinaus in uneigennützigster Weise zu Hilfe gekommen sind.

Mit den geschilderten Instrumenten und Einrichtungen ist zunächst bloss für die normalen Beobachtungen solcher meteorologischer und erdmagnetischer Elemente gesorgt, für welche bereits sichere Beobachtungsmethoden vorliegen und wo also eine viele Jahre in constanter Weise fortgesetzte Serie von Aufzeichnungen bestimmt werthvolle Daten für die Wissenschaft zu geben versprechen. Sowie seien es eigene, seien es Untersuchungen Anderer entsprechende Methoden für die continuirliche Messung anderer Elemente wie z. B. Luftelektricität, Erdströme, thermische, optische und chemische Strahlung von Sonne und Himmel etc. ergeben haben werden, sollen auch diese in den Kreis der normalen Beobachtungen eintreten. Es wird dies später um so eher möglich sein, als dann neue Erfahrungen die auf die ersteren zu verwendende Arbeit durch Vereinfachung vermindert haben werden.

Coordinaten des Observatoriums in Pawlowsk.

Die Coordinaten des Observatoriums haben bis dahin, da die Einrichtung desselben alle Kräfte in Anspruch nahm, mehr nur nebenbei bestimmt werden können. Spätere genauere Bestimmungen werden also die nachstehenden, vorerst erhaltenen Werthe noch um geringe Grössen modificiren.

Geographische Breite: $59^0\,41'\,13''$ nördlich
Geographische Länge: $30^0\,29'\,0'' = 2^h\,1^m\,56^s$ östl. v. Greenw.
Höhe des Barometers über Meer: 37,6 Meter.

Die Breite ist mit Hilfe eines Ertel'schen Höhenkreises, dessen vier Verniere noch 5″ mit Sicherheit abzulesen gestatten und der im Meridianzimmer des hölzernen Pavillons unter dem Durchschnitt aufgestellt war, durch Beobachtung von λ Ursae minoris an mehreren Tagen ermittelt worden. Die Sicherheit des Resultates beträgt indessen wegen ungenügender Stabilität des Instruments bloss $\pm$ 5″.

Die Länge habe ich bloss durch eine einzige Chronometerübertragung von St. Petersburg nach Pawlowsk am 1. Januar 1878 ermittelt. Die Sicherheit des Resultats beträgt daher nur $\pm$ 1^s.

Die Höhe endlich ist bloss barometrisch bestimmt worden, und zwar habe ich dieselbe aus den folgenden Daten der Monatsmittel des Barometerstandes, der Temperatur und der absoluten Feuchtigkeit für Pawlowsk und St. Petersburg in den Monaten August bis December

1877 nach den Rühlmann'schen Formeln unter der Annahme berechnet, dass das Barometergefäss in St. Petersburg sich 4,5^{m} über dem Meeresniveau befinde.

	August		September	
	St. Petersburg	Pawlowsk	St. Petersburg	Pawlowsk
Barometer	757,19^{mm}	754,13^{mm}	753,51^{mm}	750,35^{mm}
Temperatur	14,6^{0}	13,4^{0}	7,7^{0}	6,7^{0}
Abs. Feucht.	9,5^{mm}	9,4^{mm}	6,5^{mm}	6,4^{mm}

	October		November	
	St. Petersburg	Pawlowsk	St. Petersburg	Pawlowsk
Barometer	758,46^{mm}	755,51^{mm}	757,29^{mm}	754,31^{mm}
Temperatur	4,8^{0}	3,9^{0}	4,2^{0}	3,4^{0}
Abs. Feucht.	5,6^{mm}	5,6^{mm}	5,4^{mm}	5,5^{mm}

	December	
	St. Petersburg	Pawlowsk
Barometer	766,84^{mm}	763,61^{mm}
Temperatur	— 4,5^{0}	— 5,0^{0}
Abs. Feucht.	3,1^{mm}	3,0^{mm}

Hieraus folgt für die Höhe des Pawlowsker Barometers über Meer:

August	38,7^{m}
September	39,1
October	36,2
November	36,5
December	37,7
Mittel	37,6^{m} $\pm$ 1,0^{m}.

Da die Correction des Pawlowsker Beobachtungsbarometers einmal durch directe Vergleichung im Central-Observatorium in St. Petersburg und sodann noch durch indirecte vermittelst eines Reisebarometers mit einer Genauigkeit von mindestens $\pm$ 0,04^{mm} auf das St. Petersburger Beobachtungsbarometer bezogen ist und die fortgesetzte Vergleichung beider Barometer in Pawlowsk einen Beweis ihrer Constanz ergeben hat, so sind die auffallend grossen Schwankungen der barometrisch bestimmten Höhendifferenz beider Orte nur als ein neuer Beweis dafür zu betrachten, dass die Unsicherheit barometrischer Höhenmessungen nicht sowohl von zu geringer Genauigkeit der Instrumente, resp. der Beobachtungsdaten, als vielmehr von der Veränderlichkeit im Zustand der Atmosphäre bedingt wird.

Theorie der (normalen und anomalen) Dispersion.

Von

E. Lommel.

(Aus den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

In einer früheren Abhandlung[1]) habe ich eine Theorie der Absorption und Fluorescenz entwickelt, welche sich auf den einfachen Gedanken gründet, dass die Körpertheilchen durch einen periodischen Impuls, welchen sie von der in dem umgebenden Mittel fortgepflanzten Welle empfangen, in Bewegung gesetzt werden. Durch weitere Ausführung dieses Gedankens gelingt es, die Modificationen zu bestimmen, welche die Welle durch die Rückwirkung der Körpertheilchen erfährt, und hiemit Absorption, Fluorescenz, Brechung, normale und anomale Dispersion, Oberflächenfarbe und Dichroismus[2]) in ihrem Zusammenhange durch eine einheitliche Theorie zu umfassen.

In einem ebenen rechtwinkligen Coordinatensystem seien x_0 und y die Coordinaten der gemeinsamen Gleichgewichtslage eines Körpertheilchens von der Masse m und der Aethermasse μ, welche mit demselben in Wechselwirkung tritt. Die Schwingungen der Körper- und Aethertheilchen denken wir uns parallel der x-Achse, die Fortpflanzungsrichtung der ebenen Aetherwelle parallel der y-Achse.

Wir machen nun die Annahme, dass die gemeinsame Gleichgewichtslage, nach welcher Körper- und Aethertheilchen durch die elastischen Kräfte hingezogen werden, — man kann sich als Gleichgewichtslage etwa den gemeinschaftlichen Schwerpunkt der Massen m und μ vorstellen — ihren Ort im Raume unverrückt bewahre[3]). Bezeichnen wir alsdann mit x und ξ die Abscissen der Massen

1) Repertorium Bd. 15 S. 15.

2) Die Theorie des Dichroismus werde ich in einer späteren Abhandlung mittheilen.

3) Im Gegensatz zu Sellmeier, welcher annimmt, dass sich der Gleichgewichtsort der Körpertheilchen selbst in Schwingungen befinde (Pogg. Ann. Bd. 145 S. 399).

m und μ (resp. ihrer Schwerpunkte), so sind $x - x_0$ und $x_0 - \xi$ ihre respectiven Verschiebungen aus der Gleichgewichtslage zur Zeit t.

Ertheilt nun das bewegte Mittel dem Körpertheilchen den periodischen Impuls

$$-mf \sin(qt - \varphi)^{1)},$$

so muss nach dem Principe der Gleichheit von Action und Reaction auf die mit der Körpermasse m in Wechselwirkung befindliche Aethermasse μ die gleiche Kraft in entgegengesetzter Richtung einwirken. Wir erhalten daher neben der in der vorhergehenden Abhandlung bereits behandelten Bewegungsgleichung des Körpertheilchens

$$m \frac{d^2(x - x_0)}{dt^2} = -2km \frac{d(x - x_0)}{dt} - mp^2(x - x_0) - mf \sin(qt - \varphi) \quad (1$$

für die Bewegung des Aethers die Gleichung

$$\mu \frac{d^2(x_0 - \xi)}{dt^2} = \omega^2 \cdot \frac{d^2(x_0 - \xi)}{dy^2} + mf \sin(qt - \varphi). \quad (2$$

Ueber die Art der Wechselwirkung machen wir die Annahme, dass sie nach dem von Newton aufgestellten Reibungsgesetz[2]) erfolge, nämlich dem Unterschiede der Geschwindigkeiten der Körper- und Aethermasse proportional sei. Wir erhalten demnach, wenn wir mit 2ν den Reibungsindex bezeichnen, zur Bestimmung von ξ die Gleichung

$$2m\nu\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{dx}{dt}\right) = mf \sin(qt - \varphi), \quad (3$$

deren Integration

$$\xi = x - \frac{f}{2\nu q}\cos(qt - \varphi) - C$$

1) In der früheren Abhandlung „Theorie der Absorption und Fluorescenz", wo nur die Bewegung eines einzigen Körpertheilchens zu betrachten war, wurde die auf dasselbe wirkende periodische Kraft durch $-mf \sin qt$ ausgedrückt; hier, wo es sich um die Fortpflanzung der Bewegung durch eine Reihe von Theilchen handelt, muss begreiflicherweise unter dem Sinuszeichen noch der Phasenunterschied φ, welcher als Function von y zu betrachten ist, hinzugefügt werden.

2) O. E. Meyer hat in seinem „Versuch einer Erklärung der anomalen Farbenzerstreuung" (Pogg. Ann. Bd. 145 S. 80) eine ähnliche Hypothese zu Grunde gelegt, gelangte jedoch, da in seinen Gleichungen auf die Beweguug der Körpertheilchen nicht geeignete Rücksicht genommen ist, zu Formeln, welche mit der Erfahrung nicht im Einklange stehen.



ergibt. Der Gleichung (1) aber wird, wie in der früheren Abhandlung gezeigt wurde, durch den Ausdruck

$$x - x_0 = -\frac{f \sin \alpha}{2kq} \sin(qt - \varphi - \alpha)$$

genügt, wenn der Winkel α durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2kq}{p^2 - q^2} \tag{4}$$

bestimmt wird, worin q die Schwingungszahl der einfallenden Welle, p aber die Schwingungszahl[1]) des Körpertheilchens angibt, welche demselben eigen wäre, wenn es ohne Widerstand ($k = 0$) schwingen könnte.

Wir erhalten demnach

$$x_0 - \xi = \frac{f \sin \alpha}{2kq} \sin(qt - \varphi - \alpha) + \frac{f}{2\nu q} \cos(qt - \varphi) + C. \tag{5}$$

Geschieht die Fortpflanzung in ebenen zur y-Achse normalen Wellen, so haben wir

$$f = f' e^{-Ky} \text{ und } \varphi = \frac{q}{c} y$$

zu setzen, wo K den Absorptionscoëfficienten, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen vorstellt. Substituiren wir mit Rücksicht auf diese Werthe von f und φ und unter der Annahme, dass die willkürliche Constante C von y unabhängig sei, den Ausdruck (5) in die Gleichung (2), so zerfällt sie in die beiden Gleichungen

$$\frac{K^2}{q^2} - 2\frac{K}{q} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{k - \nu \sin^2 \alpha}{\nu \sin \alpha \cos \alpha} - \frac{1}{c^2} + \frac{\mu}{\omega^2}\left(1 + \frac{2km}{\mu q \sin \alpha \cos \alpha}\right) = 0 \tag{6}$$

$$\frac{K^2}{q^2} + 2\frac{K}{q} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{\nu \sin \alpha \cos \alpha}{k - \nu \sin^2 \alpha} - \frac{1}{c^2} + \frac{\mu}{\omega^2} = 0, \tag{7}$$

aus welchen die zwei Unbekannten $\frac{K}{q}$ und $\frac{1}{c}$ leicht zu bestimmen sind.

Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{\omega}{\sqrt{\mu}}$ im freien Aether mit v, so liefert die Auflösung dieser beiden Gleichungen

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{2v^2}\left(\sqrt{P^2 + Q^2} + P\right), \tag{8}$$

1) Die Schwingungszahlen sind eigentlich $\frac{q}{2\pi}$ und $\frac{p}{2\pi}$; wir erlauben uns aber, wo es auf die absoluten Werthe nicht ankommt, der Kürze wegen q und p selbst als Schwingungszahlen zu betrachten.

$$\frac{K^2}{q^2} = \frac{1}{2v^2}(\sqrt{P^2 + Q^2} - P), \tag{9}$$

worin P und Q die folgende Bedeutung haben:

$$P = 1 + \frac{2km\nu}{\mu q} \cdot \frac{\nu \sin\alpha \cos\alpha}{k^2 \cos^2\alpha + (k-\nu)^2 \sin^2\alpha}. \tag{10}$$

$$Q = \frac{2km\nu}{\mu q} \cdot \frac{k - \nu \sin^2\alpha}{k^2 \cos^2\alpha + (k-\nu)^2 \sin^2\alpha} \tag{11}$$

Führen wir in diese Ausdrücke mit Hilfe der Gleichung (4) statt des Winkels α die Schwingungszahlen p und q ein, so nehmen sie die folgende Gestalt an:

$$P = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{p^2 - q^2}{(p^2 - q^2)^2 + 4(k-\nu)^2 q^2} \tag{10a}$$

$$Q = \frac{2\nu m}{\mu q} \cdot \frac{(p^2 - q^2)^2 + 4k(k-\nu) q^2}{(p^2 - q^2)^2 + 4(k-\nu)^2 q^2}. \tag{11a}$$

Die Grösse p repräsentirt, wie ich in der früheren Abhandlung gezeigt habe, diejenige Schwingungszahl, für welche die „molekulare Absorptionsgrösse“

$$\frac{\sin^2\alpha}{4k^2}$$

oder

$$\frac{q^2}{(p^2 - q^2)^2 + 4k^2 q^2}$$

ihr Maximum erreicht, und entspricht im Spectrum derjenigen Stelle, welche der Absorptionsstreif in sehr dünner Schicht oder bei grosser Verdünnung der absorbirenden Substanz einnimmt. Bezeichnen wir mit λ_0 die zugehörige Wellenlänge und mit λ die Wellenlänge, welche der Schwingungszahl q der fortgepflanzten Welle zukommt, so ist

$$p = \frac{2\pi v}{\lambda_0} \text{ und } q = \frac{2\pi v}{\lambda}.$$

Berücksichtigen wir ferner, dass der Brechungscoëfficient n aus dem leeren Raume in den betrachteten Körper durch das Verhältniss $\frac{v}{c}$ dargestellt wird, so erhalten wir aus Gleichung (8) die folgende Dispersionsformel:

$$\left.\begin{aligned}
n^2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{P^2+Q^2}+P\right)\\
P &= 1+\frac{m}{\mu}(\varkappa-\varepsilon)^2\cdot\frac{1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2+\varepsilon^2\cdot\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}\\
Q &= \frac{m}{\mu}(\varkappa-\varepsilon)\cdot\frac{\lambda}{\lambda_0}\cdot\frac{\left(1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2+\varkappa\varepsilon\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2+\varepsilon^2\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}\\
\varkappa &= \frac{k\lambda_0}{\pi v},\qquad \varepsilon=\frac{(k-\nu)\lambda_0}{\pi v}.
\end{aligned}\right\}\qquad (12$$

Diese Formel gilt für jeden Körper, welcher nur aus Molekülen einer und derselben Art besteht und nur einen einzigen durch directe Absorption entstandenen Absorptionsstreifen besitzt. Sie enthält vier Constante, nämlich λ_0, $\frac{m}{\mu}$, $\varkappa$ und ε, und umfasst sowohl die normale als die anomale Dispersion.

Um den Gang der Werthe von n^2 bei wachsender Schwingungszahl zu verfolgen, setzen wir z statt $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ und $\frac{q}{p}$ und betrachten n^2 als Ordinate einer Curve, dessen Abscissen z den Schwingungszahlen proportional sind.

Betrachten wir zuerst die Function

$$P=1+\frac{m}{\mu}(\varkappa\quad\varepsilon)^2\cdot\frac{1-z^2}{(1-z^2)^2+\varepsilon^2 z^2}$$

für sich, so erkennen wir, dass dieselbe grösser als 1 ist, solange z kleiner als 1 (oder $\lambda > \lambda_0$, $q < p$) bleibt, für $z = 1$ (oder $\lambda = \lambda_0$, $q = p$) der Einheit gleich wird, für alle Werthe von z dagegen, die grösser als 1 sind, kleiner als 1 bleibt. Von dem Minimalwerth

$$1+\frac{m}{\mu}(\varkappa-\varepsilon)^2,$$

welchen sie bei $z = 0$ besitzt, erhebt sie sich bis zu einem Maximum

$$1+\frac{m}{\mu}\cdot\frac{(\varkappa-\varepsilon)^2}{\varepsilon(2-\varepsilon)},$$

welches sie bei $z = \sqrt{1-\varepsilon}$ erreicht, fällt von hier wieder ab, und

zwar um so steiler, je kleiner ε ist, durchsinkt bei $z = 1$ das Niveau 1, fällt weiter bis zu dem Minimum

$$1 - \frac{m}{\mu} \cdot \frac{(\varkappa - \varepsilon)^2}{\varepsilon(2 + \varepsilon)},$$

welches bei $z = \sqrt{1 + \varepsilon}$ stattfindet, und erhebt sich von hier wieder, indem sie sich der Geraden, welche in der Höhe 1 parallel zur Abscissenachse gezogen ist (dem Niveau 1), von unten her asymtotisch nähert.

Dieses würde auch der Verlauf von n^2 sein, wenn Q gegen P vernachlässigt werden dürfte. Durch Hinzutreten des Gliedes Q wird der Gang der Curve beträchtlich für kleine, weniger für grosse Werthe der Schwingungszahl modificirt, und zwar derart, dass jetzt auch die Ordinatenachse als Asymptote der Curve auftritt, indem die Curve zuerst aus dem Unendlichen bis zu einem zwischen $z = 0$ und $z = 1$ gelegenen Minimum (dessen Werth grösser als 1 ist) herabsinkt, von da bis zu dem ersten vor $z = 1$ gelegenen Maximum ansteigt, dann steil unter das Niveau 1 herabfällt, welches sie jedoch erst bei einem etwas hinter 1 gelegenen Werthe von z durchsinkt, alsbald ein zweites Minimum erreicht, welches kleiner als 1 ist, dann wieder emporsteigt und, nachdem sie das Niveau 1 ein zweites Mal überschritten hat, sich über dasselbe zu einem zweiten Maximum erhebt, dann wieder herabsinkt und sich von oben her asymptotisch dem Niveau 1 nähert. Die Curve zeigt, wenn ε nicht etwa Null ist (was in Wirklichkeit wohl niemals genau der Fall sein wird) ausser bei $z = 0$ nirgends eine Unterbrechung der Stetigkeit, und der Brechungscoëfficient n kann, da n^2 stets positiv bleibt, niemals imaginär werden.

Aus diesem Verlaufe der Curve n^2 erklären sich alle Erscheinungen der Brechung und Zurückwerfung bei Körpern von der vorausgesetzten molekularen Beschaffenheit, d. i. bei solchen, welche nur aus Molekülen von einerlei Art mit einem einzigen durch directe Absorption entstandenen Absorptionsstreifen bestehen. Das Verhalten von Lösungen und Mischungen wird weiter unten zur Sprache kommen.

Wir theilen die Curve in drei Abtheilungen, deren erste vom ersten Minimum bis zum ersten Maximum fortwährend steigt; die zweite Abtheilung umfasst das Absorptionsgebiet, in welchem die Curve vom ersten Maximum bis zum zweiten Minimum steil herabfällt; in der dritten Abtheilung steigt die Curve von ihrem tiefsten Punkte

eine Strecke weit aufwärts, um sich hinter dem zweiten Maximum wieder zum Niveau 1 herabzusenken. Liegt der Absorptionsstreif (das Maximum der molekularen Absorption, $z = 1$) innerhalb des sichtbaren Spectrums, so nimmt der Brechungscoëfficient vor dem Absorptionsstreifen mit wachsender Schwingungszahl bis zu einem Maximum zu, fällt innerhalb des Absorptionsgebietes rasch zu einem Minimum herab, um dann anfangs rascher, später langsamer wieder anzusteigen. Der betreffende Körper zeigt demnach anomale Dispersion. Hinter dem Absorptionsstreifen ist der Brechungscoëfficient auf eine gewisse Strecke kleiner als 1; die Strahlen, welche dieser Strecke angehören, pflanzen sich also innerhalb der Substanz mit grösserer Geschwindigkeit fort als im leeren Raume und in der Luft, und erleiden daher, aus der Luft auf die Oberfläche der Substanz fallend, jeder von einem gewissen Grenzwinkel ab, totale Reflexion. Diese total reflectirten Strahlen bilden die Oberflächenfarbe, deren eigenthümliche Polarisationsverhältnisse hiedurch ebenfalls ihre Erklärung finden. Der Zusammenhang zwischen directer Absorption, anomaler Dispersion, Oberflächenfarbe der Substanz im festen Zustande und Fluorescenz erster Art, auf welchen ich früher[1]) auf Grund experimenteller Ergebnisse hingewiesen habe, ist hiemit auch theoretisch klargelegt.

Die Metalle betrachte ich als Körper, für welche das sichtbare Spectrum in die dritte Abtheilung unserer Curve, der massgebende Absorptionsstreif sonach in das ultrarothe Gebiet des Spectrums zu liegen kommt. Bei manchen derselben dürfte vielleicht das ganze sichtbare Spectrum demjenigen Theile der Curve angehören, welcher unter dem Niveau 1 bleibt. In einem solchen Körper würde sich das Licht schneller fortpflanzen als in der Luft, und die sogenannte Metallreflexion wäre ebenfalls als eine Art totaler Reflexion anzusehen. Hiemit stimmt überein, dass Quincke[2]) die Brechungscoëfficienten einiger Metalle (Silber und Gold) in der That kleiner als 1 gefunden hat.

Bei den Körpern endlich, welche die gewöhnliche Dispersion zeigen, fällt das ganze sichtbare Spectrum entweder in die erste

---

1) Tageblatt der Münchener Naturforscherversammlung 1877.

2) Pogg. Ann. Bd. 119 S. 379; Bd. 120 S. 602.

Abtheilung unserer Curve (Absorptionsstreif im Ultraviolett), oder in diejenige Partie der dritten Abtheilung, welche über dem Niveau 1 emporsteigt (Absorptionsstreif im Ultraroth), oder — und dies ist der allgemeinere Fall, der wohl am häufigsten eintritt — es gehört gewissermassen beiden Abtheilungen zugleich an (Absorptionsstreifen sowohl im Ultraviolett als im Ultraroth). Man darf nämlich nicht vergessen, dass die Formel (12) unter der Voraussetzung, dass nur ein einziger Absorptionsstreif vorhanden sei, abgeleitet ist; sind mehrere solche vorhanden, so werden in der Curve n^2 mehrere Absorptionsgebiete je mit einem absteigenden Curvenstück und zwischen je zwei benachbarten Absorptionsgebieten ein aufsteigendes Curvenstück vorhanden sein, dessen über dem Niveau 1 gelegener Theil der normalen Dispersion entspricht. Dieser Umstand, dass mehrere Absorptionsstreifen vorhanden sein können, muss namentlich auch dann berücksichtigt werden, wenn es sich darum handelt, die Formel (12) mit den Ergebnissen der Beobachtung numerisch zu vergleichen. Dass sie schon in ihrer gegenwärtigen Gestalt hinsichtlich der gewöhnlichen Dispersion mit der Erfahrung im Einklange ist, ergibt sich einerseits daraus, dass sie sich in die Reihe

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \cdots + \beta\lambda^2 + \cdots \tag{13}$$

entwickeln lässt, deren Coëfficienten aus den vier Constanten der Formel (12) zusammengesetzt sind und welche bekanntlich mit den Beobachtungsresultaten nahe übereinstimmt, andererseits aus der directen Vergleichung, welche wir nun unter Zuhilfenahme vereinfachender Voraussetzungen vornehmen wollen.

Setzen wir nämlich voraus, dass Q^2 gegen P^2 vernachlässigt werden könne und ε verschwindend klein sei, so ergibt sich aus (12) die einfache Dispersionsformel

$$n^2 - 1 = \frac{a}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} \tag{14}$$

mit den zwei Constanten a und λ_0, welche sich den Beobachtungen genauer anschliesst als die zweiconstantige Cauchy'sche Formel. Als Beispiel wählen wir die Berechnung der von Mascart beobachteten Brechungsverhältnisse des Flintglases von Rosette, indem wir unter Zugrundelegung der von Angström bestimmten Wellenlängen die

Constanten a und λ_0 aus den Brechungscoëfficienten für die Fraunhofer'schen Linien B und G ermitteln. Wir finden

$$a = 1{,}543175 \text{ und } \lambda_0 = 0{,}00013052\,^{\text{mm}}.$$

In der folgenden kleinen Tabelle sind die beobachteten mit den nach Formel (14) berechneten Werthen zusammengestellt; die vierte Columne enthält die zugehörigen Differenzen, die fünfte die Differenzen, welche sich bei der Berechnung nach Cauchy's Formel ergeben[1]).

Flintglas von Rosette.

Spectrallinien	n beobachtet	n berechnet	Differenzen	Differenzen nach Cauchy's Formel
B	1,61268	1,612680	0	0
C	1,61443	1,614447	+ 1,7	+ 9,2
D	1,61929	1,619390	+ 10,0	+ 36,1
E	1,62569	1,625903	+ 21,3	+ 54,4
F	1,63148	1,631727	+ 24,7	+ 52,6
G	1,64269	1.642690	0	0
H	1,65268	1,652677	— 0,3	— 92,0

Wir haben wiederholt betont, dass die obigen Formeln zunächst nur für solche Körper gelten, welche aus einerlei Art von Molekülen bestehen (also z. B. für das Cyanin in festem Zustande). Wir gehen nun zu dem Verhalten von Lösungen und Mischungen über, indem wir annehmen, dass die Aethermasse μ mit zwei verschiedenartigen Körpermassen m_1' und m_2', welchen die Schwingungszahlen p_1 und p_2 zugehören, in Wechselwirkung trete. Statt der Gleichung (1) erhalten wir jetzt zwei Gleichungen derselben Form, und in der Gleichung (2) für die Bewegung des Aethers erscheint jetzt zur Rechten die Summe der beiden auf m_1' und m_2' ausgeübten Impulse. In derselben Weise behandelt wie oben liefern diese Gleichungen[2]) für das Brechungsverhältniss n und den Absorptionscoëfficienten K der Lösung oder Mischung Ausdrücke von derselben Form wie (8) und (9), nämlich

$$n^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{P^2 + Q^2} + P\right)$$

$$K^2 = \frac{q^2}{2v^2}\left(\sqrt{P^2 + Q^2} - P\right).$$

1) Die Zahlen der fünften Columne sind Wüllner's Lehrbuch der Experimentalphysik 3. Aufl. Bd. 2 S. 140 entnommen.

2) Eine ausführlichere Darlegung des Verhaltens von Lösungen und Mischungen behalte ich für eine spätere Mittheilung vor.

Darin haben aber P und Q jetzt die folgende Bedeutung:

$$\left.\begin{aligned} P &= P_1' + P_2' - 1 \\ Q &= Q_1' + Q_2', \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

wo P_1', P_2' und Q_1', Q_2' genau die nämliche Form besitzen wie P und Q in (12), nur dass an die Stelle von m, $\varkappa$, ε, resp. m_1', $\varkappa_1'$, ε_1' und m_2', $\varkappa_2'$, ε_2' treten und statt der Wellenlänge λ_0 resp. die Schwingungszahlen p_1 und p_2 der entsprechenden Wellenlängen zu setzen sind. Wir haben also

$$P_1' = 1 + \frac{m_1'}{\mu}(\varkappa_1' - \varepsilon_1')^2 R_1'$$

$$P_2' = 1 + \frac{m_2'}{\mu}(\varkappa_2' - \varepsilon_2')^2 R_2',$$

wenn mit R der von der Wellenlänge abhängige Factor bezeichnet wird. Die Grössen m_1' und m_2' sind den Gewichtsverhältnissen, mit welchen jeder der beiden Stoffe in die Mischung eingeht, oder dem Concentrationsgrade einer jeden Substanz proportional. Lassen wir z. B. die Menge der zweiten Substanz immer mehr abnehmen und endlich verschwinden, so wird $m_2' = 0$, $P_2' = 1$, während m_1', $\varkappa_1'$, ε_1', R_1' und sonach auch P_1' diejenigen Werthe m_1, $\varkappa_1$, ε_1, R_1 und P_1 erreichen, welche der reinen ersten Substanz entsprechen.

Betrachten wir nun die Lösung eines Stoffes, welcher für sich allein anomale Dispersion zeigt, in einem normal dispergirenden Lösungsmittel, so ist für die Lösung

$$P = 1 + \frac{m_1'}{\mu}(\varkappa_1' - \varepsilon_1')^2 R_1' + \frac{m_2'}{\mu}(\varkappa_2' - \varepsilon_2')^2 R_2'.$$

Hierin ist R_1' stets positiv, R_2' dagegen wird hinter dem Absorptionsstreifen negativ. Der Werth von P wird jedoch daselbst nur dann unter die Einheit herabsinken, wenn m_2' so gross ist, dass das mit R_2' behaftete Glied das mit R_1' behaftete an absolutem Werthe übertrifft.

Der Brechungscoëfficient n der Lösung kann demnach nur bei starker Concentration kleiner als 1 werden. Lösungen von Substanzen, welche im festen Zustande mit Oberflächenfarben ausgestattet sind, zeigen daher bei gewöhnlichen Concentrationsgraden keine Oberflächenfarbe; nur stark concentrirte Lösungen sind einer solchen fähig, zeigen dieselbe aber erst bei grösseren Einfallswinkeln als die feste Substanz. Farbige

Gläser (Kupferoxydulglas, Kobaltglas u. s. w.) sind als wenig concentrirte Mischungen stark absorbirender Silicate mit farblosem Glasfluss zu betrachten und zeigen daher keine Oberflächenfarbe.

Dagegen zeigt die Lösung eines Stoffes, der innerhalb des sichtbaren Spectrums einen durch directe Absorption entstandenen dunkeln Streifen besitzt, stets anomale Dispersion, da die Curve P sich hinter dem Absorptionsstreifen eine Strecke weit unter die Curve P_1' herabsenkt.

Um unsere Theorie auch hinsichtlich der anomalen Dispersion mit der Erfahrung zu vergleichen, stehen überhaupt nur Beobachtungen an Lösungen zu Gebote, und da die Formeln vorläufig nur für solche Körper gelten, welche einen einzigen Absorptionsstreifen besitzen, so sind wiederum nur die von Kundt[1]) bei Cyaninlösungen gewonnenen Resultate zu unserem Zwecke verwendbar. Vor allem aber müssen wir bestrebt sein, der Formel (15) eine für bequeme Rechnung geeignete Gestalt zu geben.

Wenn die Concentration nur gering ist, so kann in dem Ausdruck für n^2 die Grösse Q^2 gegen P^2 vernachlässigt werden; nehmen wir ferner an, dass ε verschwindend klein sei, und setzen wir einstweilen z statt $\frac{\lambda_0}{\lambda}$, so erhalten wir

$$P_2' = 1 + \frac{\gamma}{1 - z^2};$$

nehmen wir ferner für das normal dispergirende Lösungsmittel von der Entwickelung (13) nur die beiden ersten Glieder, so ist

$$P_1' = \alpha + \beta z^2,$$

und demnach zufolge (15) für die Lösung selbst, wenn wieder $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ statt z gesetzt wird:

$$n^2 = \alpha + \beta \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} + \frac{\gamma}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}. \tag{16}$$

Darin bedeutet λ_0 die Wellenlänge, bei welcher das Maximum der molekularen Absorption stattfindet, oder bei welcher in sehr dünner Schicht oder in sehr verdünnter Lösung der Absorptionsstreif auftritt.

1) Pogg. Ann. Bd. 145 S. 73.

Die Constante λ_0 kann daher direct durch Beobachtung gefunden werden. Ich bestimmte dieselbe mit Hilfe eines Gitters für eine sehr verdünnte Cyaninlösung, welche sich in einem Glastroge vor dem Spalte des Spectrometers befand, indem ich auf die Mitte des nun ganz schwach und schattenartig erscheinenden Absorptionsbandes einstellte. Es ergab sich $\lambda_0 = 0{,}00059^{mm}$. Aus der Reihe der beobachteten Brechungscoëfficienten brauchen daher nur noch die drei Constanten α, β und γ berechnet zu werden. Die folgende Tabelle enthält, unter Zugrundelegung der Wellenlängen von Angström, die Resultate der Rechnung für die Cyaninlösung von 1,22 Procent; in der zweiten Columne stehen die von Kundt beobachteten, in der dritten die berechneten Brechungscoëfficienten, in der vierten die Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen. Zur Berechnung der Constanten α, β und γ wurden die Fraunhofer'schen Linien A, C und G benutzt.

Cyaninlösung 1,22 Procent.

$$\alpha = 1{,}844111,\ \log\beta = 8{,}43911780 - 10,\ \log\gamma = 7{,}4408223 - 10,$$
$$\lambda_0 = 0{,}00059^{mm}.$$

Spectrallinien	n beobachtet	n berechnet	Differenz
A	1,3666	1,36660	0
a	1,3678	1,36789	+ 0,9
B	1,3691	1,36928	+ 1,8
C	1,3714	1,37140	0
E	1,3666	1,36664	+ 0,4
b	1,3675	1,36762	+ 1,2
F	1,3713	1,37070	— 6,0
G	1,3757	1,37570	0
H	1,3793	1,37956	+ 2,6

Die Rechnung stimmt hienach mit der Beobachtung in sehr befriedigender Weise überein. Da die Formel (16) unter der Voraussetzung geringer Concentration abgeleitet ist, so werden wir, wenn wir sie auf eine stark concentrirte Lösung anwenden, eine eben so befriedigende Uebereinstimmung nicht erwarten dürfen. Gleichwohl stimmt die für Kundt's concentrirte Cyaninlösung durchgeführte Berechnung, wie die folgende Tabelle zeigt, noch sehr gut mit der Beobachtung, mit Ausnahme des Werthes für E, welcher zu klein

ausfällt, weil bei grösseren Werthen von γ die Näherungsformel (16) in dem unmittelbar hinter dem Absorptionsstreifen liegenden Gebiet nothwendig kleinere Zahlenwerthe liefert als die vollständige Formel (12). Der Theorie zufolge muss λ_0 für einen und denselben Stoff stets den nämlichen Werth behalten, während die (ebenfalls aus den Fraunhofer'schen Linien A, C und G berechneten) Constanten α, β und γ, als von der Concentration abhängig, andere Werthe besitzen wie vorhin.

Concentrirte Cyaninlösung.

$\alpha = 1,847195$, $\log\beta = 8,5057230 - 10$, $\log\gamma = 7,8829943 - 10$,
$\lambda_0 = 0,00059^{\text{mm}}$.

Spectrallinien	n beobachtet	n berechnet	Differenz
A	1,3732	1,37320	0
a	1,3756	1,37560	0,0
B	1,3781	1,37841	+ 3,1
C	1,3831	1,38310	0
E	1,3658	1,36282	− 29,8
F	1,3705	1,37050	0,0
G	1,3779	1.37790	0
H	1,3821	1,38292	+ 8,2

Wir wenden uns nun zur Betrachtung des Absorptionscoëfficienten K, welcher durch die Gleichung (9)

$$K^2 = \frac{q^2}{2v^2}(\sqrt{P^2 + Q^2} - P)$$

gegeben ist, in der die Grössen P und Q dieselbe Bedeutung haben wie in (12). Entwickeln wir, unter der Annahme, dass $Q^2 < P^2$ sei, die Wurzel nach dem binomischen Lehrsatz und setzen $\frac{2\pi v}{\lambda}$ statt q, so wird

$$K^2 = \frac{\pi^2}{\lambda^2}\cdot\frac{Q^2}{P}\left(1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{Q^2}{P^2} + \cdots\right),$$

oder, wenn $\frac{Q}{P}$ so klein ist, dass man seine zweite Potenz gegen die Einheit vernachlässigen kann:

$$K^2 = \frac{\pi^2}{\lambda^2}\cdot\frac{Q^2}{P}.$$

In dem Ausdrucke für Q (12) ist der Factor

$$\frac{(1-z^2)^2+\varkappa\varepsilon z^2}{(1-z^2)^2+\varepsilon^2 z^2}$$

von der Einheit jedenfalls nur wenig verschieden; setzen wir denselben $=1$, so wird

$$\frac{\pi^2}{\lambda^2}Q^2=\left(\frac{m}{\mu}\right)^2(\varkappa-\varepsilon)^2\cdot\frac{\pi^2}{\lambda_0^2}.$$

Andererseits können wir, wenn $\frac{m}{\mu}(\varkappa-\varepsilon)^2$ klein ist,

$$\frac{1}{P}=1-\frac{m}{\mu}(\varkappa-\varepsilon)^2\cdot\frac{1-z^2}{(1-z^2)^2+\varepsilon^2 z^2}$$

setzen, so dass wir für K^2 die Näherungsformel

$$K^2=\left(\frac{m}{\mu}\right)^2(\varkappa-\varepsilon)^2\cdot\frac{\pi^2}{\lambda_0^2}\left(1-\frac{m}{\mu}(\varkappa-\varepsilon)^2\cdot\frac{1-z^2}{(1-z^2)^2+\varepsilon^2 z^2}\right) \quad (17$$

erhalten, wo z statt $\frac{\lambda_0}{\lambda}$ steht. Der Gang der Werthe von K^2 ist demnach, unter den gemachten Voraussetzungen, aus dem oben bereits besprochenen Verlaufe der Function P unmittelbar zu entnehmen. Denken wir uns K^2 als Ordinate einer Curve, deren Abscissen z den Schwingungszahlen proportional sind, so sinkt diese Curve anfangs von dem bei $z=0$ stattfindenden Maximum bis zu einem etwas vor der Stelle der grössten molekularen Absorption ($z=1, \lambda=\lambda_0, q=p$) bei $z=\sqrt{1-\varepsilon}$ gelegenen Minimum, steigt von hier aus steil empor bis zu einem zweiten nahe hinter $z=1$, nämlich bei $z=\sqrt{1+\varepsilon}$, liegenden Maximum und sinkt von da wieder herab, indem sie sich dem Niveau

$$\left(\frac{m}{\mu}\right)^2(\varkappa-\varepsilon)^2\cdot\frac{\pi^2}{\lambda_0^2},$$

welches höher liegt als der bei $z=0$ vorhandene Gipfel der Curve, asymptotisch nähert.

Um die Vertheilung der Lichtstärke innerhalb des Absorptionsspectrums kennen zu lernen, berechnen wir die Intensität I des durch

eine absorbirende Schicht von der Dicke y durchgegangenen Lichtes. Dieselbe findet ihren Ausdruck durch die Gleichung

$$I = \frac{1}{2}\mu \cdot \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 dt.$$

Nach Gleichung (5) haben wir

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{f\sin\alpha}{2k}\cos(qt-\varphi-\alpha) + \frac{f}{2\nu}\sin(qt-\varphi)$$

und

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \frac{f^2}{8\nu^2}\left(1 - \frac{k^2-(k-\nu)^2}{k^2}\sin^2\alpha\right) + \frac{f^2\sin^2\alpha}{8k^2}\cos(2qt-2\varphi-2\alpha)$$
$$-\frac{f^2\sin\alpha}{4k\nu}\sin(2qt-2\varphi-\alpha) - \frac{f^2}{8\nu^2}\cos(2qt-2\varphi).$$

Integriren wir diesen Ausdruck zwischen den angegebenen Grenzen, indem wir T gleich der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{q}$ nehmen, so ergibt sich

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{d\xi}{dt}\right) dt = \frac{f^2}{8\nu^2}\left(1 - \frac{k^2-(k-\nu)^2}{k^2}\sin^2\alpha\right).$$

Wir erhalten demnach, wenn wir

$$f = f'e^{-Ky},\ k = \frac{\pi v}{\lambda_0}\varkappa,\ k-\nu = \frac{\pi v}{\lambda_0}\varepsilon$$

einführen, die gesuchte Lichtstärke wie folgt ausgedrückt:

$$I = \frac{1}{2}\mu \cdot \frac{f'^2}{8\nu} \cdot e^{-Ky}\left(1 - \frac{\varkappa^2-\varepsilon^2}{\varkappa^2}\sin^2\alpha\right). \tag{18}$$

Darin ist K der vorhin besprochene Absorptionscoëfficient, und die Grösse $\sin^2\alpha$ hat, wenn wir sie ebenfalls als Function der Wellenlänge darstellen, die folgende Bedeutung:

$$\sin^2\alpha = \frac{\varkappa^2\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1-\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varkappa^2\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}.$$

Durch diese Formel (18) ist die Lichtstärke im Absorptionsspectrum als Function der Wellenlänge für jede Dicke der absorbirenden Schicht

und bei Lösungen für jede Concentration dargestellt. Abgesehen von dem constanten Multiplicator besteht der Ausdruck aus zwei Factoren, von denen der eine

$$1 - \frac{\varkappa^2 - \varepsilon^2}{\varkappa^2} \sin^2 \alpha$$

die in der vorigen Abhandlung vorzugsweise betrachtete molekulare Absorption darstellt, welche sich in sehr dünner Schicht (wenn y verschwindend klein ist) oder bei sehr grosser Verdünnung (wenn $\frac{m}{\mu}$ und demnach K verschwindend klein ist) allein geltend macht. Die Stelle, welche das Maximum der molekularen Absorption im Spectrum einnimmt ($\lambda = \lambda_0$, $q = p$), ist nur von der molekularen Constitution des absorbirenden Stoffes, niemals aber von der Beschaffenheit des Lösungsmittels oder anderen äusseren Umständen abhängig. Der andere Factor

$$e^{-Ky}$$

dagegen repräsentirt die Schichtenabsorption und fasst in sich die Einflüsse, welche von der Dicke der Schicht, der Concentration der Lösung und der Natur des Lösungsmittels herrühren.

Ableitung der Formeln für Messungen der Meerestiefen mit Hilfe des Manometers.

Von

Dr. **Richard Rühlmann,**

Professor am Königl. Gymnasium zu Chemnitz.

Die Methode, grössere Meerestiefen mit Hilfe von Senklothen zu bestimmen, ist so wenig genau, dass man bereits vielfach bemüht gewesen ist, dieses Verfahren durch ein anderes zu ersetzen, welches zuverlässigere Messungen gestattet.

Meiner Ansicht nach würde man durch Messung des Gewichtes der über einer Beobachtungsstelle stehenden Wassersäule am ersten im Stande sein, zuverlässige Resultate zu erhalten. Das Gewicht dieser Wassersäule und damit ihre Höhe kann leicht aus dem Drucke gefunden werden, den dieselbe auf ein Manometer ausübt. Man kann demnach mit Hilfe eines Manometers Meeerestiefen messen, sofern man mit dem Druckmesser eine Vorrichtung verbindet, welche gestattet, die Angabe des Apparates abzulesen, die derselbe an dem Punkte zeigt, dessen Tiefe unter der Oberfläche bestimmt werden soll.

Die Aufgabe, solche Manometer zu construiren, dürfte für den Mechaniker nicht sehr schwierig zu lösen sein, da die verschiedenartigen Constructionen der Aneroidbarometer hiezu treffliche Fingerzeige geben.

Stellen wir uns z. B. ein nach Art eines Aneroidbarometers construirtes Manometer vor, welches für sehr hohe Drucke brauchbar ist, und bringen an demselben eine elektromagnetische Vorrichtung an, welche gestattet, durch einen vom Schiffe aus in Thätigkeit gesetzten Strom den Zeiger des Apparates mit solcher Intensität gegen die Scala zu drücken, dass derselbe eine Marke auf der Scala hervorbringt, so würde man, wenn beim Niederlassen zu verschiedenen Zeiten der Strom geschlossen würde, im Stande sein, den Druck an verschiedenen

Stellen des Meeres zu bestimmen. Senkt man gleichzeitig mit dem Apparate eine Löthstelle eines Thermo-Elementes ein, dessen andere Löthstelle auf constanter Temperatur erhalten wird, und leitet den Strom dieses Thermo-Elementes durch ein auf dem Schiffe befindliches Marinegalvanometer, so kann man aus den beobachteten Ausschlägen dieses Galvanometers auch die Temperatur des Wassers an den Stellen finden, für welche man Druckmessungen angestellt hat.

Sehr genaue Resultate würde man nur dann erwarten dürfen, wenn nicht nur der Druck am Meeresboden, sondern auch die Temperatur des Meerwassers an möglichst vielen Stellen in geringeren Höhen bekannt wäre.

Für Messungen, welche für die praktischen Bedürfnisse der Seeleute ausreichen, würde vielleicht ein Manometer mit einem trägen Zeiger genügen, der an der Stelle des höchsten Druckes durch Reibung auf der Scala stehen bliebe.

Es ist mir nicht bekannt, ob ähnliche Vorrichtungen bereits in der Praxis Eingang gefunden haben. Im Nachstehenden will ich kurz die Theorie einer solchen Methode, Meerestiefen zu messen, in ihren Grundzügen auseinandersetzen.

Die Verwandtschaft dieses Problems mit der Aufgabe, die Grundgleichung der barometrischen Höhenmessungen abzuleiten, ist sofort ersichtlich[1]).

Zunächst ist es erforderlich, die Beziehung zwischen der Dichte des Wassers und dem Drucke, unter dem sich dasselbe befindet, zu entwickeln.

Hiezu dient die Definitionsgleichung des isothermischen Compressionscoëfficienten, d. h. desjenigen Compressionscoëfficienten, welcher gilt, wenn die Zusammendrückung bei constanter Temperatur erfolgt. Bekanntlich ist nun[2])

$$\left(\frac{dv}{dP}\right)_{t\,=\,\mathrm{const.}} = -v \cdot k, \tag{1}$$

wenn v das specifische Volumen der Flüssigkeit beim Drucke P und k den Compressionscoëfficienten bezeichnet.

1) Eine eingehende Discussion der bei einer solchen Ableitung in Betracht zu ziehenden Voraussetzungen findet man in der Schrift des Verfassers: „Die barometrischen Höhenmessungen und ihre Bedeutung für die Physik der Atmosphäre" (Leipzig, J. A. Barth. 1870) S. 33 bis 44.

2) Man sehe des Verfassers: „Handbuch der mechanischen Wärmetheorie" (Braunschweig, Vieweg. 1876) Bd. 1 S. 499, Gl. 59.

Aus dieser Gleichung folgt durch Integration sofort:

$$\log \text{nat}\, v = -k \cdot P + \text{Const.}$$

Bezeichnet man das specifische Volumen der Flüssigkeit beim Drucke $P = 1$ Atmosphäre mit v_1, so ist

$$\log \text{nat}\, v_1 = -k + \text{Const.}$$

Durch Subtraction beider Gleichungen ergibt sich

$$\log \text{nat} \frac{v}{v_1} = -k \cdot (P - 1). \tag{2}$$

Bezeichnet nun aber Θ die Dichte des Wassers beim Drucke P, Θ_1 die Dichte beim Drucke $P = 1$, g die Acceleration der Schwere am Beobachtungsorte, so ist

$$v \cdot \Theta \cdot g = 1$$

$$v_1 \cdot \Theta_1 \cdot g = 1$$

und somit

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\Theta_1}{\Theta}.$$

Setzt man dies in Gleichung (2) ein, so ergibt sich

$$\log \text{nat} \frac{\Theta}{\Theta_1} = + k \cdot (P - 1)$$

oder

$$\Theta = \Theta_1 \cdot e^{k(P-1)} \tag{3}$$

Findet nun im Meere der Druck P und die durch P bedingte Dichte Θ in einer Tiefe x unter der Oberfläche statt, so gilt, wenn P in Atmosphären ausgedrückt ist, die Relation

$$10{,}333 \cdot dP = g \cdot \Theta \cdot dx \tag{4}$$

oder

$$dP = \frac{g \cdot \Theta_1}{10{,}333} \cdot e^{k(P-1)} \cdot dx. \tag{5}$$

Da Punkte unter dem Meeresspiegel als im Innern der Erde gelegene anzusehen sind, so gilt für die Acceleration der Schwere g in der Tiefe x unter der Oberfläche bekanntlich die Proportion

$$g : g' = (r - x) : r,$$

wenn g' die Beschleunigung der Schwere an der Meeresoberfläche am Beobachtungsorte und r den Erdradius bezeichnet.

Führt man dies ein, so nimmt die Gleichung (5) die Form an:

$$dP = \frac{g' \cdot (r - x)}{r} \cdot \frac{\Theta_1}{10{,}333} e^{k(P-1)} \cdot dx. \tag{6}$$

Trennt man hier abermals die Variabeln und integrirt, so erhält man

$$-\frac{e^{-k(P-1)}}{k} = \frac{\Theta_1 \cdot g'}{10{,}333}\left(r \cdot x - \frac{1}{2}x^2\right) + \text{Const.}$$

Bestimmt man die Constante wiederum durch die Bedingung, dass für $x = 0$, der Druck $P = 1$ wird, so findet man

$$-\frac{1}{k} = \text{Const.}$$

und erhält nach Elimination der Constanten und Reduction auf P:

$$P = 1 - \frac{1}{k} \cdot \log \text{nat}\left[1 - k \cdot \frac{\Theta_1}{10{,}333} \cdot g' \cdot \left(x - \frac{x^2}{2r}\right)\right]. \qquad 7)$$

Unsere nächste Aufgabe ist es nun, für k und für Θ die nöthigen numerischen Daten herzustellen.

Bekanntlich ist der Compressionscoëfficient des Meerwassers von Grassi[1]) bestimmt worden, und zwar ist

bei 17,5° C. $k = 0{,}0000436$.

Leider ist jedoch die Abhängigkeit dieses Coëfficienten von der Temperatur nicht bestimmt. Da jedoch das Meerwasser nur einen sehr geringen Salzgehalt besitzt, so wird man nach Analogie der meisten anderen physikalischen Eigenschaften sehr verdünnter Salzlösungen berechtigt sein, die Aenderung des Compressionscoëfficienten des Meerwassers mit der Temperatur als sehr nahe gleich der Aenderung des Compressionscoëfficienten des reinen Wassers durch die Temperatur anzunehmen.

Nach Grassi's Versuchen ist nun aber für reines Wasser:

Temperatur	Compressionscoëfficient
0,0° C.	0,0000 503
1,5	515
4,8	499
10,1	480
13,4	477
18,0	463
18,0	460
25,0	456
34,5	453
43,0	442
53,0	441

1) Grassi, Annales de chim. et de phys., Sér. III. Vol. 31.

Die Abhängigkeit der Zusammendrückbarkeit von der Temperatur wird bis zu 40° befriedigend dargestellt durch die Formel

$$k_t = 0{,}00005103 - 0{,}000000323 \cdot t + 0{,}00000000395 \cdot t^2 \cdot \qquad (8$$

Ueberträgt man diese Beziehung auf Meerwasser, so erhält man für den Compressionscoëfficienten des Meerwassers die Formel

$$k_t = 0{,}0000478 - 0{,}000000303 \cdot t + 0{,}00000000370 \cdot t^2 \cdot \qquad (9$$

Da nach den Versuchen von Cailletet[1]) eine erhebliche Veränderlichkeit des Compressionscoëfficienten mit dem Drucke, selbst durch Versuche, welche sich bis zu 700 Atmosphären erstreckten, nicht constatirt worden ist, so haben wir eine solche auch nicht in Rechnung gezogen. Die Ableitung der Formeln bietet, wenn man nicht berechtigt ist in erster Annäherung

$$\frac{dx}{dP} = 0$$

zu setzen, wesentlich grössere Schwierigkeiten dar.

Unzweifelhaft ist in Wirklichkeit k sowohl eine Function von t, als auch von P; in einer ersten Annäherung genügt es jedoch, da k innerhalb der Versuchsgrenzen sich nicht merklich ändert, anzunehmen, dass der Compressionscoëfficient vom Drucke unabhängig sei.

Für das specifische Gewicht des Meerwassers und die Abhängigkeit der Dichte desselben von der Temperatur wird man vielleicht nicht allerorts und zu allen Zeiten genau dieselben Werthe benutzen können, da der Salzgehalt und damit die Dichte in verschiedenen Tiefen, in verschiedenen Meeren, in verschiedenen Entfernungen vom Lande und zu verschiedenen Zeiten nicht immer genau denselben Werth besitzt.

Wir nehmen im Mittel das specifische Gewicht bei Null Grad gleich:

$$g' \cdot \Theta_0' = 1{,}0275$$

und bedienen uns zur Darstellung der Abhängigkeit der Dichteänderung von der Temperatur der Formel, welche von C. v. Neumann[2]) aus Beobachtungen an Wasser aus dem Ocean und aus dem Adriatischen Meere erhalten worden ist, nämlich

$$\frac{\Theta_t}{\Theta_0} = \frac{1}{V_t} = \frac{1}{(1 - 0{,}000018419 \cdot t + 0{,}0000040031 \cdot t^2 + 0{,}000000837 \cdot t^3)} \qquad (10$$

1) Cailletet, Comptes rendus, Vol. 75 p. 77.

2) Pogg. Ann. Ergänzungsband 5 S. 272.

Für praktische Zwecke wird man wahrscheinlich immer mit dieser Formel auskommen; denn nach Rosetti's[1]) Untersuchungen sind die Aenderungen, welche die Ausdehnungsverhältnisse sehr verdünnter Salzlösungen bei so geringen Schwankungen des Salzgehaltes erfahren, wie dieselben im Meere vorkommen, nicht sehr beträchtlich. Wohl aber wird man genöthigt sein, für Θ_0' in jedem besonderen Falle denjenigen Werth einzusetzen, welcher den Verhältnissen der Beobachtung am besten entspricht.

Führt man nunmehr auch die Gleichung (10) in Formel (7) ein, so erhält man schliesslich

$$P = 1 - \frac{1}{k_t} \cdot \log\text{nat}\left[1 - \frac{k_t \cdot \Theta_0' \cdot g'}{V_t \cdot 10{,}333} \cdot \left(x - \frac{x^2}{2r}\right)\right]. \qquad (11$$

Wenn man die Gleichung nach x auflöst, so ergibt sich

$$x = r \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot V_t \cdot 10{,}333}{r \cdot k_t \cdot \Theta_0' \cdot g'} \cdot \left(1 - e^{-k_t(P-1)}\right)}\right]. \qquad (12$$

Dieser Ausdruck würde nach Einsetzung der Formeln (9) und (10) für k_t und V_t und des für Zeit und Ort der Beobachtung geltenden Werthes von $g' \cdot \Theta_0'$ die gesuchte Lösung der Aufgabe enthalten, wenn derselbe für numerische Rechnungen geeignet wäre. Für geringe Tiefen wird man ohne merklichen Fehler annäherungsweise

$$x = \frac{V^t \cdot 10{,}333}{k_t \cdot \Theta_0' \cdot g'} \cdot \left(1 - e^{-k_t(P-1)}\right) \qquad (13$$

setzen können.

Mit Hilfe eines Näherungswerthes x_1 von x ist man leicht im Stande genauer zu rechnen. Sieht man nämlich x im Gliede $\frac{x^2}{2r}$ als bekannt an, so hat man nach Gleichung (8)

$$x = \frac{V_t \cdot 10{,}333}{k_t \cdot \Theta_0' \cdot g'} \cdot \left(1 - e^{-k_t(P-1)}\right) + \frac{x_1^2}{2r}, \qquad (14$$

und dies dürfte für alle auf der Erdoberfläche auftretende Fälle vollkommen genügen.

Entwickelt man die auf der rechten Seite in der Klammer stehende Exponentialgrösse in eine Reihe und vernachlässigt schon die Glieder

1) Att. dell' Instituto Veneto Vol. 13 (1868) und Pogg. Ann. Ergänzungsband 5 S. 258 bis S. 275.

von der Ordnung $k_t \cdot (P-1)^2$, so ergibt sich für die Bestimmung eines Näherungswerthes die Formel

$$x_1 = \frac{V_t \cdot 10{,}333}{\Theta'_0 \cdot g'} \cdot (P-1) \cdot \qquad (15$$

Für geringe Tiefen ist diese aus den einfachen Grundsätzen der Hydrostatik entspringende Gleichung vollkommen ausreichend. Bei genauen Messungen grösserer Tiefen bedient man sich derselben, um den in Formel (14) verwendeten Näherungswerth x_1 zu bestimmen.

Behält man in der Reihenentwickelung das Glied von der Ordnung $k_t \cdot (P-1)^2$ bei, so erhält man die für die meisten praktischen Fälle ausreichende Gleichung

$$x = \frac{V_t \cdot 10{,}333}{\Theta_0' \cdot g'} \cdot \left((P-1) - \frac{1}{2} \cdot k_t \cdot (P-1)^2\right) \cdot \qquad (16$$

Die Anwendbarkeit der Formeln wollen wir noch an zwei Beispielen darthun.

Nach einer Privatmittheilung soll v. Boguslawski in der Ostsee in einer Tiefe von 305^m einen Druck von 31,3 Atmosphären beobachtet haben. Die Temperatur der Beobachtung ist mir nicht bekannt. Nehmen wir an, die mittlere Meereswärme der Wassersäule sei 10°C. gewesen, was sich von der Wahrheit nicht wesentlich entfernen dürfte, so finden wir aus Gleichung (10) und (9)

$$V_{10} = 1{,}00105, \qquad k_{10} = 0{,}0000452.$$

Benutzen wir nun ferner die Werthe $g' \cdot \Theta_0' = 1{,}0275$ und $P = 31{,}3$, so finden wir nach der Annäherungsformel (15)

$$x_1 = 305{,}0^m$$

und nach Gleichung (16)

$$x = 304{,}2^m.$$

Die genauere Formel gibt in diesem Falle keinen merklichen Unterschied. Um in grösseren Tiefen die Formeln zu prüfen, fehlen mir leider die nöthigen Beobachtungsdaten. Um den Unterschied der Formeln jedoch zu zeigen, nehmen wir an, es sei

$$P = 201 \text{ Atmosphäre,}$$

die durchschnittliche Temperatur der Wassersäule gleich + 5° C. gefunden worden. Alsdann ist

$$V_5 = 1{,}000113, \qquad k_5 = 0{,}0000464.$$

Nach wie vor seten wir

$$\Theta_0' \cdot g' = 1{,}0275.$$

Als erste Näherung ergibt sich aus (15)

$$x_1 = 2011{,}5^{\text{m}}.$$

Nach der Annäherungsformel (16) erhält man

$$x = 2003{,}2^{\text{m}}.$$

Die genauere Formel (14) liefert den Werth

$$x = 2002{,}8 + 0{,}5^{\text{m}}.$$

Man erkennt, dass selbst bis zu ansehnlichen Tiefen die einfache Formel (16) ganz genügende Resultate liefert.

Es zeigen ferner die Formeln sofort, dass es für die Praxis genügen würde, wenn man die zu den Messungen dienenden Manometer auf Zehntel Atmosphären graduirte; denn nur selten wird man wohl bei grösseren Tiefen verlangen, dass das Resultat auf mehr als einen Meter genau sei.

Um eine mittlere Temperatur der Wassersäule in der Formel zur Anwendung bringen zu können, wird man bei grossen Tiefen genöthigt sein, die Temperatur nicht bloss an der Oberfläche, sondern auch in verschiedenen Tiefen zu messen, und gerade deshalb empfehlen wir mit dem Manometer ein Thermo-Element zu verbinden. Es wird übrigens vollständig ausreichen, die mittlere Temperatur auf ganze Grade abzurunden.

Sollte durch diese anspruchslose Arbeit den Mechanikern eine Anregung gegeben werden, Manometer herzustellen, welche für Messungen von Meerestiefen geeignet sind, so würde dem Verfasser der geringe Aufwand an Mühe überreich belohnt erscheinen.

Ueber die Aenderung der elektromotorischen Kraft eines galvanischen Elementes bedingt durch die verschiedene Concentration der Salz- oder Säurelösungen.

Von

Dr. **Georg Baumgartner.**

Ueberblickt man die Bestimmungen der elektromotorischen Kräfte von verschiedenen Beobachtern, so fällt die grosse Differenz derselben auf.

Die elektromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes = 1 gesetzt, fanden

Jacobi[1])	Joule[2])	Buff[3])	Saweljew[4])	Beetz[5])	Regnauld[6])
1,672	1,87	1,75	1,928	1,708	1,73

für das Verhältniss eines Grove'schen zu einem Daniell'schen Elemente.

Den Grund der schlechten Uebereinstimmung suchte man durch die verschiedene Concentration der Säuren verursacht. Dass dieselbe einigen Einfluss hat auf die elektromotorischen Kräfte, geht aus den Versuchen Poggendorff's[7]) sowohl für das Daniell'sche als für das Grove'sche Element hervor.

Daniell'sches Element.

		E
$SO_4H_2 + 4aq$;	Kupfervitriol gesättigt . . .	1,10
$SO_4H_2 + 8aq$;	„ „ . . .	1,02
$SO_4H_2 + 12aq$;	„ „ . . .	1,00

1) Pogg. Ann. Bd. 57 S. 62.
2) Philosophical Magazin 1844 vol. 24.
3) Pogg. Ann. Bd. 73.
4) Ebend. Bd. 67.
5) Ebend. Bd. 90.
6) Annal. de chim. et de phys. Sér. 7 T. 44.
7) Pogg. Ann. Bd. 53.

Grove'sches Element.

		E
$SO_4H_2 + 4aq$;	rauchende Salpetersäure . .	2,00
$SO_4H_2 + 4aq$;	Salpetersäure 1,33 spec. Gew.	1,85
$SO_4H_2 + 12aq$;	„ 1,33 „ „	1,75
$SO_4H_2 + 4aq$;	„ 1,19 „ „	1,72

Ebenso fand Svanberg[1]):

Zink nicht amalgamirt	Kupfer	E
In nicht ganz gesättigter Lösung von Zinkvitriol	In concentrirter od. verdünnter Kupfervitriollösung .	15,58 — 15,74
Ziemlich concentrirter Lösung von Zinkvitriol .	In concentrirter Lösung von Kupfervitriol	15,60
Derselben mit gleichem Volum Wasser . . .	„	15,75
Derselben verdünnter . .	„	15,85
Derselben sehr verdünnt .	„	16,15
In concentrirter Lösung von schwefelsaurem Kali	„	16,57
In verdünnter Lösung .	„	16,44
In sehr verdünnter Lösung	„	16,21

Es nimmt also die elektromotorische Kraft mit Verdünnung der Schwefelsäure sowie des schwefelsauren Kalis ab, dagegen mit Verdünnung des Zinkvitriols zu.

Es schien mir interessant, eine grössere Reihe von Versuchen über diesen Gegenstand anzustellen, namentlich da ich glaube, den Grund dieser Erscheinung erkannt zu haben.

Bekanntlich ist die elektromotorische Kraft eines galvanischen Elementes proportional der in dem Elemente erzeugten Wärmemenge.

Der chemische Process in einem Daniell'schen Elemente ist bekanntlich folgender:

Während ein Aquivalent Zink verbrannt wird, reducirt der am anderen Pole frei werdende Wasserstoff gleichzeitig ein Aquivalent Kupfer.

Es liefert die Oxydation des Zinks 41300 Calorien, die Ueberführung in gelöstes schwefelsaures Zinkoxyd 11077 Calorien, somit in Summe 52377 Cal. Davon ist in Abzug zu bringen die zur Reduction von einem Aequivalent Kupfer erforderliche Wärmemenge.

1) Pogg. Ann. 1848 Bd. 73 S. 290.

Dieselbe ist gleich 28076 Calorien. Demnach werden in einem Daniell'schen Elemente 52377 — 28076 = 24301 Calorien gewonnen, und diese Zahl ist zugleich das Mass für die elektromotorische Kraft des erzeugten Stromes.

Die Beobachtungen von Person[1]), Winkelmann[2]) u. A. liefern den Beweis, dass eine verschiedene Wärmemenge zur Herstellung einer Lösung erforderlich ist, je nachdem eine grössere oder kleinere Menge des Lösungsmittels angewendet wird. Je grösser die Menge des Lösungsmittels, desto grösser ist auch im Allgemeinen die verbrauchte Wärmemenge.

Bekanntlich sieht man den Lösungsact als Summe von zwei verschiedenen Processen an. Einmal ist es die Ueberführung des festen Salzes in den flüssigen Zustand und dann die Vertheilung des gelösten Salzes in dem Lösungsmittel. Die verbrauchte Wärmemenge des ersten Processes ist unabhängig von der Menge des Lösungsmittels, die Wärmemenge des zweiten nimmt jedoch mit der Menge des Lösungsmittels zu, da gewissermassen eine grössere Verflüssigung mit der grösseren Menge des Lösungsmittels stattfindet.

Ebenso in einem Daniell'schen Elemente. Die Ueberführung des Zinkoxyds in gelöstes schwefelsaures Zinkoxyd liefert 11077 Calorien. Diese Angabe ist die Differenz zwischen der Wärmemenge, die bei der Ueberführung von Zinkoxyd in schwefelsaures Zinkoxyd erzeugt wird, weniger der Wärmemenge, welche verbraucht wird bei der Auflösung von schwefelsaurem Zinkoxyd in Wasser.

In einem Daniell'schen Elemente löst sich allerdings nicht das schwefelsaure Zinkoxyd in reinem Wasser, sondern in einer Mischung von Schwefelsäure und Wasser; demungeachtet wird die verbrauchte Wärmemenge, die der Lösungsact erfordert, eine verschiedene sein, je nachdem die Lösung concentrirter oder verdünnter angewendet wird. Im Allgemeinen wird die verbrauchte Wärmemenge mit der Concentration kleiner, daher die elektromotorische Kraft grösser.

Aehnlich sind die Verhältnisse beim Kupfer.

Ueberlegt man, dass in diesem Falle gerade der entgegengesetzte Process wie beim Zink vor sich geht, so wird man schliessen: je concentrirter die Lösung, desto kleiner die elektromotorische Kraft.

---

1) Annal. de chim. et de phys. Sér. 3 T. 33.

2) Pogg. Ann. 1873.

Um dies besser einzusehen, braucht man sich den Process nur verkehrt zu denken.

Kupfer wird oxydirt, dann übergeführt in schwefelsaures Kupferoxyd, welches sich löst. Gesetzt, es erfordere die Reduction des Kupfers W Calorien. Die Zahl W ist die Summe der Zahlenwerthe von drei Processen. Die beiden ersten Summanden sind positiv, der dritte negativ, daher

$$W = a + b - x,$$

wenn a und b die Anzahl der Wärmeeinheiten, die die Ueberführung des Kupfers in Kupferoxyd resp. schwefelsaures Kupferoxyd ausdrücken, und x die Lösungswärme bedeutet.

Denkt man sich nun x kleiner werdend (was der Fall ist, wenn die Lösung concentirter wird), dann wird W grösser; da aber W negativ zu nehmen ist, d. h. von der gewonnenen Wärme beim Zink abzuziehen ist, so folgt, dass die elektromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes kleiner wird mit der grösseren Concentration am negativen Pole.

Die elektromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes wird daher mit steigender Menge an Salz oder Säure am positiven Pole grösser, am negativen kleiner.

Bei dieser Gelegenheit will ich auch ein paar Worte über den Einfluss der Temperatur erwähnen. Ohne mich ausführlicher über die Abhängigkeit der Lösungswärme von der Temperatur einzulassen, erinnere ich nur, dass die Lösungswärme von der Temperatur abhängt, daher man glauben könnte, dass auch die elektromotorische Kraft von ihr abhängig sei. Dem ist jedoch nicht so. In einem galvanischen Elemente findet immer Oxydation und Desoxydation statt, daher die Differenz der elektromotorischen Kräfte, die in Folge der verschiedenen Lösungswärme auftritt, sich gegenseitig aufhebt. Natürlich ist vorausgesetzt, dass bei beiden Flüssigkeiten die Lösungswärme sich gleichmässig ändert.

Ist die Abhängigkeit der Lösungswärme von der Temperatur für beide Flüssigkeiten eine sehr verschiedene, dann wird sich auch die elektromotorische Kraft des galvanischen Elementes merklich ändern. Für das Daniell'sche und Grove'sche Element haben Poggendorff und Petruschefsky für ziemlich grosse Temperaturdifferenzen die Constanz derselben bewiesen.

Die Entstehung eines galvanischen Stromes, wenn die beiden Platten aus demselben Metalle sind und in dieselbe Flüssigkeit, jedoch von verschiedener Concentration tauchen, erklärt sich auch ganz einfach durch die verschiedene Lösungswärme der gebildeten Metallverbindung und des reducirten Metalls in den Flüssigkeiten. In diesem Falle ist die elektromotorische Kraft einfach der Differenz der Lösungswärme proportional.

Zur Bestimmung der elektromotorischen Kräfte wendete ich die von Fechner angewandte Methode an. Die zu vergleichenden Elemente wurden zugleich hinter einander in den Stromkreis eingeschaltet, so dass die Ströme gleich gerichtet sind, sich also summirten, dann dass sie gegen einander flossen, sich also subtrahirten.

Sind die beobachteten Stromstärken in beiden Fällen I_1 und I_2, W der Widerstand, so ist

$$I_1 = \frac{E_1 + E_2}{W}, \quad I_2 = \frac{E_1 - E_2}{W}$$

$$E_1 = E_2 \frac{I_1 + I_2}{I_1 - I_2}.$$

Als Einheit der elektromotorischen Kraft wählte ich ein Daniell-sches Element, in welchem die Schwefelsäure durch eine 25 procentige Zinkvitriollösung ersetzt wurde, die negative Platte aber in eine concentrirte Kupfervitriollösung tauchte, weil ich fand, dass diese Combination am längsten constant bleibt. — Als Concentration ist jedesmal 100 Gewichtstheile Wasser und eben so viele Gewichtstheile Salz oder Säure, als Procente angegeben sind, zu verstehen. Nur bei der Schwefelsäure sind Volumtheile angeführt.

Versuche.

Amalgamirtes Zink in Schwefelsäure, Kupfer in concentrirter Kupfervitriollösung. Specifisches Gewicht der Schwefelsäure = 1,845.

I.		II.	
Conc.	E	Conc.	E
80%	1,07	100%	1,04
40	1,06	50	1,06
10	1,04	25	1,05
5	1,03	12	1,04
2,5	1,02	6	1,04
1,8	1,02	3	1,01

I. Conc.	E	II. Conc.	E
0,8 %	1,00	1,5 %	1,00
0,4	0,997	0,8	0,997
0,2	0,996	0,4	0,997
0,05	0,996	0,2	0,997

Wurde die Concentration sehr verdünnt genommen, etwa auf 10 Liter Wasser ein Tropfen Schwefelsäure, so fiel die elektromotorische Kraft auf 0,99 D.

Ich lasse noch einen Versuch mit H_2SO_4, deren specifisches Gewicht = 1,117 ist, folgen.

Conc.	E
50 %	1,05
25	1,04
12,5	1,03
6,2	1,00
3,4	1,00
1,7	0,995
0,9	0,994

Bei der äussersten Verdünnung $E = 0,99$ D.

Die Concentration der folgenden Versuchsreihen wurde G. J. Mulder's Buche „Scheikundige Verhandelingen" entnommen; d. i. bei Zimmertemperatur wurde eine concentrirte Lösung gemacht, die dann immer durch Wasser auf die entsprechende Concentration verdünnt wurde.

Der Löslichkeitscoëfficient ist ebengenanntem Buche entlehnt. Amalgamirtes Zink in Chlor-Kalium, Kupfer wie früher.

I. Conc.	E	II. Conc.	E
36 %	1,06	36 %	1,08
18	1,04	18	1,07
9	1,04	9	1,05
4,5	1,03	4,5	1,05
2,2	1,00	2,2	1,04
1,1	1,00	1,1	1,02
0,56	0,997	0,56	1,00
0,23	0,996	0,23	0,998

Bei der äussersten Verdünnung $E = 0,99$ D.

Amalgamirtes Zink in Salmiak, Kupfer in concentrirter Kupfervitriollösung.

I. Conc.	E	II. Conc.	E
38%	1,090	38%	1,08
36	1,060	36	1,06
18	1,040	18	1,05
9	1,020	9	1,03
4,5	1,020	4,5	1,01
2,2	1,000	2,2	1,00
1,1	0,996	1,1	1,00
0,56	0,994	0,56	0,996
0,23	0,994	0,23	0,997

Bei der grössten Verdünnung $E = 0{,}98$ D.

Amalgamirtes Zink in Kochsalz, Kupfer in concentrirter Kupfervitriollösung.

I. Conc.	E	II. Conc.	E
36%	1,05	36%	1,06
18	1,03	18	1,04
9	1,02	9	1,02
4,5	1,02	4,5	1,01
2,2	1,02	2,2	1,01
1,1	1,01	1,1	1,00
0,56	1,00	0,56	1,00
0,23	1,00	0,23	1,00

Bei der äussersten Verdünnung $E = 1{,}00$ D.

Amalgamirtes Zink in salpetersaurer Ammoniumlösung, Kupfer in concentrirter Kupfervitriollösung.

I. Conc.	E	II. Conc.	E
180%	1,030	180%	1,015
90	1,038	90	1,020
45	1,040	45	1,025
22,5	1,030	22,5	1,010
11,2	1,020	11,2	1,005
5,6	1,010	5,6	1,000

I.		II.	
Conc.	E	Conc.	E
2,3 % . . .	1,000	2,3 % . . .	1,008
1,2 . . .	1,005	1,2 . . .	1,008
0,6 . . .	1,006	0,6 . . .	1,010

Aus allen bis jetzt mitgetheilten Versuchsreihen geht hervor, dass die elektromotorische Kraft des galvanischen Elementes mit steigender Menge an Salz oder Säure grösser wird; nur bei der salpetersauren Ammoniumlösung zeigt die elektromotorische Kraft Maxima und Minima. Der Grund kann ein zweifacher sein. Einerseits dürfte die Lösungswärme von salpetersaurem Zinkoxyd in salpetersaurem Ammonium nicht fortwährend grösser werden mit der kleineren Concentration, andererseits ist es auch möglich, dass die Lösung etwas dissociirt.

Ich stellte noch viele Versuche mit salpetersaurem Ammonium an und erhielt oft grössere Differenzen der elektromotorischen Kräfte, aber jedesmal zeigten sich Maxima und Minima.

Amalgamirtes Zink in salpetersaurer Natronlösung, Kupfer in concentrirter Kupfervitriollösung.

Conc.	E
88 %	0,996
44	1,000
22	1,000
11	1,010
5,5	1,010
2,8	1,008
1,4	1,008
0,7	1,010

Auch bei dieser Lösung nimmt die elektromotorische Kraft nicht fortwährend mit der Verdünnung ab, sondern zu.

An der Kupferplatte wird die Aenderung der E. K., welche in Folge der Verdünnung der Lösung eintritt, schwer zu beobachten sein, weil die galvanische Polarisation, die in Folge zu grosser Verdünnung immer eintreten muss, die Beobachtungen zu sehr beeinflusst. Wurde in einem Daniell'schen Elemente (Zn in SO_4Zn) die Kupfervitriollösung immer verdünnter angewendet, so änderte sich die elektromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes gar nicht. Nach der früheren Auseinandersetzung sollte dieselbe grösser werden mit der grösseren

Menge Wasser, doch gleicht wahrscheinlich die galvanische Polarisation diese Aenderung aus. Verwendet man statt schwefelsaurem salpetersaures Kupferoxyd, dann wird die elektromotorische Kraft sogar kleiner. Ich fand dieselbe zwischen 1,01 — 99,4 D. Dass diese Aenderung nur durch die galvanische Polarisation bedingt ist, geht schon daraus hervor, dass die Differenz grösser wurde, falls ich den Strom einige Zeit geschlossen liess. Bei Kupferchlorid nimmt man jedoch eine entschiedene Steigerung der E. K. wahr, falls die Lösung nicht gar zu verdünnt gebraucht wird.

Am besten fällt die Aenderung der E. K. bei Anwendung von schwefelsaurem Kupferoxyd-Ammoniak auf.

Die erste Zahl der kommenden Reihe ist die Grösse der elektromotorischen Kraft, wenn die Lösung concentrirt ist; die nachfolgenden entsprechen immer der E. K., falls die Lösung die doppelte Menge Wasser enthielt.

0,880 D.
0,885
0,890
0,900
0,910
0,915
0,920
0,920

Nur bei sehr grosser Verdünnung stieg die E. K. auf 0,93.

Kleinere Mittheilungen.

Ueber zwei neue fluorescirende Substanzen.

Von

E. Lommel.

(Aus den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Von Herrn Dr. Th. Schuchardt in Görlitz erhielt ich vor einiger Zeit zwei neue fluorescirende Substanzen, deren Untersuchung nach den von mir früher beschriebenen Methoden zu folgenden Ergebnissen führte.

1. Anthracenblau. Die tiefblaue ätherische Lösung fluorescirt sehr stark olivengrün. Das Absorptionsspectrum zeigt vier dunkle Streifen, deren dunkelste Stellen resp. bei 36, 55, 69 und 86[1]) liegen, und eine kurz vor *H* beginnende Verdunkelung des violetten Endes, während Blau und der grösste Theil des Violett fast unversehrt erscheinen. Von den Absorptionsstreifen sind der zweite und dritte (55 und 69) bei weitem die intensivsten und ungefähr gleich kräftig; dann folgt der Stärke nach der ziemlich schwache erste (36) und endlich der noch schwächere vierte (86). Das Spectrum des Fluorescenzlichts beginnt schwach bei 27, deutlich bei 30 und erstreckt sich deutlich bis 70, schwach noch bis 74. Es zeigt drei Maxima, bei 40, 52 und 63, welche durch zwei sehr deutlich ausgeprägte Minima (bei 45 und 57) von einander getrennt sind, und scheint daher aus drei hellen Streifen, einem rothen, einem orangegelben und einem gelbgrünen, zu bestehen, von denen der mittlere die beiden andern an Helligkeit ein wenig übertrifft. Das auf die Flüssigkeit projicirte fluorescirende Spectrum beginnt schwach bei 47 und zeigt, jenen beiden intensivsten Absorptionsstreifen entsprechend, zwei sehr helle, durch einen ziemlich dunkeln Zwischenraum getrennte Fluorescenzstreifen, welche durch ihre verschiedene Färbung sehr stark von einander abstehen; der erste ist nämlich durchaus orange, der zweite durchaus gelbgrün gefärbt. Ein drittes, aber viel schwächeres, bräunlich olivengrün gefärbtes Maximum bei 86 entspricht dem vierten Absorptionsstreifen;

1) Bunsen'sche Scala.

der erste dagegen (bei 36) hat mit der Fluorescenz nichts zu thun. Im Blau und Violett, von F bis kurz vor H, ist die Fluorescenz sehr schwach, olivengrün ins Röthliche und kaum wahrnehmbar; erst etwas vor H wird sie wieder stärker und zieht sich mit olivengrünlichem Ton noch eine Strecke ins Ultraviolett hinein. Wir haben also hier eine fluorescirende Substanz vor uns, bei welcher die blauen und der grösste Theil der violetten Strahlen nur ausserordentlich schwach, die orangegelben und gelbgrünen Strahlen dagegen sehr stark erregend wirken. Erregt man mit homogenem Licht, indem man nach und nach zu immer geringerer Brechbarkeit herabsteigt, so beobachtet man, dass durch alle Strahlen bis 58 herab das ganze Fluorescenzspectrum erregt wird: durch den Strahl 58 z. B. nicht bloss der Theil von 30 bis 58, sondern auch der brechbarere von 58 bis 70. Die Strahlen unterhalb 58 aber erregen den gelbgrünen Theil des Fluorescenzlichts (58—79) nicht mehr, sondern nur noch den rothen und orangefarbigen Theil, diesen aber auch ganz; erregt man z. B. mit dem Strahl 48, so ist das Fluorescenzspectrum von 30 bis 55 deutlich zu sehen; Licht, welches durch drei rothe Gläser gegangen ist und nur bis 50 reicht, erregt noch sehr deutlich bis 57. Das Fluorescenzspectrum des Anthracenblaus besteht demnach aus zwei durch das Minimum bei 57 von einander getrennten Partien, deren keine der Stokes'schen Regel gehorcht, die zweite brechbarere aber nur von Strahlen oberhalb 57 erregt wird. Das Anthracenblau verhält sich also wie eine Mischung aus zwei fluorescirenden Substanzen erster Classe (vergl. Repertorium, dieser Band S. 15 ff.), deren eine durch den Absorptionsstreifen 55 und durch orangegelbe Fluorescenz (30—57), die andere durch den Absorptionsstreifen 69 und gelbgrüne Fluorescenz (57—70) charakterisirt wäre[1].

2. Bisulfobichloranthracenige Säure. Die schwach bräunlichgelb gefärbte ätherische Lösung bietet keine Absorptionsstreifen dar, sondern nur eine schwache Absorption der blauen und eine stärkere der violetten Strahlen. Sie fluorescirt oberflächlich sehr schön blau, aus dem Innern heraus grünlich. Das Spectrum

1) Der Theorie zufolge (Repertorium, dieser Band S. 15 ff.) würde jeder dieser beiden Theile des Fluorescenzspectrums das zu dem entsprechenden Absorptionsstreifen gehörige etwas nach abwärts geschobene Emissionsspectrum vorstellen, oder jeder der beiden Absorptionsstreifen wäre als „Umkehrung" des zugehörigen Fluorescenzstreifens zu betrachten.



des Fluorescenzlichts erstreckt sich von 30 bis 162, also bis ans violette Ende, zeigt vier Maxima, nämlich zwischen 70 und 80, bei 109, 131 und 150, von denen die drei ersten ungefähr gleichstark, das letzte etwas lichtschwächer erscheint. Zwischen diesen Maximis sind schwach ausgeprägte Minima etwa bei 98, 117 und 140 wahrzunehmen. Das fluorescirende Spectrum beginnt schwach etwa bei *F* und erstreckt sich mit olivengrünlichem Farbenton und geringer Lichtstärke bis etwa 150, wird hier fast plötzlich schön blau und sehr lichtstark, erlangt seine grösste Helligkeit unmittelbar vor *H* und reicht mit derselben blauen Farbe noch weit ins Ultraviolett hinein. Die Fluorescenz ist von der zweiten Art, d. h. sie befolgt die Stokes'sche Regel.

Schliesslich sei es noch gestattet, eine Bemerkung über das früher (Repertorium, dieser Band S. 41) besprochene Fluoranilin beizufügen. Die daselbst ausgesprochene Vermuthung: „Auch das Fluoranilin dürfte als eine Mischung zweier fluorescirender Substanzen zu betrachten sein", hat sich mittlerweile bestätigt. Die ehedem orangegelbe Flüssigkeit hat jetzt eine schwach grünlichgelbe Farbe angenommen, die charakteristischen Absorptionsstreifen sind verschwunden und nur eine diffuse Absorption des violetten Endes ist zurückgeblieben. Die mit dem ersten Absorptionsstreifen im Zusammenhang stehende gelbe Fluorescenz erster Art mit ihren Maximis bei 43 und 56 ist ebenfalls verschwunden, die schon früher vorhandene grünblaue Fluorescenz zweiter Art aber besteht noch, und zwar mit denselben Merkmalen wie früher. Das Spectrum des Fluorescenzlichts reicht nämlich deutlich von 30 bis 110 (schwach noch bis 140) und zeigt Maxima der Lichtstärke bei 75 und 97 nebst einem Minimum bei 88. Es ist demnach unverkennbar, dass die durch starke Absorptionsstreifen ausgezeichnete Substanz, welche nach erster Art fluorescirte, durch Zersetzung zerstört wurde, während die andere Substanz, welcher die Fluorescenz zweiter Art eigen ist, unversehrt zurückblieb.

Ueber eine nützliche Vereinfachung des Spectralapparats.

Von

G. Hüfner.

Der Umstand, dass man, um sich in den verschiedenen Spectralregionen orientiren, um im Spectrum genaue Ortsbestimmungen vornehmen zu können, immer noch eines dritten, mit einer Scala oder mit der bekannten Vierordt'schen Einrichtung versehenen Rohres

und zur Beleuchtung dieser Vorrichtungen noch einer besonderen Lichtquelle bedarf, ist mir und vielleicht noch vielen Beobachtern immer sehr lästig erschienen. Ich habe deshalb dem hiesigen Universitätsmechanikus Albrecht die Aufgabe gestellt, ein einfaches Zeigerwerk zu construiren, welches dadurch, dass es den Stand des durch eine Mikrometerschraube um die Säule des Stativs bewegbaren Fernrohrs auf einer unterhalb dieses letzteren befindlichen Scala markirt, zugleich die Region des Spectrums angibt, welche dann jedesmal in der Mitte des Gesichtsfeldes vom Ocularrohre liegt. Dabei ist natürlich angenommen, dass das Fernrohr in der Ebene des durch das Ocular betrachteten Bildes und zwar scharf in der Mitte des Gesichtsfeldes mit einem Fadenkreuze versehen ist, welches die Einstellung auf eine ganz bestimmte Linie des Spectrums möglich macht.[1])

Herr Albrecht hat diese Aufgabe in der That gelöst und zwar in folgender Weise:

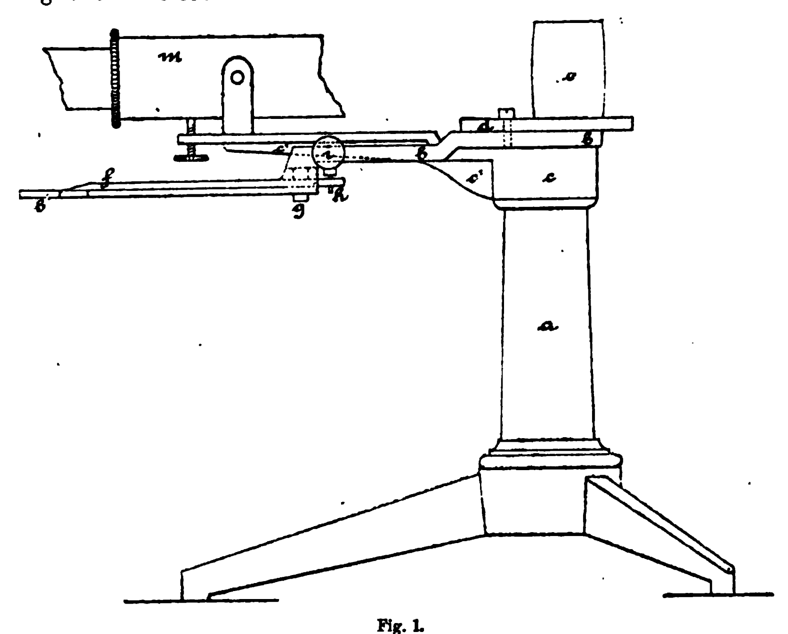


Fig. 1.

Sei a in Fig. 1 die Säule des Stativs, so ist c ein um dieselbe leicht beweglicher Arm, welcher das Fernrohr m zu tragen bestimmt

1) Bei den neueren Spectralapparaten, die aus dem Merz'schen Optischen Institute dahier hervorgegangen sind, ist das Scalenrohr gleichfalls entfernt und durch eine vom Beobachtungsfernrohre aus zu manipulirende mikrometrische Vorrichtung ersetzt worden. Carl.

ist. Dieser Arm *c* hat in der Mitte eine nach unten vorspringende Rippe *c'*. Ueber demselben ist an der Säule *a* der Halter *b* befestigt. Dieser Halter ist, wie mit *a*, unverrückbar auch mit der Platte *d* verbunden, auf welcher letzteren das Prisma *e* ein- für allemal seinen festen Stand hat. Wie ferner aus Fig. 1 ersichtlich, ist *b* an zwei Stellen unter stumpfem Winkel nach abwärts gebogen, und Fig. 2,

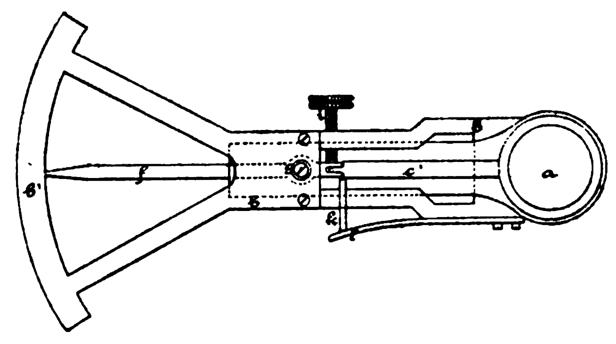


Fig. 2.

welche die Ansicht der ganzen Vorrichtung von unten darstellt, zeigt weiter, dass das gleiche Stück unweit der Säule *a* mit einem breiteren Ausschnitte versehen ist, durch welchen der Arm *c* nach oben tritt, und dass es an seiner Peripherie eine Alhidade *b'* trägt. Die Schraube *g* bildet den Drehpunkt des Zeigers *f*. Dieser letztere besitzt am Ende seines kurzen Hebelarms einen schmalen Ausschnitt zur Aufnahme des von der Rippe *c'* herabragenden Stiftes *h*, der sich in diesem Ausschnitte frei bewegen kann. Dieser Stift dient dazu, gegen den kurzen Hebelarm von *f* zu drücken und so den Zeiger in entgegengesetzter Richtung über die Scala gleiten zu lassen, wenn durch die Schraube *i*, die im Stücke *b* ihren festen Widerhalt findet, der Arm *c* sammt dem Fernrohre *m* um die Achse der Säule bewegt wird. Zum Behufe grösster Gleichmässigkeit, ebenso wie zur Ermöglichung einer exacten Umkehr dieser Bewegung ist unter *c'* noch ein zweiter, aber horizontaler, Stift *k* eingebohrt, gegen welchen die starke Feder *l* andrückt.

Auf der Alhidade *b'* kann man sich die wichtigsten Fraunhofer'schen Linien ein- für allemal auf- und zwischen die Theilstriche einer wie gewöhnlich willkürlichen Scala hineinätzen.

Polarisations-Mikroskop zur Messung von Achsenwinkeln.

Nach dem Principe von Prof. Adams construirt

von

E. Schneider,

Mechaniker in Währing bei Wien.

(Hiezu Tafel VI.)

Im Anfange des Jahres 1878 hielt Herr Professor Adams einen Vortrag über ein neues Polarisationsmikroskop und erwähnte, dass, wenn man die Linsen, zwischen welche man die Krystalle legt, derartig construirte, dass selbe eine in der Mitte durchschnittene Kugel bilden, welche zwischen den anderen Linien nach allen Richtungen verdreht werden könnte, man dasselbe gleichzeitig zur Messung der Achsenwinkel benutzen könnte.

Die Durchführung der von Herrn Prof. Adams ausgesprochenen Idee ist mit ziemlichen Schwierigkeiten verbunden, und scheinen diese englische Mechaniker abgeschreckt zu haben.

Herr Sectionschef Baron Schröckinger führte mich auf die Idee, mit Verfertigung von Polarisationsmikroskopen mich zu befassen, und empfahl er meine Wenigkeit an Herrn Dr. Břecina, Custos im k. k. Hofmineralienkabinet zu Wien, der mich in der freundlichsten Weise mit den bestehenden Constructionen bekannt machte und mich schliesslich aufforderte, das Adams'sche Princip zu verkörpern.

Die Aufgabe war nun, ein Instrument zu construiren, mit dessen Hilfe man die Achsenwinkel bestimmen könnte, das aber gleichzeitig frei von allen blauen Flecken im Gesichtsfelde wäre und ein möglichst weites Gesichtsfeld haben sollte.

Dasselbe besteht aus zwei Messingrohren R und R_1 (Taf. VI Fig. 1), die von einem geeigneten Ständer getragen werden. Unterhalb derselben befindet sich ein Planspiegel S. In dem Rohre R_1 befindet sich eine Linse l_1, der Polarisator N, eine zweite Linse l_2 und eine dritte halbkugelförmige l_3. In der oberen (R) befindet sich eine halbkugelförmige planconvexe Linie l_5, eine zweite biconvexe l_7, eine Planparallelplatte P, welche in kleine Quadrate getheilt ist, endlich eine biconvexe Linse l_4. Oberhalb der Rohre befindet sich der Analiseur N_1.

Zwischen den Rohren R und R_1 ist ein Mittelstück M horizontal verdrehbar eingesetzt, welches von der Seite her conisch und dann cylindrisch durchbohrt ist.

In diese Bohrung wird ein zungenförmig construirtes, aus zwei Theilen H und H_1 (Fig. 2) zusammengesetztes Metallstück geschoben und mit Hilfe der Schraube t von aussen festgehalten. Zwischen diesen beiden Stücken H und H_1 sind vier Zahnräder angebracht. Davon ist eines mit einem Griffe G versehen und kann von aussen verdreht werden. Dieses greift in ein zweites Zahnrad ein, welches bedeutend dicker ist und eine ihm durch das erste Zahnrad mitgetheilte Verdrehung an zwei ringförmige über einander liegende Zahnräder übermittelt. Diese letzteren zwei Zahnräder bilden die Fassungen für zwei mit einander eine in der Mitte durch eine $^3/_4{}^{mm}$ dicke Luftschicht durchschnittene Glaskugel bildenden Hemispheren, zwischen welche ein Krystall gebracht werden kann.

Fig. 3 stellt H_1 und Fig. 4 H von einander getrennt dar.

Fig. 5 stellt den Polarisator dar, wie er in R_1 befestigt ist.

Fig. 6 gibt eine Gesammtansicht des Instrumentes.

Bei der Bestimmung eines Achsenwinkels wird man vorerst die durch beide Achsencentra gedachte Gerade senkrecht auf die horizontale Umdrehungsachse des zusammengesetzten Messingstückes durch entsprechende Verdrehung von G und M stellen, hierauf mit Hilfe des Griffes T (Fig. 6) die mit demselben verbundenen Messingstücke H und H_1, also auch den Krystall und die Trommel K, so lange verdrehen, bis das Bild der einen Achse im Mittelstriche auf der getheilten Platte P im oberen Rohre R erscheint, dann am Nonius I den Winkel ablesen. Ist die erste Lesung markirt, so wird man T verdrehen, bis das zweite Achsenbild im Mittelstriche erscheint, woraus die aus der ersten und der zweiten Lesung an I gebildete Differenz unmittelbar den Achsenwinkel ergeben wird.

Ich selbst kann mir nicht erlauben ein Urtheil über das von mir ausgeführte Instrument abzugeben und erlaube mir deshalb das von Professor W. Adams, dem ich das Instrument in London übergab, gegebene Urtheil zu reproduciren. Er schreibt mir in einem hochgeschätzten Schreiben vom 24. November vorigen Jahres:

„J know of no instrument, which will produce so good a result, and if the cristal, which you placed in it is topaz of Brazil, in which the separation of the axes is very wide, the result is a very good test of your workmanship as well, as of the correctness of the principle on which the instrument is based.“

XV. Band. 3. Heft.

REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE & ASTRONOMISCHE INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN.

FÜNFZEHNTER BAND.

Inhalt des 3. Heftes

(mit Tafel VII bis XI).

MÜNCHEN, 1879.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Den Herren Abnehmern des Repertoriums zur gefälligen Beachtung.

Das Repertorium für Experimental-Physik erschien vom Jahre 1878 Band XIV ab, einem wiederholt ausgedrückten Wunsche vieler Abnehmer entsprechend, gleichzeitig aber auch veranlasst durch die immer reichlicher zufliessenden Beiträge der Herren Mitarbeiter, bekanntlich in jährlich zwölf statt früher sechs Heften. Trotz der doppelt zu gebenden Anzahl Hefte wurde der Preis der Zeitschrift nur um den kaum nennenswerthen Betrag von 80 ₰ erhöht. Die Verlagshandlung ging bei dieser geringen Preiserhöhung von der Voraussetzung aus, dass der Umfang des Repertoriums sich nunmehr gleich bleiben werde.

Das einlaufende Material zum Repertorium ist aber noch immer im Wachsen begriffen; es dürfte den Herren Abnehmern kaum entgangen sein, dass der Umfang desselben auch im verflossenen Jahre wieder um ein Bedeutendes sich vermehrt, in den letzten Jahren überhaupt sich nahezu verdoppelt hat, während der Inhalt des Repertoriums aber auch um so Vieles reichhaltiger geworden ist.

Die Verlagshandlung hat mit der bisherigen Beibehaltung und beziehungsweise geringen Erhöhung des Preises, welcher mit den gestiegenen Herstellungskosten in keinem Verhältniss stand, sehr erhebliche Opfer gebracht. Die Herren Abnehmer werden es deshalb nicht unbillig finden, wenn die Verlagshandlung zur Verminderung derselben den Preis des Repertoriums vom Jahrgang 1879 Band XV ab auf

Mark 24. —

feststellt.

Auch bei einem weiteren mässigen Wachsen des Materials wird eine Wiederholung der Preissteigerung von nun ab voraussichtlich entbehrlich sein.

Ueber die Intensität der elektrischen Ströme und der Extraströme im Telephon.

Experimentale, numerische Forschungen

von

Dr. **Galileo Ferraris,**
Professor der Physik in dem *k. Museo industriale italiano* zu Turin.

(Hiezu Tafel VII.)

(Aus den „*Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*" Vol. XIII, Sitzung vom 23. Juni 1878, vom Herrn Verfasser übersetzt.)

Die Forschungen, die den Gegenstand vorliegender Schrift bilden, bezwecken die numerische Bestimmung einiger der Elemente, von denen die im Telephon vorkommenden Erscheinungen abhängig sind. Mehrere die Theorie dieses Instrumentes betreffende Fragen, welche, mit demselben entstanden, noch heutzutage unentschieden geblieben, beweisen, dass noch immer verschiedene Urtheile über die relative Wichtigkeit der Thatsachen möglich sind, welche die telephonische Transmission ausmachen und begleiten. So schien es mir denn, dass eine experimentale und auf Zahlenverhältnisse gestützte Forschung auf diesem Gebiete eine allgemeinere und höhere Wichtigkeit haben dürfte, als wenn sie sich darauf beschränkte, als blosser Theil der Theorie eines Instrumentes zu erscheinen.

Die Experimente, die ich, von diesem Gedanken geleitet, seit vorigem Januar anstellte und wovon ich nunmehr einige Ergebnisse vorweisen kann, bilden zwei gesonderte Reihen.

Die erste Reihe bezieht sich auf die Transmission des Schalles von einem in die Leitung einer inducirenden Spirale gestellten Aufgabetelephon an ein in die Leitung einer inducirten Spirale gestelltes Empfangstelephon, so dass die inducirte Spirale die andere in sich schliesst. Diese Experimente haben zum Zweck, die Intensität der

von den telephonischen Strömen inducirten Ströme zu bestimmen und, was weit wichtiger ist, die Bestimmung der Intensität der in den Telephonen selbst erzeugten Extraströme. Aus den Resultaten dieser Reihe von Experimenten soll sich die Beziehung ergeben, welche zwischen diesen Intensitäten und der Dauer der Periode besteht.

Die zweite Reihe von Experimenten hat zum Gegenstand, den absoluten Werth der Intensität derjenigen Ströme zu bestimmen, welche nothwendig sind, um ein Empfangstelephon fühlbar zu erregen und zur Erscheinung zu bringen, auf welche Art und Weise diese Intensität mit der Aenderung der Tonhöhe sich selbst verändert.

Erster Theil.

Die von den telephonischen Strömen inducirten Ströme und die Extraströme im Telephon.

1. Einrichtung der Apparate zu den Experimenten.

Um die von einem telephonischen Strome auf andere Leitungen und auf sich selbst inducirten Ströme zu studiren und so den Einfluss zu würdigen, welchen die veränderlichen Perioden der Spirale und Elektromagnete auf die telephonische Transmission ausüben, bediente ich mich einer Einrichtung von Leitungen ähnlich der in einer Abhandlung beschriebenen, welche ich vorigen Januar die Ehre hatte der Turiner Akademie vorzulegen[1]).

In einer Station A (Fig. 1 Taf. VII) stellte ich ein Telephon F auf, in einer anderen Station B stellte ich zwei identische Telephone f' und f'', zwei isolirte, in einander liegende Spiralen S und S', vier Rheostaten R, r, r', r'' und einen Commutator C auf. Mittelst des Telephons F, der inneren Spirale S, des Rheostaten R und zweier die beiden Stationen verbindender Liniendrähte LL, $L'L'$ bildete ich eine Hauptleitung $FLLSL'L'$; mit dieser verband ich zwei derivirte Leitungen PrQ, $Pr'CQ$, von denen die eine den Rheostaten r, die andere den Rheostaten r' und vermittelst des Commutators C eines der beiden Telephone f' und f'' enthielt. Mit dem nämlichen Commutator C verband ich die äussere Spirale S' und den Rheostaten r'', so dass ich mit

1) Di una dimostrazione del principio di Helmholtz sulla tempera dei suoni. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino Vol. XIII, Sitzung vom 27. Januar 1878. — Repertorium Bd. 14 S. 497.



dieser Spirale, dem Rheostaten r'' und dem anderen Telephon eine geschlossene Leitung herstellen konnte.

Der dazu benutzte Commutator ist einer von denjenigen, die unter dem Namen „Schweizer Commutatoren" im Telegraphendienste gebraucht werden. Er besteht aus zwei Systemen von je vier isolirten Metallplatten, unter welchen sich mit Bolzen 1, 1, 1, 1 oder 2, 2, 2, 2 Metallverbindungen herstellen lassen.

Setzt man die Bolzen in die Stellung 1, 1, 1, 1, wo sie durch kleine Kreise vertreten sind, so bringt man das Telephon f' in die derivirte Leitung $Pr'CQ$ und das Telephon f'' in die Leitung der inducirten Spirale S'; setzt man dagegen die Bolzen in die Stellung 2, 2, 2, 2, wo dieselben mit Kreuzen bezeichnet sind, so bringt man das Telephon f'' in die derivirte Leitung r' und das Telephon f' in die inducirte Leitung. Der Kürze wegen bezeichnen wir mit Stellung 1 die erste, mit Stellung 2 die zweite Stellung des Communators.

Das Telephon F, welches als Aufgeber functioniren sollte, wurde auf einer Stütze befestigt, die es in horizontaler Stellung erhielt. Vor dasselbe wurden, ebenfalls horizontal, Orgelpfeifen gestellt, welche mittelst eines Blasebalges Luft erhielten. Die Entfernung zwischen der Orgelpfeife und dem Telephon konnte man verändern und damit auch die Intensität der den Telephonen übermachten Schalle. Dem Operator, welcher am Blasebalg arbeitete, gab man die nöthigen Zeichen vermittelst einer elektrischen Klingel. Zum gleichen Zwecke der entsprechenden Veränderung der Intensität der übermittelten Schalle diente der in die Hauptleitung gestellte Rheostat R.

Mit diesem Apparate wurden die folgenden Versuche gemacht. Auf ein durch die Klingel gegebenes Zeichen versetzte der in der Station A arbeitende Operator eine bestimmte Orgelpfeife in Thätigkeit, indem er die Intensität des Schalles während der ganzen Dauer des Versuches zu erhalten sich bemühte. Der Operator der Station B legte einen ziemlich bedeutenden Widerstand auf den Rheostaten r', z. B. 100 Einheiten Siemens, und einen bestimmten Widerstand r'' auf den Rheostaten r''. Hierauf brachte er das in der Leitung der Inductionsspirale liegende Telephon ans Ohr und liess vermittelst verabredeter, durch die Klingel gegebener Zeichen die Orgelpfeife vom Aufgabstelephon entfernen oder ihm sich nähern, bis der empfangene Schall kaum mehr hörbar war. Mit dem Rheostaten R brachte er sodann die Intensität des Schalles ganz an die Grenze der Vernehmlichkeit, was nach dem psychologischen

Gesetze Fechner's beim strengen Vergleiche der Intensitäten zweier Empfindungen als eine nothwendige Bedingung erscheint. Sodann hielt der Operator das andere Telephon, das in der derivirten Leitung $Pr'Q$ lag, an das nämliche Ohr, indem er den Widerstand des Rheostaten r allmählich verändern liess, bis der empfangene Schall abermals die Grenze der Vernehmbarkeit erreichte. Dadurch dass er wechselweise die Telephone f' und f'' ans Ohr hielt und fortwährend den Widerstand r zu verändern versuchte, versicherte er sich, dass die sehr geringen Intensitäten der durch die beiden Telephone empfangenen Schalle möglichst gleich waren. Nach mehrmaliger, mit geeigneten Ruhepausen gemachter Probe verzeichnete er die an den drei Rheostaten r, r' und r'' gelesenen Widerstände auf einer Tafel neben dem Namen der von der Orgelpfeife hervorgebrachten Note.

Wenn, wie dies besonders bei dem in der Inductionsleitung befindlichen Telephon vorkam, neben dem sich verlierenden Grundtone kräftigere hohe Obertöne hörbar wurden, so bemühte man sich so viel als möglich, diese nicht zu beachten und die Aufmerksamkeit einzig und allein auf den Grundton zu richten.

Nach Beendigung des Versuchs mittelst der Stellung 1 des Commutators wiederholte man denselben mit der gleichen Sorgfalt und in der gleichen Ordnung mittelst des Commutators in der Stellung 2.

War es nöthig, wie gerade in der ersten Reihe der Versuche, von denen die Rede sein wird, dass der Widerstand r'' mit r und r' in einer vorausbestimmten Beziehung stand, so machte man zunächst einen Versuch mit einem angenommenen Werthe r'', worauf dann, nachdem r und r' gefunden worden, unter Einschaltung dieser Werthe der Werth r'' bestimmt und die Operation wiederholt wurde.

Bei Bestimmung des Widerstandes r waltete oft einige Ungewissheit; um sie zu vermindern, wurde verfahren, wie folgt. Man fing damit an, r so klein zu machen, dass der durch das Telephon, welches in der derivirten Leitung stand, empfangene Schall nicht hörbar wurde, worauf r nach und nach vermehrt wurde, bis der Schall anfing gehört zu werden. Hernach gab man r einen grossen Werth, so dass der durch das genannte Telephon empfangene Schall sehr stark wurde, und verminderte sodann r allmählich, bis die Grenze der Vernehmbarkeit wieder erreicht war. Man hatte so zwei Werthe für r, zwischen denen sodann, wenn sie sich hinlänglich genähert hatten, der Mittelwerth genommen wurde.

Zwischen den auf diese Art bestimmten Widerständen und den Grössen, von welchen die Intensitäten der in die Spiralen und Empfangstelephone inducirten Ströme abhängen, bestehen Verhältnisse, mit welchen diese Grössen sich berechnen lassen. Um diese Verhältnisse zu finden, berechnen wir zuerst als Function der Intensität des durch das Aufgabstelephon hervorgebrachten Hauptstromes und der Widerstände die Intensität des abgeleiteten Stromes, welcher eines der Empfangstelephone f' und f'', z. B. f', beeinflusst, und dann die Intensität des in die Spirale S' inducirten Stromes, welcher das andere Empfangstelephon f'' in Thätigkeit versetzt.

Um die Intensität des derivirten Stromes zu finden, wollen wir die beiden Lehrsätze Kirchhoff's auf den Punkt P (Fig. 1) und den Perimeter $PrQf'r'P$ beziehen. Nennen wir J, i, i' die Intensitäten des Hauptstromes, des in der derivirten Leitung PrQ und in der anderen $Pr'f'Q$ laufenden Stromes (periodische Functionen der Zeit), so ergibt sich aus dem ersten Lehrsatze Kirchhoff's, auf den Punkt P angewandt:

$$J = i + i'.$$

Nennen wir die Widerstände beider Derivationsleitungen r und r' und bezeichnen die durch das Empfangstelephon f' hervorgebrachte elektromotorische Kraft mit $u'\frac{di'}{dt}$, so folgt aus dem zweiten Lehrsatze Kirchhoff's, auf den Perimeter $PrQf'r'P$ angewandt:

$$ir - i'r' = u'\frac{di'}{dt}.$$

Wird i in den beiden Gleichungen eliminirt, so erhalten wir

$$\frac{di'}{dt} + \frac{r+r'}{u'}i' = \frac{r}{u'}J.$$

Integrirt man, so wird

$$i' = e^{-\frac{r+r'}{u'}t}\left(\frac{r}{u'}\int Je^{\frac{r+r'}{u'}t}dt + C\right).$$

Welches immer nun die periodische Function J sei, sie lässt sich in eine trigonometrische Reihe entwickeln; dem ersten Gliede derselben entspricht der einfache Grundton des durch das Telephon empfangenen zusammengesetzten Schalles. Da bei den Versuchen nur auf den

Grundton geachtet und von den übrigen einfachen Tönen absichtlich so viel als möglich abgesehen wird, so haben wir nur jenes erste Glied zu berücksichtigen. Demnach schreiben wir einfach

$$J = A \sin \frac{2T}{T} t. \qquad (1$$

Wir erhalten hieraus

$$\int J e^{\frac{r+r'}{u'} t} dt = A e^{\frac{r+r'}{u'} t} \frac{\frac{r+r'}{u'} \sin \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t}{\left(\frac{r+r'}{u'}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2},$$

oder, wenn wir setzen $\tan \frac{2\pi}{T} \beta' = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{u'}{r+r'}$:

$$\int J e^{\frac{r+r'}{u'} t} dt = A e^{\frac{r+r'}{u'} t} \frac{\sin \frac{2\pi}{T}(t-\beta')}{\sqrt{\left(\frac{r+r'}{u'}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}}.$$

Somit

$$i' = A \frac{r}{u'} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{T}(t-\beta')}{\sqrt{\left(\frac{r+r'}{u'}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}} + C e^{-\frac{r+r'}{u'} t}.$$

Nimmt t zu, so nähert sich das zweite Glied dieses Ausdruckes der Null, und wird t sehr gross, so bleibt nur das erste Glied zu betrachten; weil nun aber dieses erste Glied, das einzige periodische, einzig und allein auf das Telephon wirkt, können wir ohne weiteres schreiben

$$i' = A r \frac{\sin \frac{2\pi}{T}(t-\beta')}{\sqrt{(r+r')^2 + \left(\frac{2\pi u'}{T}\right)^2}}. \qquad (2$$

Um die Intensität i'' des Stromes, welcher, in die Spirale S inducirt, das zweite Empfangstelephon f'' beeinflusst, zu berechnen, benennen wir mit r'' den Widerstand der Leitung $S'f''$ dieses Stromes, mit k das Potential der inducirenden Spirale S auf die inducirte S', mit P das Potential der inducirten Spirale S' auf sich selbst und mit u'' die beim Telephon f'' dem u' entsprechende Grösse.

Wir haben dann

$$r'' i'' = k \frac{dJ}{dt} - (u'' + P) \frac{di''}{dt}.$$

Und integriren wir

$$i'' = e^{-\frac{r''}{u''+P} t} \left(\frac{k}{u'' + P} \int \frac{dJ}{dt} e^{\frac{r''}{u''+P} \cdot t} dt + C \right).$$

Nun ist gemäss (1)

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{2\pi}{T} A \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

folglich

$$\int \frac{dJ}{dt} e^{\frac{r''}{u''+P} t} dt = \frac{2\pi}{T} A e^{\frac{r''}{u''+P} t} \frac{\frac{r''}{u''+P} \cos \frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t}{\left(\frac{r''}{u''+P}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2},$$

oder

$$= \frac{2\pi}{T} A e^{\frac{r''}{u''+P} t} \frac{\sin \frac{2\pi}{T} (t + \beta'')}{\sqrt{\left(\frac{r''}{u''+P}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}},$$

woselbst

$$\tan \frac{2\pi}{T} \beta'' = - \frac{T r''}{2\pi (u'' + P)}.$$

Somit

$$i'' = A \frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{T} (t + \beta'')}{\sqrt{r''^2 + \left(2\pi \frac{u'' + P}{T}\right)^2}} + C e^{-\frac{r''}{u''+P} t}.$$

Wie wir bei Ermittelung des Werthes i' gethan, so können wir das nicht periodische Glied $Ce^{-\frac{r''}{u''+P} \cdot t}$, welches mit der Zunahme von t sich schnell der Null nähert und jedenfalls auf die in den Telephonen vorkommenden Erscheinungen ohne Einfluss ist, weglassen. Sonach schreiben wir einfach

$$i'' = A \frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{T} (t + \beta'')}{\sqrt{r''^2 + \left(2\pi \frac{u'' + P}{T}\right)^2}}. \tag{3}$$

Nennen wir η' und η'' die Maximalwerthe der periodischen Intensitäten i' und i'', so haben wir

$$\left.\begin{aligned} \eta' &= \frac{A r}{\sqrt{(r+r')^2 + \left(\frac{2\pi u'}{T}\right)^2}} \\ \eta'' &= A\frac{2\pi k}{T}\cdot\frac{1}{\sqrt{r''^2 + \left(2\pi\frac{u''+P}{T}\right)^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Gleichungen (2) und (3) können wir einfacher schreiben:

$$i' = \eta' \sin\frac{2\pi}{T}(t-\beta'), \qquad i'' = \eta'' \sin\frac{2\pi}{T}(t+\beta''). \tag{5}$$

Die Ströme i' und i'' setzen die beiden Telephone f' und f'' in Bewegung, und deren Plättchen theilen der Luft Erschütterungen mit, deren Amplitude sich beziehungsweise ausdrücken lässt mit

$$v'\eta' \text{ und } v''\eta'',$$

wo v' und v'' Functionen von T sein können, für einen und denselben Werth von T jedoch von den Widerständen der Leitungen unabhängig sind. Wenn nun die beiden Telephone Schalle von gleicher Intensität hervorbringen, wie es bei jedem der beschriebenen Versuche geschieht, so müssen die Amplituden der Erschütterungen, welche sie der Luft mittheilen, gleich sein; somit

$$v'\eta' = v''\eta''.$$

Setzt man für η' und η'' deren Werthe (4), so erhält man

$$v'A\frac{r}{\sqrt{(r+r')^2+\left(\frac{2\pi u'}{T}\right)^2}} = v''A\frac{2\pi k}{T}\cdot\frac{1}{\sqrt{r''^2+\left(2\pi\frac{u''+P}{T}\right)^2}}.$$

Bezeichnen wir die Werthe A, r, r', r'', die man in einem mit der Stellung 1 des Commutators gemachten Versuche erhält, mit dem Index 1 und die Werthe der nämlichen Grössen, die in einem mit demselben Schalle, aber mit dem Commutator in der Stellung 2 gemachten Versuche erlangt wurden, mit dem Index 2; erinnern wir uns dabei, dass die Telephone f' und f'', indem wir von einer Stellung des Commutators zur andern übergehen, gewechselt werden und dass deshalb auch in den bezüglichen Formeln v' und u' in v'' und u''

umgeändert werden müssen. Dadurch ergeben sich folgende zwei Gleichungen:

$$v' A_1 r_1 \frac{1}{\sqrt{(r_1+r_1')^2+\left(\frac{2\pi u'}{T}\right)^2}} = v'' A_1 \frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_1''^2+\left(2\pi\frac{u''+P}{T}\right)^2}}$$

$$v'' A_2 r_2 \frac{1}{\sqrt{(r_2+r_2')^2+\left(\frac{2\pi u''}{T}\right)^2}} = v' A_2 \frac{2\pi k}{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_2''^2+\left(2\pi\frac{u'+P}{T}\right)^2}}.$$

Werden diese Glied für Glied multiplicirt, so entsteht

$$\frac{r_1 r_2}{\sqrt{(r_1+r_1')^2+\left(\frac{2\pi u'}{T}\right)^2}\sqrt{(r_2+r_2')^2+\left(\frac{2\pi u''}{T}\right)^2}} =$$

$$= \frac{4\pi^2 k^2}{T^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_1''^2+\left(2\pi\frac{u''+P}{T}\right)^2}\sqrt{r_2''^2+\left(2\pi\frac{u'+P}{T}\right)^2}}$$

und folglich

$$k^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} r_1 r_2 \frac{\sqrt{r_1''^2+\left(2\pi\frac{u''+P}{T}\right)^2}\sqrt{r_2''^2+\left(2\pi\frac{u'+P}{T}\right)^2}}{\sqrt{(r_1+r_1')^2+\left(\frac{2\pi u'}{T}\right)^2}\sqrt{(r_2+r_2')^2+\left(\frac{2\pi u''}{T}\right)^2}} \cdot \quad (6$$

Das ist nun die gesuchte Beziehung. Setzt man in dieselbe für die Widerstände Werthe, welche durch auf besagte Weise angestellte Versuche gefunden worden, so kann man davon sämmtliche Gleichungen ableiten, die nöthig sind, um für eine Reihe verschiedener für T gegebener Werthe die Werthe k, P, u', u'' zu bestimmen, welche letzteren die Haupterfordernisse für ein vollständiges Studium der Inductionserscheinungen in den Spiralen und Telephonen sind.

2. Beziehung zwischen der Dauer T der Periode und der Intensität der in der Spirale S' inducirten Ströme.

Wären in der Inductionsspirale S' keine Extraströme vorhanden, könnte man also setzen $P = O$, so hätten wir die Gleichung (6) in folgender Form:

$$k^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} r_1 r_2 \frac{\sqrt{r_1''^2+\left(\frac{2\pi u''}{T}\right)^2}\sqrt{r_2''^2+\left(\frac{2\pi u'}{T}\right)^2}}{\sqrt{(r_1+r_1')^2+\left(\frac{2\pi u'}{T}\right)^2}\sqrt{(r_2+r_2')^2+\left(\frac{2\pi u''}{T}\right)^2}}.$$

Und setzt man bei der Ausführung der Experimente $r_1' + r_1 = r_2''$, $r_2 + r_2' = r_1''$, so gewinnt obige Formel die sehr einfache Form

$$k = \frac{T}{2\pi} \sqrt{r_1 r_2}.$$

Die Grösse

$$\frac{T}{2\pi} \sqrt{r_1 r_2}$$

hätte in diesem Falle einen constanten Werth, welcher dem Potential k der inducirenden Spirale S auf die inducirte Spirale S' gleich wäre.

Wir können uns im voraus einen Begriff machen von dem Einflusse der Extraströme, indem wir sehen, wie diese Grösse mit der Veränderung von T sich selbst verändert.

Schreiben wir

$$z = \frac{T}{2\pi} \sqrt{r_1 r_2}. \tag{7}$$

Wären keine Extraströme vorhanden, hätten die veränderlichen Perioden, die von jenen abhängig sind, im Vergleich zu T unmerkliche Dauer, so müsste z constant werden, und zeichnet man eine Linie, deren Punkte die Werthe von T zu Abscissen und die denselben entsprechenden Werthe von z zu Ordinaten haben, so sollte sich eine gerade, mit der Achse der Abscissen parallele Linie ergeben.

Wenn hingegen P nicht Null ist, wird man für z je nach den Werthen von T verschiedene Werthe finden, und stellt man diese als Ordinaten einer Linie dar, so findet man anstatt einer geraden eine krumme Linie, welche zur Gleichung hat

$$z^2 = k^2 \frac{\sqrt{r_1''^2 + \left(\frac{2\pi u''}{T}\right)^2} \sqrt{r_2''^2 + \left(\frac{2\pi u'}{T}\right)^2}}{\sqrt{r_1''^2 + \left(2\pi \frac{u'' + P}{T}\right)^2} \sqrt{r_2''^2 + \left(2\pi \frac{u' + P}{T}\right)^2}}. \tag{8}$$

Eine erste Reihe Versuche hatte zum Zweck, die Form dieser Linie zu finden, welche uns, während sie uns belehren wird, wie weit die Hypothese $P = O$ von der Richtigkeit abweicht, wichtige Anhaltspunkte über die Beziehung liefern soll, welche zwischen der Intensität der in der Spirale S' inducirten Ströme und der Dauer der Periode T besteht.

Es wurden für 11 Töne verschiedener, zwischen Re_3 und Fa_6 liegender Höhen Versuche angestellt. Der höchste Ton, Fa_6, liegt sehr nahe am obersten in der Musik angewandten Tone und übertrifft an Höhe die höchsten charakteristischen Töne der Vocale; man hätte ihn

schwerlich überschreiten können. Die Versuche konnten auch nicht unter den Ton Re_3 erweitert werden, und zwar wegen der Schwierigkeit, die Intensität der aufs äusserste der Vernehmlichkeit gebrachten Grundtöne bei einem Gemische viel kräftigerer hoher harmonischer Töne zu vergleichen, welche letzteren wir bei der Benutzung von Orgelpfeifen nicht eliminiren konnten.

Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse der Versuche. Die Widerstände, welche daselbst verzeichnet sind, sind die Totalwiderstände der bezüglichen Leitungen. Wie aus der Besichtigung der Werthe r_1'' und r_2'' zu entnehmen ist, legte man jedem Versuche zu Grunde $r_1 + r_1' = r_2''$; $r_2 + r_2' = r_1''$, wie in der Formel (8) vorausgesetzt wird. Die Widerstände sind in Siemens Einheiten ausgedrückt.

Töne	r_1	r_1'	r_1''	r_2	r_2'	r_2''
Re_3	7	120	130	5	125	127
Fa_3	4	120	137	12	125	124
Sol_3	7,5	120	133	8	125	127,5
La_3	6,5	120	136,5	11,5	125	126,5
Do_4	8,5	120	135	10	125	128,5
Fa_4	5	120	147	22	125	125
La_4	8	120	143	18	125	128
Fa_5	10	120	149	24	125	130
Do_6	12	120	145	20	125	132
Re_6	6	120	165	40	125	126
Fa_6	10	120	149	24	125	130

Mittelst dieser Werthe r, r_2, r_1', r_2' und der in der zweiten Columne der folgenden Tabelle verzeichneten Werthe T wurden die Werthe z, die in der dritten Columne derselben stehen, berechnet.

Töne	T	z	$\frac{z}{T}$
Re_3	0,003367"	0,003170	0,9416
Fa_3	0,002841	0,003133	1,103
Sol_3	0,002525	0,003113	1,233
La_3	0,002273	0,003127	1,376
Do_4	0,001894	0,002779	1,467
Fa_4	0,001420	0,002371	1,669
La_4	0,001136	0,002170	1,910
Fa_5	0,0007102	0,001751	2,462
Do_6	0,0004735	0,001167	2,466
Re_6	0,0004209	0,001039	2,469
Fa_6	0,0003551	0,000875	2,466

Indem als Abscissen Längen genommen wurden, welche zu den in der zweiten Columne verzeichneten Werthen T proportional sind, und als Ordinaten mit den in der dritten Columne dieser Tabelle enthaltenen Werthen z proportionale Längen, zog man die in Fig. 3 gezeichnete Linie zz. Hiebei nahm man eine Länge von 5mm an, um die Dauer 0,0001″ auszudrücken, oder einen Werth $z = 0{,}0001$.

Diese Zahlen und diese Linie zeigen uns, wie die Intensität derjenigen Schalle, die man durch ein in einer inducirten Leitung eingeschaltetes Telephon empfängt, sich zur Intensität der Schalle verhalten muss, welche unmittelbar durch ein in der inducirenden Leitung eingeschaltetes Telephon empfangen werden.

Zufolge der Gleichungen (4), in welchen man schreiben muss

$$r_1 + r_1' = r_2'', \qquad r_2 + r_2' = r_1'',$$

wird Gleichung (8)

$$\frac{2\pi z}{T} = \frac{\sqrt{r_1'' r_2''}}{\sqrt{r_1' r_2'}}.$$

Der Werth $\frac{z}{T}$ ist sonach dem Verhältnisse proportional, welches mit einem Mitteltelephon, worin die Einwirkungen der Constructionseigenthümlichkeiten theilweise entfernt sind, zwischen der Intensität des inducirten und derjenigen des inducirenden Stromes besteht. Es genügt deshalb, zu beobachten, wie mit T der Werth $\frac{z}{T}$ sich verändert, oder, was dasselbe ist, wie mit T die trigonometrische Tangente des Winkels sich verändert, den der vom Anfangspunkte 0 (Fig. 2) nach einem Punkte M der Curve z gezogene Radiusvector mit der Abscissenachse bildet.

Hierin liegt die Antwort auf eine Frage, die für die Theorie des Telephons und für diejenige der Klangfarbe etwelches Interesse haben dürfte. In der Abhandlung über die Klangfarbe, die ich bereits anzuführen Gelegenheit hatte[1]), bemerkte ich, dass, wenn von dem nämlichen Aufgabetelephon Schalle an zwei Empfangstelephone übermacht werden, wovon das eine in derselben Leitung, welche das Aufgabetelephon enthält, das andere dagegen in einer von jener inducirten Leitung steht, wie bei den gegenwärtigen Versuchen,

1) Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino Vol. XIII, Sitzung vom 27. Januar 1878 — Repertorium Bd. 14 S. 497.

das Verhältniss zwischen der Intensität des durch Induction mit dem zweiten Telephon empfangenen und der Intensität des durch das erste direct empfangenen Schalles mit der Steigerung der Tonhöhe wächst. Dabei bemerkte ich, wie hieraus eine Verschiedenheit in der Farbe beider Schalle entstehen müsse, da in dem durch Induction empfangenen Schalle im Vergleich zum andern die höheren Elementartöne verstärkt werden. Schliesslich führte ich einige einfache beziehentliche Versuche an, mit denen man diesen Unterschied bemerklich machen konnte. Aber nicht alle diejenigen, welche mit ähnlich sich verhaltenden Telephonen experimentirten, beobachteten diese Thatsache; es gab sogar solche, die daraus, dass besagte Farbenverschiedenheit nicht vorhanden sei, auf die Theorie des Telephons bezügliche Deductionen machten[1]). Nun aber nimmt das Verhältniss zwischen der Intensität des durch Induction und derjenigen des durch directe Transmission empfangenen Schalles zu oder ab, je nach der Zu- oder Abnahme von $\frac{z}{T}$. In der letzten Columne der vorstehenden Tabelle verzeichnete ich die aus den Versuchen sich ergebenden Werthe von $\frac{z}{T}$. Wie zu ersehen ist, nehmen diese Werthe innerhalb der Grenzen unserer Versuche mit der Abnahme von T zu; so ist es denn innerhalb der Grenzen unserer Versuche richtig, dass die hohen Töne bei der Transmission durch Induction im Vergleiche zu dem, was sie bei directer Transmission wären, verstärkt erscheinen. Und da die in der Bildung der Klangfarbe wichtigsten musikalischen Töne, die höchsten der Vocale mitgerechnet, unter der Höhe Fa_5 stehen, so ist richtig, was ich als Ergebniss einfacher beziehentlicher Versuche behauptete: dass nämlich in dem durch Induction empfangenen Schalle die höheren harmonischen Töne verhältnissmässig grössere Intensität haben als in dem durch directe Transmission empfangenen.

Der Vortheil, den die hohen Töne über die tiefen in der Transmission durch Induction haben, besteht so lange, als der Winkel MOT (Fig. 3) zunimmt, indess die Abscisse OT des Punktes M der Curve z abnimmt. Wenn für einen bestimmten Werth von T der Radiusvector OM Tangente der Curve z würde und der Berührungspunkt kein Flexionspunkt wäre, so erschiene der jenem Werthe T entsprechende Schall unter allen als der am meisten verstärkte. In der Figur sieht man, dass der Radiusvector in der Nähe des dem Tone Fa_5 entspre-

1) L. Hermann, über telephonisches Hören mit mehrfachen eingeschobenen Inductionen (Pflüger's Arch. Bd. 15 S. 314, 1877).



chenden Punktes Tangente der Curve ist, wie auch aus den numerischen Werthen $\frac{z}{T}$ ersehen werden kann. Ueber dem Fa_6 sind drei Fälle möglich: entweder fällt die Linie z mit dem Radiusvector OFa_6 zusammen, oder sie bleibt unter demselben, oder aber sie erscheint über ihm. Im ersten Falle, welcher der wahrscheinlichste ist, werden alle Töne über der Höhe Fa_6 durch die Induction auf gleiche Weise verstärkt; im dritten Falle würde dies mehr, im zweiten weniger geschehen, so dass Fa_6 unter allen Tönen derjenige wäre, welcher in der Transmission durch Induction am meisten hervortritt.

Um die Veränderungsweise von $\frac{z}{T}$ bemerkbarer darzustellen, wurden die Werthe dieses Verhältnisses durch die Ordinaten der Linie $\frac{z}{T}$ (Fig. 2) zur Anschauung gebracht. Als Masseinheit legte man dieser Construction für die Ordinaten eine Länge von 5^{cm} zu Grunde.

3. Bestimmung des Potentials k der inducirenden Spirale S auf die inducirte Spirale S'.

Bestimmung durch Versuche mit Telephonen.

Die Ergebnisse obiger Versuche, die durch die Linie z der Figur 2 dargestellt sind, können dazu dienen, uns einen Näherungswerth des Potentials k zu geben.

Der Ausdruck

$$z = k\left[\frac{\left[r_2''^2 + \left(\frac{2\pi u''}{T}\right)^2\right]\left[r^{2''2} + \left(\frac{2\pi u'}{T}\right)^2\right]}{\left[r_1''^2 + \left(2\pi\frac{u'' + P}{T}\right)^2\right]\left[r_2''^2 + \left(2\pi\frac{u' + P}{T}\right)^2\right]}\right]^{\frac{1}{4}}$$

zeigt, dass, welches immer die Werthe u', u'', P sein mögen, der Werth der in Klammer stehenden Grösse, welche immer kleiner als 1 ist, sich der Einheit nähert, wenn T zunimmt. Ist T sehr gross, so convergirt z, das immer kleiner ist als k, gegen k; ist $T = \infty$, so ist $z = k$. Aus demselben Ausdrucke leitet man ebenfalls leicht ab, dass die Derivirte $\frac{dz}{dT}$ mit der Zunahme von T abnimmt und Null wird für $T = \infty$. Es hat somit die Linie, welche die Werthe z darstellt, eine mit der Abscissenachse T parallele Asymptote, und die Ordinate derselben ist k.

Nun beweist die in Fig. 2 entworfene Curve, wenn sie auch durch eine geringe Anzahl versuchsweise gefundener Punkte bestimmt ist, deutlich genug, dass diese grösste Ordinate nicht viel grösser sein kann als die direct bestimmte Ordinate des letzten Punktes, welches dem Re_3 entspricht. Wahrscheinlich zwar mit einem Minusfehler, gewiss aber mit einem geringen, dürfen wir sonach annehmen

$$k = 0{,}00317.$$

Wollen wir k in absoluten Einheiten ausdrücken, so sei bemerkt, dass sich aus der Beziehung

$$k \frac{dJ}{dt} = ri,$$

welche die Derivirte der Intensität des inducirenden Stromes J mit der Intensität i des inducirten Stromes verbindet, ergibt, dass k von dem Einheitsmasse unabhängig ist, das zur Messung der Stromintensitäten benutzt wird, und nur von der Einheit des Widerstandes abhängt. Die Grösse k hat die Dimensionen eines mit einer Zeit multiplicirten Widerstandes; ist das anzuwendende Masssystem das elektromagnetische, wo die Widerstände die Dimensionen einer Geschwindigkeit haben, so hat k die Dimensionen einer Länge. Um deren Werth in Zahlen zu bestimmen, multipliciren wir den Werth 0,00317 mit dem Werthe der Siemens-Einheit in elektromagnetischem Masse. Nehmen wir als Werth für die Siemens-Einheit

$$0{,}9537 \cdot 10^9 \frac{\text{Centimeter}}{\text{Secunden}}$$

als Mittel zwischen den von Kohlrausch[1]) und Lorenz[2]) gegebenen Werthen, so bekommen wir

$$k = 0{,}00302006 \cdot 10^{9\,\text{cm}} = 30201^{\text{m}}.$$

Bestimmung des Potentials k durch directe, mit dem Galvanometer vorgenommene Messungen.

Es ist interessant, dieses Ergebniss mit demjengen einer directen, ohne Benutzung des Telephons vorgenommenen Messung vergleichen zu können. Zu diesem Zwecke kann also verfahren werden: Man setzt die innere inducirende Spirale S in die Leitung einer galvanischen Säule und die äussere inducirte S' in die Leitung eines Galvanometers; eine Tangentenbussole, die man zuvor mit einem Galvanometer

1) Kohlrausch: Pogg. Ann. Ergänzungsbd. 6 (1873).

2) Lorenz: Pogg. Ann. Bd. 149 S. 251 (1873).

verglichen, wird in die inducirende Leitung gebracht, sowie ein Rheotom, um die Leitung rasch zu schliessen und zu unterbrechen; man misst sodann mit der Tangentenbussole die grösste Intensität des mit der galvanischen Säule gegebenen inducirenden Stromes und mit dem Galvanometer das Quantum der Elektricität, welches bei jedem Schliessen und Oeffnen der inducirenden Leitung in die inducirte Leitung übertragen worden ist. Wird die grösste Intensität des inducirenden Stromes I genannt, Q das bei jedem Schliessen oder Oeffnen des inducirenden Stromes durch das Galvanometer in die inducirte Leitung geführte Quantum Elektricität, r der Widerstand der inducirten Leitung und k in seiner bisherigen Bedeutung erhalten, so hat man bekanntlich

$$kI = rQ$$

und folglich

$$k = \frac{rQ}{I}.$$

Die Versuche, die ich anstellte, um obiges Verfahren durchzuführen, sind im Wesentlichen folgende:

Vorerst graduirte ich das Galvanometer und verglich dessen Angaben mit denjenigen einer Tangentenbussole von Gaugain. Hiezu begnügte ich mich die Tangentenbussole sammt einem Rheostaten in die Hauptleitung einer galvanischen Säule von 6 Elementen Daniell einzuschalten und zwei derivirte Leitungen einzurichten, deren eine mit einem Rheostaten von kleinen Widerständen gebildet war, während die andere zugleich mit einem Rheostaten von grossen Widerständen das Galvanometer enthielt, welches studirt werden sollte. Indem ich sodann die Widerstände auf den Rheostaten zweckmässig verändern liess, konnte ich die Scala des Galvanometers bilden und den Reductionscoëfficienten desselben bestimmen, d. h. den Werth, welcher dem Coëfficienten C gegeben werden muss, um, wenn die Abweichung α der Nadel des Galvanometers sehr gering ist, die Intensität I des Stromes mit der in diesem Falle richtigen Formel

$$I = C\alpha$$

berechnen zu können.

Ich fand, dass, wenn man den Reductionscoëfficienten der Tangentenbussole gleich 1 nimmt, d. h. wenn man den Intensitäten des Stromes eine derartige Masseinheit zu Grunde legt, dass die Intensität des Stromes, welche in der Tangentenbussole die Abweichung ϑ bewirkt, durch

$$i = \tan \vartheta$$

bezeichnet wäre und sich α in Theilen des Halbmessers ausgedrückt denkt, als Folgerung sich ergibt:

$$C = \frac{1}{42986}.$$

Hierauf wurden zwei Leitungen hergestellt, eine inducirende und eine inducirte. In der ersteren standen die galvanische Säule von 6 Elementen Daniell, die Tangentenbussole, die innere inducirende Spirale S, ein Rheostat und ein Unterbrecher, um die Leitung rasch schliessen oder öffnen zu können. Die andere bestand aus der äusseren Spirale S' und dem Galvanometer mit 2^{m} Kupferdraht von 1^{mm} Durchmesser für die Verbindungen.

Es wurde damit angefangen, die inducirende Leitung zu schliessen und die Abweichung der Nadel der Tangentenbussole zu lesen: sie betrug $10^{0}\ 30'$. Ein zweites Mal wurde dieselbe nach den Inductionsversuchen gelesen, von welchen nun die Rede ist, und wieder mit dem Ergebnisse $10^{0}\ 30'$. Hieraus liess sich schliessen, dass der inducirende Strom während der Inductionsversuche immer dieselbe Maximal-Intensität erreichte, und zwar eine solche, die nöthig war, um an der Nadel der Tangentenbussole die Abweichung von $10^{0}\ 30'$ zu bewirken. Diese Maximalintensität beträgt gemäss der von uns gewählten Masseinheit

$$I = \tan \cdot 10^{0}\ 30',$$

welcher Werth in den Ausdruck k einzusetzen ist.

Die Bestimmung des Quantums Elektricität, welches bei jedem Schliessen und Oeffnen der inducirenden Leitung durch das Galvanometer hindurchging, erfolgte auf dem Wege der Multiplication. Wurde die inducirende Leitung geschlossen, so erhielt die Nadel des Galvanometers einen leichten Stoss und kehrte nach der Abweichung gegen Null zurück; während sie durch den Nullpunkt hindurchging, wurde die inducirende Leitung geöffnet und die Nadel erfuhr eine ähnliche, doch der vorhergegangenen entgegengesetzte Erregung, in Folge deren sie mehr als bei der ersten Erregung in entgegengesetzter Richtung abwich; wenn die Nadel abermals zu Null zurückkehrte, wurde die Leitung neuerdings geschlossen und in besagter Ordnung fortgefahren. Nach einigen Oscillationen gewann die Weite der Abweichungen der Nadel einen grössten Werth, welcher constant blieb. Ist A die grösste Entfernung der Nadel, die auf diese Weise erhalten wird, so leitet man daraus bekanntlich den Winkel α ab, um den die Nadel durch

einen einfachen Schluss der inducirenden Leitung abgelenkt worden wäre, wenn keine Dämpfung stattgefunden hätte, und zwar mittelst der Formel

$$\alpha = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) k^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tan} \frac{\pi}{2{,}3026\,\lambda}}.$$

Aus dem Winkel α ergibt sich sodann das Quantum der Elektricität, welches bei jeder Induction durch den Multiplicator des Galvanometers hindurchgeht, mittelst der Formel

$$Q = C \frac{t}{\pi} \alpha k^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,tan} \frac{\pi}{2{,}3026\,\lambda}}.$$

In diesen Formeln ist k der Dämpfungscoëfficient des Galvanometers, λ ist der gemeine Logarithmus von k oder das logarithmische Decrement und t die Dauer einer Oscillation der Nadel des Galvanometers.

Man fand

$$\lambda = 0{,}2358$$
$$k = 1{,}721$$
$$A = 0{,}1047$$
$$t = 13{,}28''.$$

Und mit diesen in die angeführten Formeln eingesetzten Ergebnissen wurde berechnet

$$\alpha = 0{,}02793$$
$$Q = 0{,}000003442.$$

Was den Widerstand r der inducirten Leitung betrifft, so bestand derselbe aus dem Widerstande der inducirten Spirale = 7,7 S. E., dem Widerstande des Multiplicators des Galvanometers = 167 S. E. und dem Widerstande der Verbindungsdrähte = ca. 0,3 S. E. Es ergab sich daraus r = 175 S. E.

Bringt man diese Werthe für I, Q und r in die Formel

$$k = \frac{r\,Q}{I},$$

so findet man

$$k = \frac{175 \; 0{,}000003442}{\tan \cdot 10^{0}\,30'}$$

oder

$$k = 0{,}003249.$$

Um k in absoluten centimetrischen Einheiten zu erhalten, multipliciren wir diese Zahl mit $0{,}9507 \cdot 10^9$ und erhalten so

$$k = 3095890^{\text{cm}}.$$

Der Unterschied zwischen diesem und dem durch die mittelst der Telephone gemachten Versuche gefundenen Werthe ist 75830 und

das Verhältniss dieses Unterschiedes zu dem grössten der beiden gefundenen Werthe

$$\frac{75830}{3095890} = 0,0245.$$

Berücksichtigt man die Fehlerquellen, welche die Versuche obiger Art begleiten, so darf die Uebereinstimmung der zwei Resultate als vollkommen befriedigend betrachtet werden.

4. Intensität der Extraströme.

Mit der Formel (6) lassen sich auch die Werthe u', u'' und P festsetzen und dadurch die Intensitäten der Extraströme nicht nur in der inducirten Spirale S', sondern auch, was für uns von grösserem Interesse ist, in den Telephonen selbst bestimmen.

Wegen der Form der Formel (6) würde aber die Berechnung ziemliche Schwierigkeiten verursachen und (wenn an die beschränkte Anzahl der Töne gedacht wird, mit denen man experimentiren konnte) äusserst unsicher sein. Die Schwierigkeiten und die Unsicherheit lassen sich bedeutend vermindern, ohne in gleichem Masse die theoretische Wichtigkeit der Untersuchung zu verringern, indem zunächst von dem, was in den bei den Versuchen gebrauchten Telephonen Zufälliges vorkommt, abgesehen wird, indem man für den Augenblick das Studium der Störungen bei Seite lässt und sich nur die Hauptgesetze zum Ziele setzt. Stellen wir uns anstatt der beiden Empfangstelephone f' und f'' zwei vollkommen identische Telephone vor. Anstatt der beiden Unbekannten u' und u'' haben wir so eine einzige Unbekannte u, deren Werth ganz gewiss zwischen den Werthen u' und u'' liegt. Bezeichnen wir mit r, r', r'' Mittelwerthe für die Widerstände, so können wir die Gleichung (6) in der folgenden einfacheren Form schreiben:

$$k^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} r_1 r_2 \frac{\left(\frac{r'' T}{2\pi}\right)^2 + (u+P)^2}{\left(\frac{r+r'}{2\pi} T\right)^2 + u^2}. \tag{9}$$

Da $r + r' = r''$, kann man weiter vereinfachen

$$k^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} r_1 r_2 \frac{\left(\frac{r'' T}{2\pi}\right)^2 + (u+P)^2}{\left(\frac{r'' T}{2\pi}\right)^2 + u^2}. \tag{9'}$$

Nun können wir setzen $u^2 = x$, $(u + P)^2 = y$, und so die Gleichung (9′) in eine Gleichung ersten Grades mit zwei Unbekannten verwandeln. Mit den Werthen der versuchsweise ermittelten Widerstände für die Werthe T, deren wir uns in den vorhergehenden Betrachtungen bedienten, und mittelst der Methode der kleinsten Quadrate kann man sodann die wahrscheinlichsten Werthe für x und y und hernach diejenigen für u und P suchen. Diese Berechnung führt nun für die Unbekannte y zu einem negativen und folglich für P zu einem imaginären Werthe. Das kommt daher, dass u von T nicht unabhängig ist, wie bei der angedeuteten Methode zu vermuthen ist.

Es muss sonach u als eine Function von T betrachtet werden und es sind dessen, verschiedenen Werthen von T entsprechende Grössen aufzusuchen. Hiezu ist hinreichend, ausser den schon gemachten Erfahrungen eine zweite Reihe von mit denselben Schallen, aber mit verschiedenen Widerständen angestellten Versuchen zur Benutzung bereit zu haben. Giebt man in der zweiten Reihe von Experimenten den Widerständen r'' die Werthe wieder, die sie in der ersten Reihe hatten, und bezeichnet man mit den griechischen Buchstaben ϱ und ϱ' die neuen auf die beiden derivirten Leitungen gebrachten Mittelwiderstände, so erhält man aus (9)

$$k^2 = \frac{T^2}{4\pi^2}\varrho_1\varrho_2 \frac{\left(\frac{r'' T}{2\pi}\right)^2 + (u+P)^2}{\left(\frac{\varrho + \varrho'}{2\pi} T\right)^2 + u^2}. \tag{10}$$

Für jeden Werth T hat man so zwei Gleichungen (9) und (10), welche hinreichen, um u und P zu bestimmen.

Setzt man

$$u^2 = x, \qquad (u+P)^2 = y \tag{11}$$

und schreibt der Einfachheit halber

$$b = z^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} r_1 r_2, \qquad \beta = \frac{T^2}{4\pi^2}\varrho_1\varrho_2,$$

$$a = \left(\frac{r'' T}{2\pi}\right)^2, \qquad \alpha = \left(\frac{\varrho + \varrho'}{2\pi} T\right)^2,$$

so entstehen die zwei Gleichungen

$$k^2 x - by + a(k^2 - b) = 0$$
$$k^2 x - \beta y + \alpha k^2 - a\beta = 0,$$



die

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{ab - a\beta}{\beta - b} \\ y &= k^2 \frac{\alpha - a}{\beta - b} - a \end{aligned}\right\} \qquad (12$$

geben.

Berechnet man x und y auf diese Weise, so ergeben die Gleichungen (11)

$$u = \sqrt{x}, \quad P = \sqrt{y} - \sqrt{x}. \qquad (13$$

Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse einer Reihe von Experimenten, welche gemacht wurden, indess man auf dem Rheostaten r' (Fig. 1) einen bestimmten Widerstand, gleich 200 S. E., beibehielt und mit dem Rheostaten r'' die Widerstände reproducirte, die für dieselben Werthe von T in den früheren Versuchen erzielt worden waren. Die in folgender Tabelle verzeichneten Zahlen stellen die Summen der auf den Rheostaten gelesenen Widerstände dar, sowie derjenigen der Verbindungs- und Telephonendrähte.

Töne	ϱ_1	ϱ_1'	r_1''	ϱ_2	ϱ_2'	r_2''	$\varrho + \varrho'$
Re_3	10	220	130	7	225	127	231
Fa_3	5,5	220	137	17	225	124	233,75
Sol_3	10	220	133	12	225	127,5	233,5
La_3	9	220	136,5	16	225	126,5	235
Do_4	12	220	135	14	225	128,5	235,5
Fa_4	7	220	147	31	225	125	241,5
La_4	13	220	143	28	225	128	243,0
Fa_5	14	220	149	34	225	130	246,5
Do_6	17	220	145	28	225	132	245
Re_6	9	220	165	50	225	126	252
Fa_6	15	220	149	33	225	130	246,5

Nimmt man $\varrho + \varrho'$ für das arithmetische Mittel der Werthe $\varrho_1 + \varrho_1'$ und $\varrho_2 + \varrho_2'$, wie sie auf vorstehender Tabelle stehen, berechnet man sodann mit diesen Zahlen die Werthe a, α, b, β und setzt $k = 0{,}0032$ als Mittelwerth zwischen den beiden, die wir gefunden, bringt man endlich das Ganze in die Gleichungen (12) und (13); so ergeben sich für P die folgenden Werthe:

Töne	T	P	u	$\frac{u}{T}$	Δ
Re_3	0,003367″	0,00805	0,0764	2,270	— 0,098
Fa_3	0,002841	0,00842	0,0680	2,395	+ 0,027
Sol_3	0,002525	0,00808	0,0577	2,284	+ 0,016
La_3	0,002273	0,00698	0,0556	2,448	+ 0,080
Do_4	0,001894	0,0157	0,0443	2,343	— 0,025
Fa_4	0,001420	0,0232	0,0338	2,380	+ 0,012
La_4	0,001136	0,0225	0,0155	1,364	— 1,004
Fa_5	0,0007102	0,0248	0,0168	2,365	— 0,003
Do_6	0,0004735	0,0271	0,0158	3,337	+ 0,969
Re_6	0,0004209	0,0316	0,0111	2,637	+ 0,269
Fa_6	0,0003551	0,0303	0,0079	2,225	— 0,143

Die Werthe P, die in der dritten Columne vorliegender Tabelle berechnet und verzeichnet sind, wachsen mit der Abnahme von T sichtlich an, während sie ihrer Beschaffenheit nach beständig sein sollten. Dieses regelmässige Anwachsen kann nicht ausschliesslich von zufälligen Fehlern herkommen und muss eine Erklärung in der Formel selbst finden, womit die Zahlen P berechnet wurden. Der Ausdruck (12) für y hat im ersten Gliede den Factor k^2, und es kann sonach y und mit y der Werth P wegen eines k irrthümlich zugetheilten Werthes unrichtig sein.

Die Gleichungen (12) und (13) zeigen, dass y und P mit dem Zunehmen von k anwachsen; da aber der Bruch $\frac{\alpha - a}{\beta - b}$, womit k^2 multiplicirt ist, mit dem Abnehmen von T rasch sich vermindert, so erscheinen die den Werthen y und P entsprechenden Anwüchse, wenn dem Werthe k eine Vermehrung zugetheilt wird, um so geringer, je höher der Schall ist. Man ersieht hieraus, dass man, wenn für k ein etwas grösserer Werth als 0,0032 angenommen würde, den wir anwenden, für P innerhalb der Grenzen der Versuche annähernd gleiche Werthe erlangen könnte. Die von uns gefundenen Werthe k, ob mit den galvanometrischen Maassen oder mittelst der Telephone bestimmt, sind also mit einem Minusfehler behaftet. Würde der Werth k gesucht, welcher der Bedingung mehr entspricht, zu unter sich wenig verschiedenen Werthen P zu führen, so könnte man zu einem annähernderen Werthe dieser Constanten gelangen.

Die Werthe u dagegen hängen, wie die erste der Formeln (12) darthut, nicht von dem k zugetheilten Werthe ab und können keine

anderen Fehler enthalten als solche, die von irrthümlicher Beobachtung abhängig sind. Nun bilden aber die in der vierten Columne der vorangehenden Tabelle verzeichneten Zahlen eine ziemlich regelmässige Stufenreihe und zeigen, dass u mit der Steigerung der Tonhöhe abnimmt.

Die fünfte Columne der letzten Tabelle enthält die Werthe des Verhältnisses $\frac{u}{T}$. Sie bringt eine bemerkenswerthe Thatsache zur Gewissheit: dieses Verhältniss ist constant. Die den Tönen La_1 und Do_6 entsprechenden Zahlen ausgenommen, welche sichtlich zufällige Abweichungen vorweisen, entfernen sich in der That alle übrigen von der arithmetischen Mitte 2,368 um Grössen, welche die den in dergleichen Versuchen wahrscheinlichen Beobachtungsfehlern zutheilbaren Unterschiede nicht übersteigen. Die Werthe dieser Unterschiede sind mit ihren Zeichen in der letzten, mit $\varDelta$ überschriebenen Columne der Tabelle angegeben. Wird auch den zwei den Tönen La_1 und Do_6 entsprechenden Zahlen Rechnung getragen, welche sich ausnahmsweise von dem besagten Gesetze entfernen, so ist der wahrscheinliche Fehler der Mittelzahl 2,368

$$0{,}6725\sqrt{\frac{\Sigma\varDelta^2}{11\cdot 10}} = 0{,}0917,$$

und der wahrscheinliche relative Fehler ist nur

$$\frac{0{,}0917}{2{,}368} = 0{,}039.$$

Indem wir die Function von T, die wir mit z bezeichneten, untersuchten, fanden wir, dass das Verhältniss $\frac{z}{T}$ durch nahe bei Re_5 liegende oder höhere Töne constant wird, dass dagegen $\frac{z}{T}$ mit dem Anwachsen von T abnimmt, wenn T den dieser Note entsprechenden Werth übersteigt. Wahrscheinlich würde ein Gleiches mit dem Werthe $\frac{u}{T}$ vorkommen, wenn man T grössere Werthe zutheilte, als bei den angestellten Versuchen angenommen wurden. Die Grösse u stellt gegenüber der Induction des Telephons vor, was z gegenüber der Induction der Spirale S vorstellt, und es ist wahrscheinlich, dass die Linie der Werthe u, über den niedersten unter den experimentirten Tönen ausgedehnt, das Aussehen der Linie z gewinne.

Stellen wir uns vor, dass das Mitteltelephon, auf das die Werthe u sich beziehen, von denen die Rede war, in einer Leitung, deren

Widerstand $= r$ ist, als Empfänger functionire und dass der die Spirale derselben durchlaufende, periodische Strom die Intensität

$$I = a \sin \frac{2\pi}{T} t$$

habe; die Intensität des vom Telephon herkommenden Extrastromes ist

$$i = -\frac{dI}{dt} \cdot \frac{u}{r} = -\frac{2\pi a}{r} \cdot \frac{u}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

und das Verhältniss zwischen dem Maximum von i und dem Maximum von I ist

$$\frac{2\pi}{r} \cdot \frac{u}{T}.$$

Wir haben aber gefunden, dass $\frac{u}{T}$ innerhalb der Grenzen unserer Versuche von T unabhängig ist; folglich ist das Verhältniss zwischen dem Maximalwerth der Intensität des durch das Telephon erzeugten Extrastromes und dem Maximalwerth der Intensität des Hauptstromes bei gleichem Widerstande der Leitung constant, unabhängig von der Dauer der Schwingungen.

Hieraus ergibt sich sofort, dass auch die Verhältnisse der mittleren Intensitäten und diejenigen der Totalintensitäten, d. h. der während der Dauer einer Periode übermittelten Quantitäten Elektricität, constant sind.

Inserirt man in eine Leitung, in welcher mittelst eines Telephons oder auf andere Weise ein periodischer Strom erzeugt wird, dessen Intensität als Zeitfunction in der Gleichung

$$I = A \sin \frac{2\pi}{T} (t + \alpha)$$

gegeben ist, so reducirt dieses Telephon die Intensität des Stromes auf den Werth

$$I' = \frac{A}{1 + \frac{2\pi}{r} \cdot \frac{u}{T}} \sin \frac{2\pi}{T} (t + \alpha').$$

Nun ist die Zahl $1 + \frac{2\pi}{r} \cdot \frac{u}{T}$ innerhalb der Grenzen unserer Versuche von dem Werthe T unabhängig; wir können deshalb auch sagen: ein in eine Leitung eingeschaltetes Empfangstelephon, in welcher ein periodischer Strom von der Inten-

sität I circulirt, reducirt diese Intensität auf einen Bruch I' des primitiven Werthes, welcher Bruch innerhalb der Grenzen dieser Versuche nicht von der Dauer der Periode abhängt.

Ist die Intensität des Stromes, der vor der Einschaltung des Telephons in der Leitung wirkt, anstatt von der Gleichung einer Sinusoide vertreten zu werden, irgend eine periodische Zeitfunction und gegeben durch die trigonometrische Reihe

$$I = A \sin \frac{2\pi}{T}(t+\alpha) + A_1 \sin \frac{4\pi}{T}(t+\alpha_1) + \cdots\cdots,$$

so reducirt die Einschaltung des Empfangstelephons deren Werth auf

$$I' = \frac{A}{1+\frac{2\pi}{r}\cdot\frac{u}{T}} \sin \frac{2\pi}{T}(t+\alpha') + $$
$$+ \frac{A_1}{1+\frac{4\pi}{r}\cdot\frac{u_1}{T}} \sin \frac{4\pi}{T}(t+\alpha_1') + \cdots\cdots$$

Wenn nun die Perioden T, $\frac{T}{2}$, $\frac{T}{3}$ etc. der Elementarwellen innerhalb der Grenzen unserer Versuche enthalten sind, so kann behauptet werden, dass

$$1+\frac{2\pi}{r}\cdot\frac{u}{T} = 1+\frac{4\pi}{r}\cdot\frac{u_1}{T} = 1+\frac{6\pi}{r}\cdot\frac{u_2}{T} + \cdots\cdots,$$

und folglich kann man schreiben

$$I' = \frac{1}{1+\frac{2\pi}{r}\cdot\frac{u}{T}}\left[A \sin \frac{2\pi}{T}(t+\alpha') + A_1 \sin \frac{4\pi}{T}(t+\alpha_1') + \cdots\cdots\right].$$

Betrachtet man den periodischen Strom, welcher die Leitung zweier Telephone durchläuft, als Vertreter des Schalles, der übertragen wird, so kann man sagen: die Extraströme, welche im Empfangstelephon erzeugt werden, vermindern die Intensitäten aller Elementartöne, aus denen der übertragene Schall besteht, im gleichen Verhältnisse, und es verändern jene Extraströme somit die Klangfarbe nicht.

Es ist wahrscheinlich, dass ein Gleiches sich von den Extraströmen sagen lasse, die sich im Aufgabetelephon erzeugen. Folglich haben

innerhalb der Grenzen unserer Versuche die Extraströme gar keinen Antheil an den Farbveränderungen, welche in der Uebermittlung der Schalle durch Telephone vorkommen können.

Ich behauptete in der citirten Abhandlung über die Klangfarbe und versuchte ausführlicher in einer Conferenz über das Telephon, welche ich in der Gesellschaft der Ingenieure und Industriebeflissenen Turins hielt[1]), zu beweisen, dass die höheren Töne innerhalb gewisser Grenzen durch das Telephon am besten überliefert werden und dass in Folge dessen die Farbe eines zusammengesetzten, durch das Telephon übermittelten Schalles durch die relative Verstärkung der hohen harmonischen Töne verändert erscheinen muss. Wenn man bei der Untersuchung der Erscheinungen die im Telephon vorkommen, weder auf die Extraströme, noch auf die Verspätungen in den Veränderungen der magnetischen Zustände Rücksicht nimmt, erhellt dieser Satz unmittelbar aus der Thatsache, dass die Intensität eines durch einen festen Magnet inducirten Stromes der hinsichtlich der Zeit genommenen Derivirten von der Intensität des Magnetismus proportional ist. Du Bois-Reymond hatte, wie ich in der Folge erfuhr, die gleiche Betrachtung angestellt[2]) und bestätigte nachher, indem er einige Einwendungen widerlegte, seine Meinung hierüber[3]). Andere dagegen behaupteten, indem sie an die Dauer der veränderlichen Perioden der Ströme und Elektromagnete dachten, welche gegenüber der Dauer der Tonschwingungen besonders bei den höchsten Tönen nicht übersehen werden darf, dass die tiefsten Töne vom Telephon am besten transmittirt werden und dass deshalb die von der telephonischen Transmission hervorgebrachte Veränderung der Klangfarbe die der besagten entgegengesetzte sein müsse. Einige Versuche von Bell selbst[4]) schienen diese Meinung zu rechtfertigen, welche auch in der von mehreren Physiologen gemachten Beobachtung einen Stützpunkt fand, dass bei der Tetanisirung der Muskeln eines

---

1) Siehe: Atti della Società degli Ingegneri e degli Industriali di Torino Anno XI (1877), p. 53.

2) Du Bois-Reymond, Versuche am Telephon. Verhandl. der physiolog. Gesellsch. zu Berlin 1877 Nr. 4.

3) Derselbe, Zusatz zu einer am 30. Nov. 1877 der physiologischen Gesellschaft zu Berlin gemachten Mittheilung. (Archiv f. Phys. S. 582, 1877.)

4) Siehe: Ferrini, Elettricità e magnetismo, Milano 1878, p. 545.

Frosches mittelst telephonischer Ströme dieser sich für den Vocal *u* empfindlicher zeigte als für das *i*, welches doch durch eine sehr hohe Note Re_6 bezeichet wird[1]). Nun scheint es mir, dass sich aus den angeführten Ergebnissen, wenn nicht eine entscheidende Antwort auf die gestellte Frage, doch wenigstens einiges Material entnehmen lasse, um dieselbe der Lösung näher zu bringen.

Und in der That, wenn es wahr ist, dass die Extraströme sowohl im Aufgabe- als im Empfangstelephon zur Wirkung haben, sämmtliche den verschiedenen Elementartönen entsprechende Ströme im gleichen Verhältnisse zu schwächen, so verändern jene Extraströme die Klangfarbe nicht; und um zu sehen, ob diese sich verändern, genügt es, zu betrachten, was im Telephon vorkäme, wenn jene nicht vorhanden wären. Wenn nun aber die Veränderungen des magnetischen Zustandes zeitweise gegenüber der Dauer einer Schwingung des Plättchens unbemerkbar würde, so wäre die Intensität der durch die Bewegung dieses Plättchens inducirten Ströme umgekehrt proportional mit T. Da die Verspätung in der Veränderung des magnetischen Zustandes nicht unbemerkbar ist, so wird die Intensität des inducirten Stromes mit der Verminderung von T weniger rasch anwachsen, als dieses Gesetz verlangt. Um wie viel? Das Studium der Extraströme zeigt uns, dass jene Verspätung mit den secundären Inductionen und der Wirkung der inducirten Ströme verbunden, die in der Masse des Stahls selbst entstehen, die Erzeugung eines Stromes zur Folge haben, dessen Intensität von T unabhängig ist. Es ist somit wahrscheinlich, dass die Verspätung in den magnetischen Veränderungen allein die Ursache sei, dass die Intensität des inducirten Stromes weder umgekehrt mit T proportional noch beständig ist, sondern nach einem mittleren Gesetze veränderlich. Ist dieses Urtheil richtig, so folgt daraus, dass die Intensität des durch das Aufgabetelephon erzeugten Stromes mit der Abnahme von T zunimmt und dass deshalb die den hohen Tönen entsprechenden Ströme gegenüber denjenigen verstärkt sind, welche den tiefen Tönen entsprechen.

Viele besondere Versuche, die ich schon bei anderer Gelegenheit erwähnt, führen zum nämlichen Schlusse. Gegen diese Erfahrungen hat meines Erachtens das mit der Tetanisirung des Frosches gemachte

1) Siehe: Beiblätter zu den Annalen der Physik und Chemie Bd. 2 Stück 1 S. 51. 52.



Experiment keinen grossen Werth; denn erstens kann Re_6, der höchste unter den charakteristischen harmonischen Tönen des Vocals i, sich über der vielleicht vorhandenen Grenze befinden, wo die hohen Töne gegenüber den tiefen aufhören einen Vortheil zu haben; zweitens können einige hohe Töne, worunter auch das Re_6 sein kann, durch das Ohr stark vernommen werden und dennoch objectiv oder physisch eine sehr geringe Intensität besitzen.

Wir können den Satz, den wir über die Intensität der Extraströme aufgestellt haben, anders ausdrücken. Stellen wir uns unter I nicht mehr als Zeitfunction den veränderlichen Werth der Intensität des vor der Einschaltung des Empfangstelephons in der Leitung sich befindlichen Stromes vor, sondern deren mittleren Werth, und bezeichnen wir auf ähnliche Weise mit I' den Werth, auf welchen diese Mittelzahl sich nach der Einschaltung des besagten Telephons reducirt. Dadurch ergibt sich

$$I' = \frac{I}{1 + \frac{2\pi}{r} \cdot \frac{u}{T}}.$$

Wird nun mit E der Mittelwerth der elektromotorischen Kraft bezeichnet, von welcher der Strom I erzeugt wird, so haben wir

$$I = \frac{E}{r}.$$

Daraus

$$I' = \frac{E}{r + 2\pi \frac{u}{T}}.$$

Die Einschaltung eines Empfangstelephons in eine Leitung hat also die Wirkung der Einschaltung eines Widerstandes $\frac{2\pi u}{T}$, welcher, bei den Ergebnissen unserer Versuche verbleibend, merklich constant, von der Höhe der transmittirten Töne unabhängig ist. Gibt man $\frac{u}{T}$ den kurz vordem gefundenen Mittelwerth 2,368, so hat man

$$\frac{2\pi u}{T} = 14{,}88 \text{ S. E. } = 14{,}17 . 10^9 \frac{\text{Centimeter}}{\text{Secunden}}.$$

Gesetzt, die Widerstände werden in Siemens-Einheiten berechnet; substituire man in I' den entsprechenden Werth von $\frac{2\pi u}{T}$, so hat man

$$I' = \frac{E}{r + 14{,}88}.$$

Diese Schlüsse und Formeln lassen sich nicht ohne weitere Erfahrungen auf den Fall bedeutend tieferer Töne als die bereits experimentirten anwenden. Es ist im Gegentheil gewiss, dass bei sehr tiefen Tönen $\frac{u}{T}$ mit dem Zunehmen von T abnimmt; in diesem Falle schwächt die Einschaltung des Empfangstelephons in die Leitung den Strom um so weniger, je tiefer der Ton ist.

Zweiter Theil.

Ueber den absoluten Werth der Intensität der Ströme im Telephon.

Die zweite Reihe von Versuchen hat zum Zweck, für Töne von verschiedener Höhe die Intensität der Ströme zu messen, welche erforderlich sind, um ein Empfangstelephon so in Thätigkeit zu setzen, dass es einen vernehmbaren Schall hervorbringt.

Das Verfahren, um diese Messung zu machen, bestand in Folgendem: Mit einer Hauptleitung wurden zwei Derivationsleitungen verbunden, von denen die eine einen sehr geringen, bekannten und nach Belieben veränderlichen Widerstand enthielt, die andere einen Rheostaten von grossem Widerstande und ein Empfangstelephon; mittelst einer galvanischen Säule und einem geeigneten Unterbrecher transmittirte man durch die Hauptleitung einen periodischen Strom, dessen Intensität eine Zeitfunction ist; mit den veränderlichen Widerständen endlich der beiden Derivationsleitungen wurde die Grundnote des vom Telephon gegebenen Tones so weit reducirt, dass sie kaum vernehmbar war. Kennt man die Intensität des Hauptstromes als Zeitfunction, so kann man das erste periodische Glied der trigonometrischen Reihe, womit jene Function sich darstellen lässt, berechnen; sind sodann auch die Widerstände der Derivationsleitungen bekannt, so kann der Coëfficient des entsprechenden Gliedes der Reihe bestimmt werden, welche die Intensität des im Telephon thätigen Stromes ausdrückt. Dieser Coëfficient ist der höchste Werth der Intensität des Stromes, der den einfachen, kaum hörbaren Grundton erzeugt, auf welchem experimentirt wird.

Die Einrichtung, um dieses Verfahren praktisch darzulegen, ist folgende: In einer Station A (Fig. 2) ist eine galvanische Säule P von 6 Elementen Léclanché, eine Tangentenbussole T und eine

elektrische Sirene *S* aufgestellt; in einer anderen Station *B* stehen das Telephon *F*, ein Rheostat *R* und ein dicker, blosser Kupferdraht *CD*, gleichförmig und homogen, dessen Widerstandsfähigkeit zum voraus mit grosser Sorgfalt geprüft worden ist. Die beiden Stationen sind durch zwei Liniendrähte *ae* und *bd* mit einander vereinigt. Der positive Pol der Säule *P* ist im Punkte *o* mit der schwingenden Armatur der elektrischen Sirene verbunden; der negative Pol befindet sich in Verbindung mit dem einen Ende der magnetisirenden Spirale des Elektromagneten *S* und dem Liniendrahte *ae*; die eine der zwei Stillstandsschrauben der schwingenden Armatur der Sirene, welche isolirt sind und in *u* und *V* ihre Vertretung finden, hat Verbindung mit dem zweiten Ende der Spirale *S*, die andere durch Vermittlung des Drahtes *g* mit der Tangentenbussole *T* und durch diese mit dem zweiten Liniendrahte *bd*. In der anderen Station sind die beiden Liniendrähte mit den beiden Enden des Kupferdrahtes *CD* verbunden. Die Verbindungsdrähte *cC* und *dD* ziehen sich, wie die Figur zeigt, parallel und ganz nahe am Drahte *CD* hin, um den Inductionsströmen, welche die Erscheinungen verwickeln könnten, möglichst auszuweichen. An einem Punkte *M* des Drahtes *CD*, in der Nähe von dessen Ende, ist ein Draht *n* angelöthet, welcher am andern Ende in eine der kleinen Klemmschrauben des Telephons *F* eingefügt ist; die andere Klemmschraube des letzteren hängt durch einen Draht *m* mit dem Rheostaten *R* und dieser durch den Draht *q* mit einer federnden Klemme *N* zusammen, die längs des Drahtes *CD* hingleitet. Eine in Millimeter eingetheilte Scala misst die veränderliche Länge *MN*.

Sind die beschriebenen Verbindungen mit der Säule hergestellt, so tritt die Sirene *S* in Thätigkeit und bringt einen Laut hervor, dessen Höhe innerhalb bestimmter Grenzen verändert werden kann, indem man die Stellungen der Stillstandsschrauben *V* und *u* und die Intensität der gegenwirkenden Federkraft regulirt. Nun ist es klar, dass bei jeder Schwingung der Sirenenarmatur die Säule *P* sich eine gewisse Zeit lang in der durch die Liniendrähte, die Bussole *T* und den Draht *CD* gebildeten Leitung befindet. In der That kommt die Armatur, wenn sie von dem Elektromagneten *S* angezogen wird und, sich von der Berührung mit *u* losmachend, die Verbindung der Spirale *S* mit der Säule aufhebt, mit der Schraube *V* in Berührung und schliesst die Leitung *PoVgTbdDCcaP*; der Strom circulirt durch diese Leitung, bis die Armatur, von der gegenwirkenden Federkraft erregt, die Schraube *V*

verlässt, um sich abermals an die Schraube u anzulehnen. Wenn aber das geschieht, circulirt der Strom durch die Berührung mit u wieder in der magnetisirenden Spirale des Elektromagneten S, dieser zieht neuerdings die Armatur an, und diese, die Schraube V berührend, schliesst aufs neue die Leitung. Der Einfachheit wegen hätte man die Sirene in die Leitung stellen können; dann würden aber die intensiven Extraströme, die durch die Einschaltung des Elektromagneten auf der Linie entstünden, die Berechnung der Versuche schwierig und unsicher machen. Gewiss würde man bessere Resultate erzielen, wenn man sich, anstatt eine einfache Sirene anzuwenden, welche allein die Aufgabe hat, eine Reihe von Tönen von verschiedener Höhe hervorzubringen, wie ich zu thun gezwungen war, als Unterbrecher des Stromes verschiedener, in elektromagnetischer Schwingung erhaltener Stimmgabeln bediente.

Wir waren unser drei, um mit dem beschriebenen Apparate zu experimentiren: der Ingenieur Cesare Penati, der mir bei allen Versuchen beistand, welche den Gegenstand dieser Schrift bilden, mein Präparator und ich. Ich stand in der Station B, um am Telephon zu beobachten und die Widerstände zu bestimmen; der Ingenieur Penati und der Präparator befanden sich in der Station A, der erstere mit dem Auftrage, die Angaben der Bussole zu lesen und die Höhe der Töne zu bestimmen, der letztere mit dem Auftrage, die Sirene zu bewachen, damit sie während der ganzen Dauer eines jeden Versuches einen gleichen Ton gebe. Eine elektrische, auf einer anderen Linienleitung ruhende Klingel diente dazu, uns verabredete Zeichen zu übermachen. Auf ein Zeichen von mir setzte der Präparator die elektrische Sirene in Thätigkeit, und als diese einen klaren und constanten Ton gab, beurtheilte der Ingenieur Penati von einer Seite und ich von der anderen mittelst des Telephons dessen Höhe. Sodann beobachtete der Ingenieur Penati die Bussole, deren Nadel unter der Einwirkung des intermittirenden Stromes eine constante Abweichung machte; ich meinerseits liess, nachdem ich einen Widerstand auf den Rheostaten R gesetzt, die federnde Klemme N längs des Drahtes CD hingleiten, bis der durch das Telephon F empfangene Schall kaum vernehmbar wurde. In dem Augenblicke, wo das geschah, gab ich den Operatoren der anderen Station ein Zeichen, worauf der Ingenieur Penati die Abweichung φ der Bussolennadel las und aufzeichnete, und sodann, nachdem vom Präparator schleunigst die Sirenenarmatur an die Schraube V

angelegt worden, auf dass der Strom ununterbrochen durch die Bussole führe, die neue Abweichung ψ' las und aufzeichnete. Ich notirte indessen den Widerstand R der Derivationsleitung, die das Telephon und den Rheostaten R enthielt, sowie die Länge NM des zwischen der Löthstelle M und der federnden Klemme N befindlichen Drahtes.

Mit dieser Länge konnte ich dann den Widerstand des Drahtes selbst berechnen, indem ich mich der Resultate einer Anzahl präliminärer Versuche bediente. Diese Versuche hatten darin bestanden, mit einer guten Wheatstone'schen Brücke, von der Firma Siemens & Halske construirt, den Widerstand von gleichen Längentheilen des Drahtes zu messen, mit dem hernach der Rheochord CD hergestellt werden sollte, und den Anfang jener gleichen Längentheile fortwährend um 5^{cm} zu entfernen, bis dieser Anfang die Länge von einem Meter durchlaufen hatte. Indem ich sodann mit dem Meter Draht, längs dessen der Anfang sich entfernt hatte, den Rheochord bildete, war ich der Homogenität desselben gewiss und kannte mit hinlänglicher Genauigkeit den Widerstand einer auf demselben genommenen Länge. Der Widerstand eines Centimeters war gleich

0,000069 S. E.

Indem ich die Länge NM, in Centimetern ausgedrückt, mit 0,000069 multiplicirte, erhielt ich den Widerstand r der Derivationsleitung MN in Siemens-Einheiten.

Mit diesen Angaben:

φ Abweichung der Bussolennadel, während der Strom periodisch von der Sirene unterbrochen wird,

φ' Abweichung der Bussolennadel, während der Strom ununterbrochen durch die Bussole circulirt, indess die Armatur der Sirene mit der Schraube V in Berührung bleibt,

r Widerstand der Derivationsleitung MN,

R Widerstand der Derivationsleitung $MFmRqN$,

kann man den Coëfficienten des ersten Gliedes der trigonometrischen Reihe berechnen, welcher als Function der Zeit t die Intensität des Stromes ausdrückt, durch welchen das Telephon F functionirt, und dieser Coëfficient ist der höchste Werth der Intensität des dem Grundtone entsprechenden Stromes, d. h. dem Tone, mit welchem experimentirt wird.

Zu diesem Zwecke bemerke ich, dass man, da keine Spiralen in der Bussolenleitung sind und ohne grossen Fehler von den Extra-

strömen abgesehen werden kann, annehmen darf, dass die Intensität I des Stromes in der Hauptleitung $NCcaPVgTbdDM$ für die ganze Zeit, während welcher die Armatur sich an die Schraube v anlehnt, einen constanten Werth J hat und einen Werth 0 während der ganzen Zeit, in welcher die Armatur die Schraube V nicht berührt. Wenn wir demnach, wie gewöhnlich, nennen T die Dauer einer vollständigen Schwingung und ϑ die Zeit, während welcher die Berührung in V andauert, so können wir auch sagen, dass die periodische Intensität I eine Function der Zeit t ist, welche während der ganzen Zeit ϑ den constanten Werth J, sodann den Werth 0 während eines Zeitraumes $T-\vartheta$, hernach wieder den Werth J während einer anderen Zeit $=\vartheta$, darauf neuerdings den Werth 0 hat u. s. f. Wenden wir nun auf diese Function die Formel an

$$\varphi(t)=\frac{1}{T}\int_0^T\varphi(\alpha)\,d\alpha+\frac{2}{T}\sum_1^\infty\int_0^T\varphi(\alpha)\cos\frac{2m\pi}{T}(\alpha-t)\,d\alpha,$$

welche die Entwicklung irgend einer periodischen Function von t mit der Periode T in eine trigonometrische Reihe enthält, und wir finden

$$I=J\left[\frac{\vartheta}{T}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{1}{m}\sin\frac{m\pi}{T}\vartheta\cdot\cos\frac{2m\pi}{T}\left(t-\frac{\vartheta}{2}\right)\right].$$

Der Coëfficient des ersten periodischen Gliedes dieser Reihe, d. h. des dem Grundtone entsprechenden Gliedes ist

$$\frac{2J}{\pi}\sin\frac{\pi\vartheta}{T} \tag{14}$$

und lässt sich leicht mit den Angaben der Erfahrung berechnen. Man hat nämlich, wenn C die Reductionsconstante der Tangentenbussole genannt wird:

$$J=C\tan\psi, \tag{15}$$

$$\frac{\vartheta}{T}=\frac{\tan\varphi}{\tan\psi}. \tag{16}$$

Kennt man die Intensität I des Hauptstromes, so leitet sich daraus sofort die Intensität des derivirten Stromes ab, welcher durch das Telephon geht. Gibt man dem Buchstaben u die Bedeutung, die er in dem ersten Theile dieser Arbeit hatte, und wiederholt für das System der beiden Derivationsleitungen r und R die Berechnungen, welche beim Studium des Apparates für die erste Versuchsreihe dazu

gedient haben, den Werth i' zu bestimmen, so findet man, dass der Coëfficient des ersten periodischen Gliedes der trigonometrischen Reihe, welche die Intensität des gesuchten Stromes ausdrückt, der folgende ist:

$$i = \frac{2J}{\pi} \cdot \frac{r}{r+R} \cdot \frac{\sin \frac{\pi \vartheta}{T}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi u}{r+R} \cdot \frac{1}{T}\right)^2}}. \tag{17}$$

Das ist unsere Unbekannte, wenn man, wie ich zu thun bedacht war, in den Versuchen mit dem Telephon nur auf den Grundton aufmerksam gewesen und so viel als möglich von den harmonischen Tönen abgesehen hat, die jenen begleiten.

Gibt man beim Experimentiren dem R hinlänglich grosse Werthe, so kann man den Ausdruck $\left(\frac{2\pi u}{r+R} \cdot \frac{1}{T}\right)^2$ im Nenner im Vergleich zur Einheit ganz weglassen. Macht man z. B., wie in meinen Versuchen, $R = 1000$ S. E. und setzt man gemäss den Schlüssen der im ersten Theile dieser Arbeit beschriebenen Experimente (S. 148)

$$\frac{2\pi u}{T} = 14{,}88 \text{ S. E.},$$

so bekommt man $$\left(\frac{2\pi u}{r+R} \cdot \frac{1}{T}\right)^2 = 0{,}0002214,$$

ein sehr kleiner Bruch im Vergleich zu den Fehlern, die in Untersuchungen wie die vorliegende möglich sind. In diesem Falle kann auch der Widerstand r gegenüber R im Nenner des Ausdruckes i weggelassen und geschrieben werden

$$i = \frac{2J}{\pi} \sin \frac{\pi \vartheta}{T} \cdot \frac{r}{R}. \tag{18}$$

Mit der dargelegten Methode konnte man mit fünf Tönen von verschiedener Höhe experimentiren, mit Do_3, Fa_3, La_3, Do_4, Re_4. Die Ergebnisse der Beobachtungen sind auf nachstehender Tabelle enthalten.

Töne	$\frac{1}{T}$	φ	ψ	r	R
Do_3	264	14° 36′	32° 0′	0,0060	1000
Fa_3	352	14° 45′	29° 15′	0,0048	1000
La_3	440	14° 30′	25° 0′	0,0033	1000
Do_4	528	15° 7′	21° 52′	0,0030	1000
Re_4	594	14° 36′	19° 52′	0,0030	1000

Werden die Intensitäten der Ströme in elektromagnetischen Einheiten (CGS) gemessen, so ist die Reductionsconstante der Tangentenbussole, wie sie in diesen Versuchen gebraucht wurde: 0,0100.

Mit obigen Angaben und den Formeln (15), (16), (18) erhält man die in der dritten Columne der folgenden Tabelle verzeichneten Werthe i.

Töne	$\frac{1}{T}$	$i \frac{cm^{1/2} gr^{1/2}}{\text{Secunden}}$	$\frac{i}{T^2}$	Δ
Do_3	264	0,000000002306	0,000161	− 0,000024
Fa_3	352	001704	0,000211	+ 0,000026
La_3	440	965	0,000187	+ 0,000002
Do_4	528	656	0,000183	− 0,000002
Re_4	594	531	0,000187	+ 0,000002
		Mittel	0,000185	

Die Betrachtung dieser Werthe zeigt, dass die Intensität i des Stromes, welcher nothwendig ist, um ein und dasselbe Telephon auf hörbare Weise in Thätigkeit zu setzen, nicht constant ist, sondern mit der Abnahme der Dauer der sonoren Schwingungen, d. h. mit der Steigung in der Tonhöhe rasch abnimmt. Innerhalb der Grenzen unserer Versuche scheint diese Intensität des Stromes sich im directen Verhältnisse des Quadrates der Schwingungsdauer zu verändern. Man betrachte diesfalls in der vierten Columne der vorstehenden Tabelle die Werthe $\frac{i}{T^2}$ und in der letzten Columne die Differenzen Δ zwischen den einzelnen Werthen dieses Verhältnisses und ihres arithmetischen Mittels 0,000185.

Aus dieser Thatsache, wenn sie auch innerhalb erweiterter Grenzen sich richtig erwies, könnte man gleichwohl keine Folgerungen betreffs der Sensibilität des Telephons für Töne von verschiedener Höhe ableiten. Denn wenn zwei Töne von verschiedener Höhe anfangen hörbar zu werden, ist nicht gesagt, sie haben die gleiche Intensität. Dagegen ist es sehr wahrscheinlich, dass in der mittleren Gegend der Reihe der Musiktöne, in welcher die Schalle liegen, auf die sich die beschriebenen Erfahrungen beziehen, die Sensibilität des Ohres mit der Steigung der Töne zunimmt. Diese Rücksicht dürfte an und für sich genügen, um die von uns erwähnte Thatsache zu erklären. Umgekehrt liesse sich, wenn es gelänge, auf anderem Wege das Gesetz zu be-

stimmen, welches die Sensibilität des Telephons mit der Höhe der Töne verbindet, aus unseren Versuchen, oder aus anderen derselben Art, das Gesetz herleiten, das die Sensibilität des Ohres an die Tonhöhe knüpft.

Was den absoluten Werth der gefundenen Intensitäten anbelangt, will ich bemerken, dass die, ich weiss nicht nach welchem Verfahren, von Herrn R. S. Brough[1]) und Herrn Warren de la Rue[2]) aufgestellten Werthe mit obigen Intensitäten ziemlich genau überein stimmen. Brough sagte, dass ein Telephon mit einem Strome wirken kann von

$$10^{-9} \text{ absol. Einheiten } (CGS),$$

und Warren de la Rue behauptete, dass die Intensität der telephonischen Ströme diejenige sei, welche durch ein Element Daniell in einer Leitung von dem Widerstande von 100 Megohm erzeugt werden könnte: eine Intensität, welche, wenn wir die elektromotorische Kraft eines Elementes Daniell $= 1{,}116 \cdot 10^8$ absoluten centimetrischen Einheiten annehmen, beträgt

$$1{,}116 \cdot 10^{-9} \text{ absol. Einheiten } (CGS).$$

Wie hieraus zu ersehen ist, entfernen sich obige Zahlen wenig von dem, was ich, bevor ich sie kannte, für La_3, Ton des Normalchoristen (corista normale) und Mittelton zwischen denjenigen, womit ich experimentirte, fand.

Es wäre aber ein Irrthum, diese Zahl für alle Töne gültig zu erachten.

Schliesslich versuche ich, einen concreten Begriff zu geben von der Stromintensität:

$$0{,}965 \cdot 10^{-9} \frac{\text{cm}^{1/2}\,\text{gr}^{1/2}}{\text{Secunden}},$$

auf die unsere Versuche uns für den Ton La_3 des Normalchoristen geführt haben, welcher Ton auch ungefähr der Mittelzahl gleichkommt, die wir fanden. Zu diesem Zwecke genügt es mir, zu sagen, dass hiemit die Intensität des Stromes gegeben ist, die man erzielte, wenn ein einziges Element Daniell in eine mit einem telegraphischen Drahte von 4^{mm} Durchmesser und der ungefähren Länge von

11 564700 Kilometern

hergestellte Leitung gebracht würde.

---

1) R. S. Brough: Preece, Chem. News XXXVII p. 37, 1878.
2) Warren de la Rue: Telegr. Journal 1878.

Dieser Draht könnte ungefähr

290 mal

die Erde längs eines grössten Kreises umspannen. Ein Strom, von einer constanten Intensität gleich dem höchsten Werthe der erforderlichen Intensität, um in einem Telephon ein hörbares La_3 hervorzubringen, müsste ununterbrochen nicht viel weniger als 19 Jahre lang durch einen Wasser enthaltenden Voltameter fliessen, um durch Zersetzung des Wassers einen Cubikcentimeter Knallgas zu erzeugen.

Theorie der Doppelbrechung.

Von

E. Lommel.

(Aus den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

In einer früheren Abhandlung „Theorie der (normalen und anomalen) Dispersion"[1]) habe ich gezeigt, dass sich die Brechung und Farbenzerstreuung aus der Annahme erklären lässt, dass Aether und Körpertheilchen durch Reibung auf einander einwirken, wobei der Aether, welcher die Zwischenräume der Moleküle erfüllt, als mit dem freien Aether identisch gedacht wird. Nun will ich zeigen, dass aus denselben Prämissen auch die Erklärung der Doppelbrechung folgt, und zwar in einfacherer und weit umfassenderer Weise als aus den bisherigen Theorien.

Da die Atome eines Moleküls gegen einander verschiebbar sind, so ist jedes Molekül als ein kleiner elastischer Körper zu betrachten, in welchem nach den Lehren der Elasticitätstheorie drei zu einander senkrechte Hauptelasticitätsrichtungen vorhanden sind. Sind die homologen Elasticitätsachsen sämmtlicher (gleichartiger) Moleküle parallel gerichtet, so ist der Körper krystallisirt.

Wir denken uns diesen Körper bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Achsen mit den drei Hauptelasticitätsrichtungen parallel laufen. Ein Volumenelement, dessen Schwerpunkt die

1) Repertorium dieser Band S. 81 ff.

Coordinaten x, y, z besitze, enthalte die Körpermasse m und die Aethermasse μ. Der Punkt xyz, welcher im Ruhezustand der gemeinsame Schwerpunkt der Massen m und μ ist, repräsentirt die gemeinschaftliche unverrückbare Gleichgewichtslage, nach welcher die beiden Massen (oder vielmehr ihre Schwerpunkte) durch die elastischen Kräfte hingetrieben werden. Bezeichnet man, nachdem eine Störung des Gleichgewichtes stattgefunden hat, die Coordinaten der Massen m und μ (d. i. ihrer Schwerpunkte) zur Zeit t resp. mit x', y', z' und ξ', η', ζ', so sind die Componenten der Verschiebung der Masse m

$$x'-x, \quad y'-y, \quad z'-z$$

und diejenigen der Masse μ

$$x-\xi', \quad y-\eta', \quad z-\zeta'.$$

Auf die Masse m wirke nun ausser den drei nach den Achsen gerichteten Hauptelasticitätskräften, deren Intensitäten für die Einheit der Masse und der Verschiebung resp. durch p_1^2, p_2^2, p_3^2 ausgedrückt sein mögen, und ausser einem der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand noch die Reibung zwischen Aether- und Körpertheilchen, welche dem Unterschiede ihrer Geschwindigkeiten proportional zu setzen ist. Bezeichnet man daher mit $2k$ den Widerstandscoëfficienten, mit 2ν den Reibungsindex, so wird die Bewegung der Körpermasse m durch folgende drei Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{d^2(x'-x)}{dt^2} &= -2km\frac{d(x'-x)}{dt} - mp_1^2(x'-x) - 2m\nu\left(\frac{d\xi'}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)\\
m\frac{d^2(y'-y)}{dt^2} &= -2km\frac{d(y'-y)}{dt} - mp_2^2(y'-y) - 2m\nu\left(\frac{d\eta'}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)\\
m\frac{d^2(z'-z)}{dt^2} &= -2km\frac{d(z'-z)}{dt} - mp_3^2(z'-z) - 2m\nu\left(\frac{d\zeta'}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right).
\end{aligned}\right\} (1$$

Wenn aber die Aethermasse μ der Körpermasse m durch die gegenseitige Reibung einen Impuls ertheilt, dessen Componenten durch die letzten Glieder der vorstehenden drei Gleichungen ausgedrückt sind, so muss nach dem Principe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung die Aethermasse μ von Seiten der Körpermasse m einen gleichgrossen Impuls in entgegengesetzter Richtung empfangen. Die Gleichungen für die Bewegung des Aethers werden daher folgende sein:

$$\left.\begin{aligned}
\mu\frac{d^2(x-\xi')}{dt^2} &= \omega^2\left(\frac{d^2(x-\xi')}{dx^2}+\frac{d^2(x-\xi')}{dy^2}+\frac{d^2(x-\xi')}{dz^2}\right)\\
&\quad+2m\nu\left(\frac{d\xi'}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)\\
\mu\frac{d^2(y-\eta')}{dt^2} &= \omega^2\left(\frac{d^2(y-\eta')}{dx^2}+\frac{d^2(y-\eta')}{dy^2}+\frac{d^2(y-\eta')}{dz^2}\right)\\
&\quad+2m\nu\left(\frac{d\eta'}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)\\
\mu\frac{d^2(z-\zeta')}{dt^2} &= \omega^2\left(\frac{d^2(z-\zeta')}{dx^2}+\frac{d^2(z-\zeta')}{dy^2}+\frac{d^2(z-\zeta')}{dz^2}\right)\\
&\quad+2m\nu\left(\frac{d\zeta'}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wo ω^2 die Elasticität des Aethers darstellt. Dabei sei nochmals hervorgehoben, dass der zwischen den Molekülen der Körper enthaltene Aether als genau von derselben Beschaffenheit wie der freie Aether des leeren Weltraums vorausgesetzt wird.

Wir haben nun zu untersuchen, ob eine Fortpflanzung einfach pendelartiger Schwingungen in ebenen Wellen und ohne Verdichtungen und Verdünnungen in diesem mit den Körpermolekülen in Wechselwirkung stehenden Aether stattfinden könne. Sollen keine Verdichtungen und Verdünnungen stattfinden, so muss die Gleichung

$$\frac{d(x-\xi')}{dx}+\frac{d(y-\eta')}{dy}+\frac{d(y-\zeta')}{dz}=0 \tag{3}$$

erfüllt sein, welche ausdrückt, dass die Schwingungen nur parallel zur Wellenebene, also **t r a n s v e r s a l**, erfolgen können. Die Normale der Wellenebene bilde mit den drei Elasticitätsachsen (x, y, z) Winkel, deren Cosinus resp. u_3, v_3, w_3 sind. Wir transformiren nun zunächst die Gleichungen (1) und (2) zu einem neuen rechtwinkligen Coordinatensystem, dessen z_1-Achse mit dieser Wellennormale zusammenfällt, so dass die neuen Achsen der x_1, y_1, z_1 mit den früheren der x, y, z Winkel bilden, deren Cosinus resp. sind

$$\begin{matrix} u_1, & v_1, & w_1\\ u_2, & v_2, & w_2\\ u_3, & v_3, & w_3,\end{matrix}$$

welche neun Cosinus bekanntlich durch die sechs Relationen

$$\left.\begin{array}{ll} u_1^2+v_1^2+w_1^2=1, & u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2=0 \\ u_2^2+v_2^2+w_2^2=1, & u_1u_3+v_1v_3+w_1w_3=0 \\ u_3^2+v_3^2+w_3^2=1, & u_2u_3+v_2v_3+w_2w_3=0 \end{array}\right\} \quad (4$$

unter sich verknüpft sind. Wir haben alsdann in jene Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= u_1x_1+u_2y_1+u_3z_1 \\ y &= v_1x_1+v_2y_1+v_3z_1 \\ z &= w_1x_1+w_2y_1+w_3z_1 \end{aligned}$$

und die entsprechenden Ausdrücke für x', y', z' und ξ', η', ζ' einzusetzen. Die Gleichungen (1) lassen sich, nachdem dies geschehen ist, durch eine leichte Umformung, wobei wir den Index 1 der neuen Coordinaten der Einfachheit wegen wieder weglassen, auf folgende Gestalt bringen:

$$\left.\begin{array}{l} m\dfrac{d^2(x'-x)}{dt^2}+2km\dfrac{d(x'-x)}{dt}+mN_1(x'-x)+mT_3(y'-y)+ \\ \qquad +mT_2(z'-z)+2m\nu\left(\dfrac{d\xi'}{dt}-\dfrac{dx'}{dt}\right)=0 \\ m\dfrac{d^2(y'-y)}{dt^2}+2km\dfrac{d(y'-y)}{dt}+mT_3(x'-x)+mN_2(y'-y)+ \\ \qquad +mT_1(z'-z)+2m\nu\left(\dfrac{d\eta'}{dt}-\dfrac{dy'}{dt}\right)=0 \\ m\dfrac{d^2(z'-z)}{dt^2}+2km\dfrac{d(z'-z)}{dt}+mT_2(x'-x)+mT_1(y'-y)+ \\ \qquad +mN_3(z'-z)+2m\nu\left(\dfrac{d\zeta'}{dt}-\dfrac{dz'}{dt}\right)=0, \end{array}\right\} \quad (1a$$

worin

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= p_1^2u_1^2+p_2^2v_1^2+p_3^2w_1^2 \\ N_2 &= p_1^2u_2^2+p_2^2v_2^2+p_3^2w_2^2 \\ N_3 &= p_1^2u_3^2+p_2^2v_3^2+p_3^2w_3^2 \\ T_1 &= p_1^2u_2u_3+p_2^2v_2v_3+p_3^2w_2w_3 \\ T_2 &= p_1^2u_1u_3+p_2^2v_1v_3+p_3^2w_1w_3 \\ T_3 &= p_1^2u_1u_2+p_2^2v_1v_2+p_3^2w_1w_2 \end{aligned}\right\} \quad (5$$

gesetzt wurde. Die Gleichungen (2) dagegen nehmen, wenn man sie nach der Transformation derselben Behandlung unterwirft wie die Gleichungen (1), ihre ursprüngliche Gestalt wieder an.

Wir betrachten nun eine zur neuen z-Achse senkrechte Wellenebene, deren Normale demnach mit den drei Elasticitätsachsen Winkel bildet, deren Cosinus u_3, v_3, w_3 sind. Die zugehörige geradlinige Aetherschwingung, welche wir durch

$$Ml = Me^{-\left(K+\frac{q}{c}i\right)z+qit}$$

ausdrücken, wo c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle, $\frac{q}{2\pi}$ die Schwingungszahl und K den Absorptionscoëfficienten bedeutet, fällt gemäss (3) nothwendig in die Wellenebene und ist demnach mit der neuen xy-Ebene parallel.

Bezeichnet φ den Winkel, welchen die Schwingungsrichtung mit der neuen x-Achse einschliesst, so haben wir hienach:

$$x - \xi = Ml\cos\varphi, \quad y - \eta = Ml\sin\varphi, \quad z - \zeta = 0.$$

Die dritte der Gleichungen (2) zeigt, wenn man $z - \zeta = 0$ in sie einsetzt, dass auch $z' - z = 0$ sein muss. Wir müssen daher den Gleichungen (1a) und (2) durch folgende Gruppen von Werthen Genüge leisten:

$$\left.\begin{array}{lll} x - \xi = Ml\cos\varphi, & y - \eta = Ml\sin\varphi, & z - \zeta = 0 \\ x' - x = Al, & y' - y = Bl, & z' - z = 0 \\ & l = e^{-\left(K+\frac{q}{c}i\right)z+qit}. & \end{array}\right\} \quad (6$$

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichungen (2), deren dritte ohnehin bereits erfüllt ist, ergeben sich die folgenden zwei Gleichungen:

$$\mu q^2 + \omega^2\left(K + \frac{q}{c}i\right)^2 - 2m\nu qi\left(1 + \frac{A}{M\cos\varphi}\right) = 0$$

$$\mu q^2 + \omega^2\left(K + \frac{q}{c}i\right)^2 - 2m\nu qi\left(1 + \frac{B}{M\sin\varphi}\right) = 0,$$

welche gleichzeitig nur bestehen können, wenn

$$\frac{A}{M\cos\varphi} = \frac{B}{M\sin\varphi} = \varrho \quad (7$$

ist, und sich alsdann auf die einzige

$$\mu q^2 + \omega^2\left(K + \frac{q}{c}i\right)^2 - 2m\nu qi(1 + \varrho) = 0 \quad (8$$

zurückziehen. Aus den Gleichungen (1a) aber ergeben sich nach Einsetzung der Werthe (6) und nach gehöriger Reduction die folgenden drei Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}\left(N_1 - q^2 - 2qi\left(\frac{\nu}{\varrho} + \nu - k\right)\right)\cos\varphi + T_3 \sin\varphi = 0\\ \left(N_2 - q^2 - 2qi\left(\frac{\nu}{\varrho} + \nu - k\right)\right)\sin\varphi + T_3 \cos\varphi = 0\\ T_2 \cos\varphi + T_1 \sin\varphi = 0.\end{aligned}\right\} \quad (9$$

Setzen wir nun

$$2qi\left(\frac{\nu}{\varrho} + \nu - k\right) = s, \quad (10$$

so dienen die beiden ersten Gleichungen der Gruppe (9), nämlich

$$\left.\begin{aligned}(N_1 - q^2 - s)\cos\varphi + T_3 \sin\varphi = 0\\ (N_2 - q^2 - s)\sin\varphi + T_3 \cos\varphi = 0,\end{aligned}\right\} \quad (11$$

zur Bestimmung von s und φ. Eliminirt man aus ihnen den Winkel φ, so liefert die Eliminationsgleichung

$$(N_1 - q^2 - s)(N_2 - q^2 - s) - T_3^2 = 0 \quad (12$$

stets zwei reelle Werthe von s, und zu jedem derselben ergibt sich aus (11) der zugehörige Winkel φ. Nun ist aber bekannt, dass die Gleichung (11) die Richtung und Grösse der Achsen der Curve zweiten Grades

$$(N_1 - q^2)x_1^2 + (N_2 - q^2)y_1^2 + 2T_3 x_1 y_1 = 1 \quad (13$$

bestimmen, und zwar sind die beiden Werthe von s die reciproken Quadrate der Halbachsen und die zugehörigen Werthe von φ die Winkel, welche jede Halbachse mit der x_1-Achse bildet. Die Lage der x_1-Achse in unserer Wellenebene ist aber dadurch fixirt, dass zu den fünf Gleichungen, welche, da u_3, v_3, w_3 als gegeben zu betrachten sind, von der Gruppe (4) noch übrig bleiben, die dritte Gleichung der Gruppe (9) hinzutritt, so dass zur vollständigen Bestimmung der sechs Unbekannten u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2 die nothwendigen sechs Gleichungen zu Gebote stehen.

Wir betrachten nun die Fläche zweiten Grades, deren Gleichung in Beziehung auf die Hauptelasticitätsachsen

$$(p_1^2 - q^2)x^2 + (p_2^2 - q^2)y^2 + (p_3^2 - q^2)z^2 = 1 \quad (A$$

ist; wir transformiren letztere zu dem Coordinatensystem der x_1, y_1 z_1, dessen z_1-Achse mit der Wellennormale (u_3, v_3, w_3) zusammenfällt, und erhalten

$$\begin{aligned}(N_1 - q^2)x_1^2 + (N_2 - q^2)y_1^2 + (N_3 - q^2)z_1^2 + 2T_3 x_1 y_1 + \\ + 2T_2 x_1 z_1 + 2T_1 y_1 z_1 \qquad = 1;\end{aligned} \tag{14}$$

setzen wir darin $z_1 = 0$, so geht als Gleichung der Schnittcurve dieser Fläche mit der Wellenebene die Gleichung (13) hervor. Wir erkennen also, dass jener Kegelschnitt (13), durch dessen Achsen die beiden möglichen Schwingungsrichtungen und (wie wir sogleich sehen werden) auch die zugehörigen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bestimmt werden, nichts anderes ist als der Diametralschnitt der Fläche (A) mit einer zur Wellenebene parallelen Ebene. Wir wollen die Fläche (A), da ihre Natur wesentlich von der Lage der Absorptionsstreifen im Spectrum abhängt, die Absorptionsfläche nennen. Das bis jetzt gefundene Resultat lässt sich alsdann wie folgt aussprechen:

Zu einer gegebenen Wellenebene gehören zwei bestimmte Schwingungsrichtungen, welche parallel sind zu den Achsen des Diametralschnitts der Absorptionsfläche (A) mit einer zu jener Welle parallelen Ebene.

Da s stets reell ist und q, ν und k positiv sind, so muss vermöge Gleichung (10) ϱ nothwendig complex sein. Setzen wir daher

$$\varrho = \sigma + \tau i, \tag{15}$$

so liefert die Gleichung (10), wenn man das Reelle vom Imaginären sondert:

$$\sigma = \frac{4\nu(k-\nu)q^2}{s^2 + 4(k-\nu)^2 q^2}, \quad \tau = \frac{2\nu q s}{s^2 + 4(k-\nu)^2 q^2}. \tag{16}$$

Setzen wir nun in Gleichung (8) $\varrho + \sigma + \tau i$, so zerfällt sie durch Trennung des Reellen vom Imaginären in die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{c^2} - \frac{K^2}{q^2} = \frac{\mu}{\omega^2}\left(1 + \frac{2m\nu\tau}{\mu q}\right) \tag{17}$$

$$2\frac{K}{q}\cdot\frac{1}{c} = \frac{\mu}{\omega^2}\cdot\frac{2m\nu}{\mu q}(1+\sigma), \tag{18}$$

welche zur Bestimmung der zwei Unbekannten c und K, d. i. der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Absorptionscoëfficienten führen.

Bezeichnen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{\omega}{\sqrt{\mu}}$ im leeren Raume mit V und setzen wir

$$1 + \frac{2m\nu\tau}{\mu q} = P \text{ und } \frac{2m\nu}{\mu q}(1+\sigma) = Q,$$

so ergibt sich

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{2V^2}(\sqrt{P^2+Q^2}+P) \tag{19}$$

$$\frac{K^2}{q^2} = \frac{1}{2V^2}(\sqrt{P^2+Q^2}-P), \tag{20}$$

worin P und Q sich im Hinblick auf (16) wie folgt durch die Grösse s ausdrücken:

$$P = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu}\cdot\frac{s}{s^2+4(k-\nu)^2 q^2} \tag{21}$$

$$Q = \frac{2m\nu}{\mu q}\cdot\frac{s^2+4k(k-\nu)q^2}{s^2+4(k-\nu)^2 q^2}. \tag{22}$$

Einer jeden der beiden oben bestimmten Oscillationen kommt demnach eine eigene Wellengeschwindigkeit und ein eigener Absorptionscoëfficient zu, welche von der zugehörigen Achse $\frac{1}{\sqrt{s}}$ des Diametralschnitts in der durch die Gleichungen 19—22 vorgeschriebenen Weise abhängen.

Die gleichzeitigen Bewegungen der Aether- und Körpertheilchen werden durch die reellen Theile der Ausdrücke (6) dargestellt. Es ergibt sich daraus für die Bewegung des Aethers

$$\left.\begin{aligned} x - \xi &= M\cos\varphi e^{-Kz}\cos\left(qt - \frac{q}{c}z\right) \\ y - \eta' &= M\sin\varphi e^{-Kz}\cos\left(qt - \frac{q}{c}z\right) \end{aligned}\right\} \tag{6a}$$

und für die Bewegung der Körpertheilchen, wenn man die gefundenen Werthe von A, B und ϱ einführt:

$$\left.\begin{aligned}
x' - x &= MR \cos\varphi e^{-\kappa z} \cos\left(qt - \frac{q}{c} z + \psi\right) \\
y' - y &= MR \sin\varphi e^{-\kappa z} \cos\left(qt - \frac{q}{c} z + \psi\right), \\
\text{wo} \qquad R &= \frac{2\nu q}{\sqrt{s^2 + 4(k-\nu)^2 q^2}} \\
\text{und} \qquad \cotg\psi &= \frac{2(k-\nu)q}{s}
\end{aligned}\right\} \quad (6b$$

ist. Selbstverständlich genügen diese reellen Theile für sich allein schon den Differentialgleichungen (1a) und (2); die imaginäre Form wurde oben nur der einfacheren Rechnung wegen gewählt.

Die obige Gleichungen (19—22) enthalten aber nicht nur die Erklärung der Doppelbrechung im gewöhnlichen Sinne, sondern sie erklären auch die (normale und anomale) Dispersion, die Oberflächenfarben und deren Verschiedenheit auf verschiedenen Flächen, sowie den Pleochroismus der Krystalle. Je nach der Lage der Absorptionsstreifen kann die Absorptionsfläche für eine gegebene Schwingungszahl der fortgepflanzten Welle drei, oder zwei, oder eine, oder gar keine reelle Achse haben. Liegt z. B. ein Absorptionsstreifen innerhalb des sichtbaren Spectrums, die beiden anderen im Ultraviolett, so ist die Absorptionsfläche für kleinere Schwingungszahlen ($q < p_1$), d. i. vor dem Absorptionsstreifen, ein Ellipsoid, für das Maximum der molekularen Absorption ($q = p_1$) wird sie zu einem Cylinder und geht hinter dem Absorptionsstreifen ($q > p_1$) in ein einfächeriges Hyperboloid über; durch diese Umwandlung der Absorptionsfläche charakterisirt sich die anomale Dispersion. Eine eingehendere Discussion der verschiedenen in unseren Formeln enthaltenen Fälle kann jedoch nicht die Aufgabe der gegenwärtigen kurzen Mittheilung sein, welche sich ihrer Ueberschrift gemäss nur mit dem bisher üblichen engeren Begriffe der Doppelbrechung zu beschäftigen hat. Was die anomale Dispersion und die Oberflächenfarben betrifft, mag einstweilen auf die frühere Abhandlung „Theorie der (normalen und anomalen) Dispersion“ zurückverwiesen werden, in welcher die nämlichen Gleichungen 19—22 (dort 10, 11, 10a und 11a) für einen speciellen Fall ($u_3 = 0$, $v_3 = 0$, $w_3 = 1$) discutirt wurden.

Für jetzt beschränken wir uns darauf, die Doppelbrechung farbloser durchsichtiger Krystalle, wie sie sich nach Massgabe unserer Theorie gestaltet, abzuleiten.

Bei farblos durchsichtigen Körpern ist der Absorptionscoëfficient K für sämmtliche Strahlen des sichtbaren Spectrums als verschwindend klein anzusehen. Nach den Erörterungen der früheren Abhandlung aber hat der Absorptionscoëfficient seine kleinsten Werthe in dem Gebiete vor dem Maximum der molekularen Absorption; soll daher das ganze sichtbare Spectrum diesem Gebiete angehören, so müssen die drei Maxima der Absorption, welche den Schwingungszahlen $\frac{p_1}{2\pi}, \frac{p_2}{2\pi}, \frac{p_3}{2\pi}$ entsprechen, in den ultravioletten Theil des Spectrums fallen, d. i. jede dieser Schwingungszahlen muss grösser sein als die Schwingungszahl $\frac{q}{2\pi}$ der fortgepflanzten Lichtwelle. Die Fläche

$$(p_1^2 - q^2)x^2 + (p_2^2 - q^2)y^2 + (p_3^2 - q^2)z^2 = 1 \qquad (A'$$

ist daher jetzt ein Ellipsoid. Wenn aber K sehr klein ist, so ist auch Q sehr klein; vernachlässigen wir daher Q gegenüber P und setzen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V im leeren Raume $= 1$, so ergibt sich aus Gleichung (19)

$$\frac{1}{c^2} = P,$$

oder, wenn wir in Gleichung (21) im Nenner das Glied $4(k-\nu)^2 q^2$ gegen s^2 ausser Acht lassen:

$$\frac{1}{c^2} = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{s}.$$

Darin bedeutet $\frac{1}{s}$ das Quadrat der beiden Halbachsen des Diametralschnitts des Ellipsoids (A') mit einer zur Wellenebene parallelen Ebene. Bezeichnen wir diese Halbachse, welche sonach ein Radius vector jenes Ellipsoides ist, mit r' und mit u, v, w die Cosinus der Winkel, welche dieser Radius vector mit den drei Hauptelasticitätsrichtungen (d. i. mit den Achsen des Ellipsoides A') bildet, so haben wir

$$\frac{1}{c^2} = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot r'^2$$

oder

$$\frac{1}{c^2} = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{(p_1^2 - q^2)u^2 + (p_2^2 - q^2)v^2 + (p_3^2 - q^2)w^2}. \qquad (23$$

Diese Gleichung liefert, wenn wir $u = 1$, $v = 0$, $w = 0$ setzen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der mit der x-Achse parallelen Schwingungen, oder, was dasselbe ist, das dieser Schwingungsrichtung entsprechende Hauptbrechungsverhältniss n_1. Bezeichnen wir die beiden andern Hauptbrechungsindices, welche den Werthsystemen $u = 0$, $v = 1$, $w = 0$ und $u = 0$, $v = 0$, $w = 1$ entsprechen, resp. mit n_2 und n_3, so erhalten wir

$$n_1^2 = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{p_1^2 - q^2}, \quad n_2^2 = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{p_2^2 - q^2},$$

$$n_3^2 = 1 + \frac{4\nu^2 m}{\mu} \cdot \frac{1}{p_3^2 - q^2},$$

und daraus

$$\frac{\mu}{4\nu^2 m}(p_1^2 - q^2) = \frac{1}{n_1^2 - 1}, \quad \frac{\mu}{4\nu^2 m}(p_2^2 - q^2) = \frac{1}{n_2^2 - 1},$$

$$\frac{\mu}{4\nu^2 m}(p_3^2 - q^2) = \frac{1}{n_3^2 - 1}.$$

Wir können demnach die obige Gleichung (23.) auch so schreiben:

$$\frac{1}{c^2} = 1 + \frac{1}{\frac{u^2}{n_1^2 - 1} + \frac{v^2}{n_2^2 - 1} + \frac{w^2}{n_3^2 - 1}}. \tag{23a}$$

Setzen wir die rechte Seite dieser Gleichung $= r^2$ und betrachten r als den Radius vector einer krummen Fläche, so drückt sich die Gleichung dieser Fläche in rechtwinkligen Coordinaten, da $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $x = ru$, $y = rv$, $z = rw$ ist, folgendermassen aus:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)\left(\frac{x^2}{n_1^2 - 1} + \frac{y^2}{n_2^2 - 1} + \frac{z^2}{n_3^2 - 1}\right) = x^2 + y^2 + z^2, \tag{B}$$

und wir haben

$$c = \frac{1}{r}. \tag{23b}$$

Mit Rücksicht auf die oben ausgesprochenen allgemeineren Theoreme ergibt sich hieraus der folgende Satz:

In einem farblos durchsichtigen Krystall pflanzen sich in einer gegebenen Richtung im Allgemeinen zweierlei ebene Wellen fort, deren Schwingungen in die Wellenebene fallen und auf einander senkrecht stehen. Man erhält die Richtungen dieser beiden Gruppen von

Schwingungen, wenn man durch den Mittelpunkt der Fläche (B) eine zur gegebenen Wellennormale senkrechte Ebene legt, welche die Fläche (B) längs einer mit zwei zu einander senkrechten Achsen begabten Curve schneidet. Die Schwingungen sind den Achsen dieses Diametralschnitts parallel, und die reciproken Werthe der halben Achsen geben die Geschwindigkeiten an, mit welchen sich die zugehörigen Schwingungen fortpflanzen.

Die Fläche (B) spielt also in unserer Theorie dieselbe Rolle wie in der Fresnel'schen Theorie das Ellipsoid

$$\frac{x^2}{n_1^2}+\frac{y^2}{n_2^2}+\frac{z^2}{n_3^2}=1, \qquad (E$$

welches die Fläche (B) in den sechs Endpunkten der Achsen berührt und sich derselben auch sonst sehr nahe anschliesst. Auch die Wellenfläche, welche der Fläche (B) entspricht, stimmt mit der aus dem Ellipsoid (E) hergeleiteten Fresnel'schen Wellenfläche sehr nahe überein; sie hat mit ihr nicht nur die zwölf Scheitel, sondern auch die in den Coordinatenebenen gelegenen Kreisschnitte gemein; sie ist namentlich auch durch jene Singularitäten ausgezeichnet, welche die innere und äussere conische Refraction bedingen; jedoch sind die Winkel der optischen Achsen von denjenigen bei der Fresnel'schen Wellenfläche ein wenig verschieden. Von diesen kleinen Unterschieden abgesehen stimmen also die Consequenzen unserer Theorie mit denjenigen der Fresnel'schen überein und fallen ganz damit zusammen, wenn man sich erlaubt, der Fläche (B) das ihr sehr nahe kommende Ellipsoid (E) zu substituiren.

In den beiden früheren[1]) und der gegenwärtigen Abhandlung sind die Umrisse der neuen Theorie des Lichtes — man könnte sie die „Reibungstheorie" nennen — enthalten, welche die Erscheinungen in ihrem naturgemässen Zusammenhange aus der Wechselwirkung des Aethers und der Körpertheilchen erklärt. Von dem in den Körpern enthaltenen Aether wird angenommen, dass er von dem Aether des leeren Weltraumes in nichts verschieden sei und dass er die Zwischenräume zwischen den Körper-

[1]) Repertorium dieser Band S. 15 ff. u. 81 ff.

molekülen frei durchfluthe. Weit davon entfernt, dass durch die Mitberücksichtigung der Bewegung der Körpertheilchen die Theorie sich complicirt, wird vielmehr dadurch eine wesentliche Vereinfachung erzielt. Was insbesondere die Doppelbrechung anlangt, so werden eine Reihe von Schwierigkeiten, welche in den älteren Theorien aus der Annahme eines Aethers von besonderer (man könnte sagen „krystallinischer“) Constitution entspringen, mit einem Schlage beseitigt. So kommt z. B. das sogenannte Polarisationsellipsoid nebst den „quasitransversalen“ und „quasilongitudinalen“ Schwingungen ganz in Wegfall, und die Theorie führt sofort zu jener Construction, welche erfahrungsgemäss die Polarisationsverhältnisse der Krystalle darstellt. Bekanntlich müssen, je nachdem man die Fresnel'sche oder die Neumann'sche Hypothese über die Beschaffenheit des zwischenmolekularen Aethers acceptirt, die Schwingungen entweder senkrecht oder parallel zur Polarisationsebene angenommen werden. Unsere Theorie, welche die Beschaffenheit des incompressibel gedachten Aethers innerhalb und ausserhalb der Körper als völlig gleich voraussetzt, verlangt, dass bei einachsigen Krystallen die Schwingungen des gewöhnlich gebrochenen Strahls senkrecht zum Hauptschnitt, also senkrecht zur Polarisationsebene erfolgen.

Der Distanzmesser.

Erfunden und construirt

von

Ernest Schneider,

Mechaniker in Währing bei Wien.

(Hiezu Tafel VIII und IX.)

Ein in der Mitte des Jahres 1874 von einem ungarischen Geometer an mich gerichtetes Verlangen nach einem Distanzmesser, welcher bei Messtischaufnahmen zu verwenden sei, war Veranlassung zur Construction eines neuen Distanzmessers. Nachdem aber die Reichenbach'schen und die Stampfer'schen Distanzmesser ihren Zwecken vollkommen entsprechen und bei Vermessungen überhaupt der Anwendung der Distanzmesser nur eine untergeordnete Rolle zufallen kann, habe ich diese Idee damals nicht mehr weiter gepflegt — und ich verfertigte dem erwähnten Geometer ein Perspectivlineal, mit welchem der Stampfer'sche Distanzmesser verbunden war.

Mit demselben angestellte Versuche ergaben dasselbe, was Herr Hofrath, Professor Dr. Joseph Herr in seiner „Anleitung zum Nivelliren" bezüglich der Genauigkeit dieser Distanzmesser mitgetheilt hat. Es mögen demnach mit Rücksicht auf das weiter Folgende die bezüglichen vergleichenden Messungsresultate, welche mittelst Kette und mittelst Stampfer'schen Distanzmessers gefunden wurden, aus obgenanntem Werke hier Raum finden.

Distanz = D Klafter [1])	Fehler der Distanz		Fehler einer gewöhnlichen Kettenmessung
	Lattenhöhe 1 Klafter	Lattenhöhe 2 Klafter	
20	0,004 Klft.	0,002 Klft.	0,02 Klft.
30	0,008	0,004	0,03
40	0,014	0,007	0,04
60	0,034	0,017	0,06
80	0,06	0,030	0,08
100	0,09	0,045	0,10
150	0,21	0,10	0,15
200	0,37	0,18	0,20
250	0,58	0,29	0,25
300	0,84	0,42	0,30
400	1,49	0,74	0,40

1) Eine Wiener Klafter = 1,896654 m.

Wie aus dieser Tabelle zu ersehen, ist die Genauigkeit der Messungen für manche Zwecke eine völlig befriedigende.

Ich dachte nun daran, ein Instrument zu construiren, mit dessen Hilfe vom Standpunkte des Beobachters aus man die Distanz ablesen könne, ohne vorerst einen Figuranten auf den entfernten Punkt postiren zu müssen. Indem ich meine Absicht mehreren Herren bekannt gegeben habe, theilte mir im August vorigen Jahres Herr Prof. Schlesinger eine Idee mit, welche im Folgenden besteht:

Ist B, siehe Fig. 1, Tafel IX das entfernte Object, dessen Distanz von A, der Achse eines Theodoliten, gemessen werden soll, und $SS'S''$ ein ebener Spiegel, dessen Entfernung von der Achse des Theodoliten $AS'' = d$ ist, so wird das reflectirte Bild von B eben so weit hinter dem Spiegel in C erscheinen, als es vor demselben sich befindet, insofern CB eine auf die Spiegelebene Senkrechte vorstellt und d die messbare Entfernung der Spiegelebene von der Achse des Theodoliten ist.

Bezeichnet man den Winkel, welcher durch den Visirstrahl B mit der durch die Achse des Theodoliten parallel zu der Spiegelebene gedachten Ebene eingeschlossen wird, also BAE mit α, und den Winkel, welchen diese letztere Ebene mit dem Visirstrahle nach C einschliesst, also EAC mit $\alpha + \beta$, so bieten diese Winkel mit dem messbaren senkrechten Abstande d der Achse des Fernrohres von der Spiegelebene als Ausgangsseite die Elemente, um die zu messende Distanz AB zu berechnen.

Der Unterschied der Lesungen am Theodoliten, indem das entfernte Object B und dessen Spiegelbild C pointirt wurde, gibt den Winkel $2\alpha + \beta$; weiters erhält man aus dem Unterschiede der Lesungen, indem man das Spiegelbild C und in senkrechter Lage des Fernrohres auf die Spiegelebene das reflectirte Fadenkreuz so pointirt, dass es hinter dem Fadenkreuze des Fernrohres vollkommen verschwindet, den Winkel $S'AS'' = ACE = 90^0 - (\alpha + \beta)$, und es sind somit auch die Winkel α und β durch Messung mit dem Theodoliten bestimmt, und man hat zur Bestimmung der Distanz AB mit Hilfe der gemessenen Winkel

$$AB = \frac{2d \cos(\alpha + \beta)}{\sin \beta}.$$

Macht man $CD = 2d$, wodurch $CAD = \beta$, so ist ersichtlich, dass β und AB mit einander sich verändern. Je grösser daher die

Entfernung des Objectes von A ist, desto kleiner wird nothwendigerweise β, vorausgesetzt dass die Distanz d des Spiegels von A eine unveränderliche ist. Es müsste also bei grösserer Entfernung des Objectes B der Spiegel $SS'S''$ unverhältnissmässig weit vom Fernrohre abstehen, um den Winkel $\alpha + \beta$ mit ausreichender Genauigkeit zu erhalten.

Diese Schwierigkeit war auch Ursache, dass Herr Prof. Schlesinger diese Idee nicht empfahl. Meine Absicht war nun, zur Vergrösserung, bzw. Vervielfältigung der Distanz d das von dem Spiegel reflectirte Bild B unter gleichen Winkeln auf einen zweiten, dritten, vierten und fünften Spiegel reflectiren und von dem letzten Spiegel wieder in das Fernrohr treten zu lassen. Hiedurch könnte d allerdings vervielfältigt werden; allein der Verlust an Lichtstärke macht diese Methode unthunlich, abgesehen davon, dass sie bei grossen Distanzen doch noch unzureichend wäre, nachdem auch der Abstand des Spiegels von der Instrumentenachse Einschränkungen unterworfen ist.

In dieser Erkenntniss wurde mir klar, dass ein brauchbarer Distanzmesser nur dann erreichbar sei, wenn eine Basis von bestimmter Länge zur Anwendung käme, wenn sie senkrecht auf der Visirlinie sich befinde. Hiedurch wird aber ein grösserer Apparat bedingt, und es musste von einem portativen Distanzmesser, der etwa in der Tasche tragbar wäre, gänzlich abgesehen werden, da ein solcher lediglich einer phänomenalen Entdeckung, wie etwa die Photographie ist, sein Entstehen verdanken könnte. Daraus ergab sich bald, dass ein nach dem Spiegelprincip zu construirender Distanzmesser am frühesten für maritime Zwecke sich eignen dürfte, weil zu Schiffe der Transport des Instrumentes entfällt.

Ein Distanzmesser für Kriegszwecke zur See muss die Entfernung eines sichtbaren Gegenstandes anzeigen, ohne dass man erst Jemanden dahin absendet; er muss die Entfernung angeben, selbst wenn das gesehene Object in Bewegung sich befindet; er darf der Operation des Messens keinen Eintrag thun, selbst wenn der Boden, auf dem er sich befindet, in Bewegung ist; er muss die Distanz anzeigen, selbst wenn man die Dimensionen des anvisirten Objectes nicht kennt; er darf nicht mehr als eine Visur bedingen; er muss leicht handsam sein und eine genügende Genauigkeit auch für 3000 bis 4000^{m} grosse Distanzen gewähren.

Die dem Principe nach mir bekannten Distanzmesser sind die von Uchatius, Klöckner, Roksandic, Stampfer, Reichenbach, Schaub, Roskiewicz, ein optisch-akustischer Distanzmesser von Le Boulengé etc.

Der Distanzmesser von Uchatius beruht darauf, dass in dem Gesichtsfelde statt eines Fadenkreuzes eine in kleine Quadrate eingetheilte Glasplatte sich befindet. Als Basis dient ein armirter Infanterist, und es wird aus der Menge der vom Bilde des Infanteristen bedeckten Felder auf die Distanz geschlossen. Leider ist dieses Instrument nur auf sehr kurze Strecken verwendbar und ist zu sehr von der individuellen Grösse des Objectes und von dem Umstande abhängig, ob der Mann ganz oder theilweise sichtbar ist u. dgl.

Im Principe beruht dieses System auf der Kenntniss der Dimensionen des anvisirten Objectes.

Der Distanzmesser von Klöckner fordert, dass eine Basis von Seite des Visirenden abgeschritten werde, und es ist Bedingung, dass sowohl anvisirtes Object als auch Basis die gegenseitige Stellung während der Messung nicht verändern.

Der dem vorigen sehr ähnliche Distanzmesser von Roksandic scheitert ebenfalls an der Bedingung der Unveränderlichkeit der gegenseitigen Stellung von Basis und anvisirtem Objecte während der Messung.

Der Distanzmesser von Stampfer ist für militärische Zwecke sowohl als für maritime nicht verwendbar, indem eine anzuvisirende Basis am Orte sich befinden muss, dessen Entfernung vom Beobachter ermittelt werden soll, und die Unveränderlichkeit der Basis sowohl als des Instrumentes während der Messung in Bezug auf Lage erforderlich ist.

Auch der Distanzmesser von Reichenbach ist wie der vorhergehende aus denselben Gründen unzulässig.

Ein optisch-akustischer Distanzmesser wird in Frankreich versucht.

Er besteht aus einer mit einer Flüssigkeit gefüllten Glasröhre, welche der Länge nach mit einer Gradeintheilung versehen ist. Wird nun von Seite des Feindes ein Schuss abgefeuert, so dreht der Beobachter, sobald er den Blitz sieht, die Röhre in der Hand so um, dass sie vertical steht. Eine kleine Stahlplatte, die sich ruhig in der

Flüssigkeit mit ihrer Fläche senkrecht auf der Röhrenachse befindet, soll dann in Folge der Schwere gleichmässig sinken.

Erreicht nun der Knall das Ohr des Beobachters, so dreht er die Röhre schnell wieder in die horizontale Lage, worauf das oben erwähnte Stahlplättchen bei einem Theilstriche stehen bleibt. Aus der Differenz der beiden Ablesungen kann man die Distanz berechnen. Es ist wohl selbstverständlich, dass die ungleiche Erwärmung der Luft, die Richtung des Windes und noch viele andere Ursachen vorhanden sind, welche sich bei dieser Distanzbestimmung nicht berücksichtigen lassen und daher nur zu sehr unsicheren Resultaten führen können.

Unbedingt spricht aber der Umstand gegen diesen Distanzmesser, dass er von einem Schusse, den der Gegner abfeuern müsste, abhängt.

Der sogenannte Küstendistanzmesser von Starke hat die Höhe eines Küstenpunktes über dem Meeresspiegel zur Basis, bedingt also die Unveränderlichkeit der Lage derselben.

Der Scheitel des zu messenden Winkels befindet sich in der Wasserlinie eines in Sicht befindlichen Schiffes. Es wird also eine ruhige See bedingt, was sehr selten oder nie der Fall ist. Auch muss Refraction, Ebbe und Fluth berücksichtigt werden. Im Uebrigen kann man zur Distanzmessung in dieser Weise jeden trigonometrischen Höhenmesser verwenden, der nur halbwegs Anspruch auf Genauigkeit machen kann.

Der Distanzmesser von Oberst Roskiewicz wurde im 8. Hefte des 14. Bandes des Repertorium S. 455 ff. publicirt und besteht aus einem Stative, einem Basisrohre und zwei an den Endpunkten des Basisrohres angebrachten distanzmessenden Fernrohren.

Bedingungen dieses Distanzmessers sind: erstens absolute Ruhe des anvisirten Objectes, zweitens absolute Ruhe des Standortes, drittens zwei Fernrohrvisuren auf einen und denselben Gegenstand.

Nachdem nun sowohl die Basis als das in Sicht befindliche Schiff wenigstens so lange, bis der Beobachter von einem Fernrohre zum andern kommt, um letzteres auf denselben Punkt einzustellen, ruhig bleiben müssen, ist auch dieser Distanzmesser maritimen Zwecken nicht ganz entsprechend. Es wäre am Ende denkbar, dass bei beiden Fernrohren je ein Beobachter genau auf denselben Punkt die Fadenkreuze einstellen würde.

Wenn man aber eine Distanz zu messen hat und das in Sicht befindliche Schiff bewegt sich nicht in gerader Linie auf den Standpunkt des Beobachters zu, sondern nach links oder rechts, so wird bei noch so guter Schulung der Beobachter ein Fehler entstehen, der viele hundert Meter, ja Tausende von Metern betragen kann.

Bei einer Basis von $^3/_2{}^m$ wird der Winkel, welchen die beiden Visirlinien mit einander einschliessen, folgende Werthe bekommen:

für eine Distanz von	1000^m	$\alpha =$	5′	9″
	1100	$\alpha =$	4	41
	1200	$\alpha =$	4	17
	1300	$\alpha =$	3	58
	1400	$\alpha =$	3	41
	1500	$\alpha =$	3	26
	1600	$\alpha =$	3	13
	1700	$\alpha =$	3	2
	1800	$\alpha =$	2	52
	1900	$\alpha =$	2	42
	2000	$\alpha =$	2	32
	3000	$\alpha =$	1	43
	4000	$\alpha =$	1	17

Bei grösserer Basis würden selbstverständlich die Winkel grösser ausfallen, daher sicherere Resultate geben. Es wird jedoch immer vorausgesetzt, dass die Fernrohrfäden genau auf einen und denselben Punkt eingestellt werden; dieses ist aber nur dann möglich, wenn das anvisirte Object und der Standpunkt des Instrumentes ihre Lage nicht verändern.

Die Anwendung dieses Distanzmessers ist auf einem Schiffe nicht gut denkbar; denn bei ruhigem Standorte des Instrumentes wird es sehr selten gelingen, auf einen sich bewegenden Punkt beide Fernrohre entsprechend einzustellen; wenn aber der Standort sich selbst dreht und bewegt, wird ein brauchbares Resultat nur ausnahmsweise erreicht werden. Auf festem Terrain unterliegt die Anwendung dieses Instrumentes keiner Schwierigkeit, und zwar um so weniger, als ein nach dem Principe von Roskiewicz von mir angefertigtes Instrument in neuerer Zeit bedeutend verbessert wurde. Unter den Verbesserungen will ich folgende hervorheben: Erstens kann man den Abstand der optischen Mittelpunkte beider Fernrohre reguliren.

Zweitens kann man den Winkelwerth eines Schraubenganges der Messschraube im Mikrometerfernrohre genau gleich 100 Secunden stellen. Drittens wurde in neuester Zeit ein Verfahren ausfindig gemacht, gemäss welchem man den Parallelismus der beiden Fernrohre herstellen kann, ohne das am angeführten Orte S. 460 erwähnte Verfahren mit einem dem Pole nahen Sterne oder mit einer Latte und zwei Zielscheiben befolgen zu müssen. Man kann nach dem neuen Verfahren bei entsprechender Construction des Instrumentes den Parallelismus der beiden Rohre herstellen, ohne hiezu mehr als einen terrestrischen Punkt zu benöthigen. Viertens sind die früher nöthig gewesenen Tabellen jetzt überflüssig, weil die Einrichtung derart getroffen wurde, dass man die Distanzen unmittelbar an der Mikrometertrommel ablesen kann.

Ein ähnlicher Distanzmesser von General Berdan in den Vereinigten Staaten Nordamerikas wird versucht. Derselbe hat die Basis 1^m lang und an beiden Enden Fernrohre mit Objectiven von $1\frac{1}{2}^m$ Brennweite, bedingt also ebenfalls die Unveränderlichkeit der Basislage während des Messens.

Der Distanzmesser von Schaub ist ebenso wie der Spiegelsextant unabhängig von den Bewegungen des eigenen Fusspunktes sowohl wie des anvisirten Objectes. Es ist einleuchtend, dass diese beiden Instrumente die besten Distanzmesser ergäben, wenn es nicht unbedingt nöthig wäre, zur Berechnung der Distanz die Dimensionen des anvisirten Objectes oder die Kimmtiefe zu kennen.

Beim Sextanten stellt man vorerst die Alhidade so, dass das Spiegelbild eines Objectes mit dem direct ins Fernrohr gelangenden zusammenfällt, verdreht hierauf die Alhydade derart, dass Spiegelbild und directes Bild sich tangiren.

Weiss man nun die Dimensionen des Objectes, so kann man aus denselben und aus dem Winkel, der nach der Verdrehung des drehbaren Spiegels am Sextanten abgelesen werden kann, die Distanz berechnen.

Beim Schaub'schen Distanzmesser kann man aus der Verschiebung der beiden Objectivlinsen, welche mittelst einer Messschraube oder eines Gradbogens gemessen wird, und aus der Kenntniss der Dimensionen des anvisirten Objectes die Distanz berechnen.

Bei beiden letzteren ist es nicht störend und eine Messung verhindernd, wenn der Standort des Beobachters und des Objectes sich verändert, was jeder Seemann bestätigen kann und wird.

Sowohl der Sextant als auch das Schaub'sche Instrument sind als Distanzmesser verwendbar, wenn man die Kimmtiefe kennt.

Wenn man nämlich auf dem Meere von einem erhöhten Punkte eine Tangente zur Wasseroberfläche zieht, so schliesst selbe mit der durch denselben Punkt gelegt gedachten Horizontalebene einen Winkel ein, den man die Kimmtiefe nennt.

Zieht man von demselben Punkte zum Fusspunkte eines innerhalb des Meereshorizontes befindlichen Objectes eine Gerade, so schliesst diese mit obiger Horizontalebene einen Winkel ein, der grösser ist als die Kimmtiefe. Dieser Winkel wird gewöhnlich die Depression jenes Objectes genannt. Wenn also der Beobachter im Stande ist, die Höhe seines Auges über dem Meeresspiegel und die Depression eines entfernten Schiffes zu messen, so hat er die Möglichkeit, die Entfernung eines in Sicht befindlichen Schiffes zu bestimmen.

Die Messung der Höhe des Auges über dem Meeresspiegel unterliegt keinen Schwierigkeiten. Dagegen kann man die Depression nicht direct messen, weil bei dem stetig schwankenden Schiffe die Anwendung einer Libelle oder eines Senkels behufs Eruirung der Horizontalebene unmöglich ist.

Dagegen kann man den Winkel bestimmen, welchen die Tangente zur Meeresoberfläche mit der Geraden vom Augpunkte zum Fusspunkte des innerhalb des Meereshorizontes befindlichen Objectes einschliesst, indem man das Bild der Wasserlinie des Schiffes mit dem Bilde des Meereshorizontes zur Deckung bringt. Addirt man den Winkel, um welchen der drehbare Arm am Sextanten, oder jenen Winkel, um den die beiden Objectivlinsen des Schaub'schen Objectivmikrometers verdreht werden mussten, um das Bild der Wasserlinie mit dem Bilde des Meereshorizontes zur Deckung zu bringen, zur bekannten Kimmtiefe, so erhält man die Depression des anvisirten Objectes.

Hiemit wäre ein Distanzmesser gegeben. Wenn man aber die Distanz des eigenen Schiffes vom Lande kennen will und man daher hinter dem Lande keinen Meereshorizont sieht, dessen Bild mit dem Bilde des Fusspunktes des Objectes, dessen Entfernung zu bestimmen ist, zur Deckung gebracht werden könnte, so kann man keine Distanz bestimmen. Es wäre jetzt der Fall denkbar, von dem ich nicht weiss, ob er in der Marine Anwendung findet, dass man vom Augpunkte eine Gerade zu einem Punkte am Bug oder am Achter des Schiffes ziehen würde, so dass man mit Hilfe des Sextanten oder

Schaub'schen Instrumentes jenen Winkel bestimmen würde, den die erwähnte Gerade mit jener einschliessen würde, die man vom Auge zum Fusspunkte des zu bestimmenden Objectes zieht. Bedenkt man aber, dass man das Schiff zu diesem Behufe derartig drehen müsste, dass der Augenpunkt, dann der Punkt am Bug oder am Achter, dessen Depression bekannt ist, und das zu bestimmende Object nahezu in eine und dieselbe Verticalebene fallen, so wird man finden, dass diese Manipulation (besonders bei Segelschiffen) nicht immer durchführbar ist. Ferner ist zu bedenken, dass das Schiff beständig schwankt, dass also die Gerade vom Augpunkte zu dem bekannten am Bug oder Achter ebenfalls schwankt. Diese Bedenken könnte man aber vielleicht noch übergehen, wenn die Bilder der am Schiffe befindlichen nahen Punkte und der entfernten Objecte in den Fernrohren gleichzeitig deutlich gesehen werden könnten. Dies ist aber in Folge der dioptrischen Eigenschaften der Fernrohre nicht möglich.

Bei Benutzung der Kimmtiefe zur Distanzbestimmung tritt sehr oft der Umstand hinderlich auf, dass man den Horizont nicht gut sieht, z. B. bei bewegter See, bei dunstiger Luft, bei grellem Sonnenschein, bei verschiedenen Stellungen der Sonne, bei ganz leichtem Nebel etc.

Aus dem Gesagten erhellt, dass jeder von den beschriebenen Distanzmessern irgend einer Bedingung nicht entspricht. Mein Bestreben war nun dahin gerichtet, eine Construction ausfindig zu machen, welche allen Bedingungen entsprechen soll.

Da aber immer eine Basis erforderlich ist, konnte es mir auch nicht gelingen, von einer Basis abzusehen.

Um nun nicht ein Ziel zu verfolgen, von dessen Unerreichbarkeit man im vorhinein sich hätte überzeugen können, berechnete ich die Werthe von α für die Distanzen von 4000^m abwärts von 20 zu 20^m und fand, dass bei einer Basis von

4^m für die Distanz 4000^m $\alpha = 3' \; 26''$
6 „ „ „ 4000 $\alpha = 5 \;\; 9$
8 „ „ „ 4000 $\alpha = 6 \;\; 52$ sei.

Je 20^m Abnahme ergaben $1''$, $1\frac{1}{2}''$, $2''$ Winkeldifferenz circa bis zu 3000^m, je nach der angenommenen Basis von 4, 6, 8^m; weiter abwärts nehmen die Werthe selbstverständlich rascher zu.

Es sei in einem Dreiecke ABC, $AB = a$ die Basis des Distanzmessers $= 6^m$ lang, $b = BC$ die zu messende Distanz $= 4005^m$ lang,



α der gemessene Winkel, $CD = \triangle b$ die Differenz, um welche die Distanz zunimmt, δ die Grösse des Winkels, um den α bei zunehmender Distanz kleiner wird, so ist

$$\text{I. } b = a \operatorname{ctg} \alpha$$
$$\text{II. } b + \triangle b = a \operatorname{ctg} (\alpha - \delta).$$

Zieht man I. von II. ab, so hat man

$$\triangle b = a [\operatorname{ctg} (\alpha - \delta) - \operatorname{ctg} \alpha] = \frac{a \sin \delta}{\sin \alpha \sin (\alpha - \delta)}.$$

So lange δ einen sehr kleinen Werth besitzt, kann man genau genug $\sin \delta = \delta$ und $\cos \delta = 1$ setzen. Dadurch erhält man

$$\triangle b = \frac{a \delta}{\sin^2 \alpha - \delta \sin \alpha \cos \alpha}.$$

Ist $a = 6^m$, $b = 4005^m$, so ist $\alpha = 5' 9''$,

und weil $\sin^2 \alpha = 0{,}0000022442$ und $\sin \alpha \cos \alpha = 0{,}001498$ ist, so findet man

$$\triangle b = \frac{a \delta}{0{,}0000022442 - 0{,}0014981 \delta}.$$

Weil aber der Bogen δ in Secunden gleich 206265 mal dem Bogen δ für den Radius 1 ist, so folgt $\delta = \frac{\delta''}{206265}$, und nun wird nach einfacher Substitution und Reduction

$$\triangle b = \frac{10\,000000\, \delta''}{771499 - 2497\, \delta''} \text{ oder rund } = \frac{100000\, \delta''}{7715 - 25\, \delta''},$$

und daraus folgt
$$\delta'' = \frac{7715 \triangle b}{25 \triangle b + 100000}.$$

Es sei zum Beispiel $\triangle b = 50^m$, so ist $\delta'' = 385750 : 101250 = 3{,}8''$. Man ersieht daraus, dass bei einer Aenderung der Distanz von 4005 bis 4055^m sich der Winkel um $3{,}8''$ ändert, um einen Winkel, der sich mit der Messschraube sehr leicht und genau messen lässt.

Beim ersten Anblicke würde man denken, dass die Basis a mit einer absonderlichen Genauigkeit gemessen und bezüglich der Länge rectificirt werden müsste und dass der Einfluss der Temperatur auf die berechnete Distanz ein sehr nachtheiliger sein könne

Nehmen wir an

$$\alpha = 5' \, 9'', \quad b = 4005^{m}, \quad a = 6^{m},$$

so ist

$$\operatorname{ctg} \alpha = 670{,}3.$$

$$b = a \operatorname{ctg} \alpha$$

$$b \pm \triangle b = (a \pm \triangle a) \operatorname{ctg} \alpha$$

$$b \pm \triangle b = a \operatorname{ctg} \alpha \pm \triangle a \operatorname{ctg} \alpha$$

$$\triangle b = \pm \triangle a \operatorname{ctg} \alpha.$$

$\triangle a$ sei nun gleich 1^{cm}, so ist

$$\triangle b = \pm 0{,}01 \cdot 670 = \pm 6{,}7^{m}.$$

Hieraus folgt: Wenn sich die 6^{m} lange Basis selbst um einen ganzen Centimeter ändert, so wird die Sicherheit der Messung bei einer zu messenden Distanz von 4000^{m} circa um 6—7^{m} fraglich sein, ein gewiss zu vernachlässigender Fehler. Berücksichtigt man, dass der Ausdehnungscoëfficient für Messing bei einer Temperaturveränderung von 0—100^{0} C. $= {}^{1}/_{550}$ angenommen werden kann, dass in der Natur aber eine Temperatur von 35^{0} C. selten überschritten wird, und nimmt man an, dass die Ausdehnung der Metalle wirklich vollkommen proportional der zunehmenden Wärme sei, so wird bei einer Basislänge von 6^{m}, welche 6^{m} bei einer durchschnittlichen Wärme von 17^{0} C. abgezirkelt werden, eine Basisverlängerung von $\frac{6 \cdot 18}{550 \cdot 100} = 0{,}00109$, also eines Millimeters stattfinden. Eine ähnliche Verminderung der Basislänge würde stattfinden, wenn die Temperatur auf 0^{0} sänke.

Nachdem aber mit der Stampfer'schen Schraube das Messen von Winkeln bis auf $2''$ Genauigkeit sehr gut und verlässlich möglich ist, so schien es mir gestattet, auf Grund der angestellten Berechnungen an die Construction eines Distanzmessers zu gehen.

Beim Stampfer'schen Distanzmesser muss der Figurant an den Standort des zu beobachtenden Objectes gehen, der Beobachter muss zwei Visuren machen und die Differenz aus den Schraubenlesungen bilden, gleichzeitig auf die Libelle sehen, ob selbe rectificirt sei; auch muss die Latte senkrecht auf der Visur stehen, wenn der Beobachter nicht die Distanz mit $\cos \alpha$ multipliciren will, selbstverständlich im ebenen Terrain.

Bei meinem Distanzmesser genügt eine Lesung, der Figurant entfällt ganz, die Multiplication mit $\cos \alpha$ gleichfalls.

Er zeigt sich in Fig. 2 Tafel VIII als ein aus einer unbeschränkten Anzahl von Theilen zusammengesetztes Basisrohr, an dessen einem Ende sich ein rechtwinkliges Prisma befindet, das die vom entfernten Objecte kommenden Strahlen unter 90° in ein innerhalb des Basisrohres befindliches gebrochenes Fernrohr reflectirt und an dessen anderem Ende sich ein drehbares Fernrohr à vision direct befindet, mit welchem dasselbe Object gleichzeitig pointirt wird. Die Drehung des Fernrohres wird mit Hilfe einer Messschraube bewirkt, so dass also der Winkel, welchen die durch das Basisprisma gehende Visur mit der durch das directe Fernrohr gehenden einschliesst, an der Messschraube abgelesen werden kann.

Nun zu dem ersten Endstücke.

In Fig. 3 ist K ein Kasten, welcher ein Glasprisma P_1 auf einem Stuhle S' trägt, vorne ein Blendrohr b hat, um Seitenstrahlen abzuhalten, und sich im Kugelgelenke des letzten Basisrohrgliedes r_1 nach zwei Richtungen drehen und wenden lässt; an dieses Glied können successive x Glieder angeschraubt oder angesetzt werden, so dass die Gesammtlänge des Instrumentes 4, 6, 8, 10, 12^m betragen kann.

Das letzte Glied Fig. 3a und b ist in dem Endstücke e drehbar eingesetzt und mittelst der drei Schrauben S_1, S_2, S_3 an dasselbe festgeschraubt; um die Drehung des ganzen Röhrenzusammensatzes um seine Achse zu ermöglichen, sind die Schrauben S_1, S_2, S_3 durch elliptische in r_n befindliche Schlitze durchgehend an e festgeschraubt.

Der Ansatz m dient dazu, den Röhrensatz mittelst der beiden darauf wirkenden Mikrometerstellschrauben verdrehen zu können.

Die Lager m_1 und m_2 dienen als Stützpunkte für die der ganzen Länge des Instrumentes nach sich fortbewegenden Mikrometerschrauben M_1 und M_2, mit welchen die Rectification des Prismas P_1 bewerkstelligt wird.

Es ist selbstverständlich von grösster Wichtigkeit, dass das Prisma senkrecht auf der Visirlinie steht, welche durch das Prisma zum Endstücke e gelangt.

Der wichtigste und complicirteste Theil ist nun das Endstück e Fig. 4a und 4b.

Es besteht aus einem Rohransatze, welcher an einem aus der Zeichnung ersichtlichen viereckigen Kasten K_1 befestigt ist. Im Rohransatze e ist das Objectiv O'_b angebracht, welches durch die Mikrometerschraube g regulirt werden kann und die durch das Prisma P_1 unter einem rechten Winkel reflectirten Strahlen des anvisirten Objectes

zum Oculare O_c durch das Prisma P_2 concentrirt. Am viereckigen Kasten K_1 befindet sich ein Blendrohransatz b_1, der in das zweite am Instrumente befindliche Fernrohr F_2 reicht. Um seitliche Strahlen abzuhalten, befinden sich entsprechende Blenden angebracht (aus der Zeichnung ersichtlich).

Das zweite Fernrohr ist drehbar und hat seine Drehungsachse in der vor dem (den beiden Fernrohren) gemeinschaftlichen Oculare befindlichen Diaphragmenebene. Der am Kasten K_1 befestigte Arm A dient einer Messschraube S als Stützpunkt, und hat letztere den zweiten Stützpunkt am drehbaren Fernrohre. Das Objectiv des zweiten Fernrohres ist ähnlich wie beim Basisfernrohre mittelst eines Mikrometertriebes stellbar. Es müssen daher die Objective gestellt werden, um die Bilder eines und desselben Objectes vor die deutliche Sehweite des gemeinschaftlichen terrestrischen oder astronomischen Oculares zu bringen.

Die Arme a_1, a_2, welche an F_2 befestigt sind (Fig. 4 b), sind die Bogenbalken (Tragebalken) für das bewegliche um eine in der Ebene von f liegende Achse drehbare Fernrohr.

Hiemit wäre der hauptsächlichste Theil meines Distanzmessers beschrieben, und es sind nur mehr einzelne Fehlerquellen zu beseitigen.

Ein Hauptfehler wäre die Biegung des Basisrohres und der damit verbundenen Verdrehung des Prismas P_1; der zweite Fehler wäre die mangelnde Versicherung, dass das Lager am Arme A für die Messschraube Fig. 4a und hiemit die einer bestimmten Distanz an der Schraube S entsprechende Lesung immer gleich bleibt. Dies zu controliren wurde Folgendes erdacht:

An dem sonst als Fadenplatte dienenden Diaphragma f Fig. 4 bringe ich ein schmales Kreuz aus Blech an, welches an der dem Auge zugewendeten Seite schwarz, an der dem Prisma P_2 resp. dem Objective O_b' zugewandten Seite matt roth gefärbt ist.

Das Gesetz, dass parallel auf eine Sammellinse auffallende Strahlen im Brennpunkte vereinigt werden, und umgekehrt, dass vom Brennpunkte ausgehende Strahlen hinter dem Objective parallel fortgehen, dient mir zur Controle.

Die vom Prisma aus in das Fernrohr gelangenden Strahlen werden das in f befindliche Kreuz hell beleuchten. Die roth bestrichene Seite wird daher zur Lichtquelle werden. Am Prisma P_2 befindet sich ein Glasansatz angekittet, der zur Befestigung für eine Collectivlinse dient,

welche die Brennweite Collectivlinse — Prismenhypotenusenfläche — Fadenplatte hat. Somit werden die vom Fadenkreuze ausgehenden Strahlen von der Collectivlinse O (Fig. 4a Tafel VIII) an parallel weiter gehen. Die Linse O_b' wird in der Mitte in der Ausdehnung von O beiderseits parallel angeschliffen oder durchbohrt, so dass die aus O kommenden Strahlen durch dasselbe ungehindert hiedurch bis zu einer an das Basisprisma P_1 angebrachten Spiegelfläche von denselben Dimensionen, die O hat, gelangen können. Vom Spiegel werden obige Strahlen zurückgeworfen, gelangen durch O_b', O und P_2 wieder vor f und werden neben dem schwarzen Kreuze als rothes Kreuz erscheinen, wenn das Prisma P_1 nicht richtig steht.

Auf diese Weise sieht der Beobachter, ob sein Prisma richtig steht oder nicht, und kann also dann eventuelle Fehler mittelst der oben erwähnten Mikrometerschrauben M_1, M_2 entsprechend rectificiren.

Die Mikrometerschrauben sind mit gelenkartig zusammengesetzten Rohren in eine derartige Verbindung zn bringen, dass man vom Endstücke e aus selbe entsprechend verdrehen kann.

In Fig. 3 ist es dargestellt, wie die eigentliche Mikrometerschraube M_2 angebracht und wie das prismatische Ende derselben mit den zusammenlegbaren, gelenkartig zusammengesetzten Rohren in Verbindung gebracht wird, so dass jeder todte Gang behoben ist und man bequem beim Einpacken des Instrumentes sowohl die Basisrohrbestandtheile wie die Mikrometerbestandtheile getrennt unterbringen kann.

Aus Fig. 3a ist ersichtlich, wie die zusammengesetzten Mikrometerbewegungen beim Endstücke c befestigt werden können.

In Fig. 4b ist die Art und Weise angedeutet, wie das bewegliche Fernrohr sich um eine in der Ebene der Fadenplatte liegende Achse dreht.

Um nun sicher zu sein, dass die bestimmte Stellung der Messschraube S, bei welcher die Visur des drehbaren Fernrohres senkrecht auf der Basis ist, sich nicht geändert hat, oder wenn selbe sich geändert, die Grösse der Abweichung und demgemäss die neue Lesung an derselben, bei welcher die Visur wieder senkrecht auf der Basis steht, bestimmen zu können, wende ich eine ähnliche Vorrichtung mit einer Collectivlinse wie bei dem im Endstücke e befindlichen Fernrohre an, nur mit dem Unterschiede, dass der reflectirende Spiegel sich auf einer planparallelen Glasplatte befindet, die hinter dem Objective im drehbaren Fernrohre angebracht wird und die von der am Diaphragma befindlichen Lamelle ausgehenden Strahlen in die

vor dem gemeinschaftlichen Oculare befindliche Bildebene zurückwirft. (Diese Vorrichtung ist nicht angedeutet, um die Zeichnung nicht complicirter zu machen.)

Es sind nun zwei Fälle möglich, bei welchen man ein zu einem Ganzen zu vereinigendes Bild irgend eines anvisirten Objectes erhalten kann.

Der erste ist in der Zeichnung angedeutet; das Bild des Objectes wird zum Theil von der Objectivlinse O_b' links erzeugt (die Basis horizontal gedacht und das Prisma links vom Beobachter) und zum anderen Theil rechts daneben von der Objectivlinse des drehbaren Fernrohres.

Der zweite ist in Fig. 5 angedeutet und ist jener, wobei das Bild zu einem Theil (die Basis horizontal gedacht) oberhalb von O_b' und zum anderen Theil unterhalb vom Objective des drehbaren Fernrohres erzeugt wird.

Stellt man sich das Diaphragma elliptisch vor, so würde im ersteren Falle die grosse Achse der Ellipse horizontal, im zweiten Falle vertical stehen. Die Diaphragmenlamellen werden derartig untergebracht, dass selbe das eigentliche Bild des anvisirten Objectes nicht stören.

Fig. 2 ist eine Totalansicht im verkleinerten Massstabe, und ist die Anzahl der Rohrglieder hier als 10 angenommen. Diese Anzahl hängt natürlich von der Basis und der Länge der Glieder, die man (wegen Verpackens) beliebig annehmen kann, ab.

Der Grundgedanke meines Distanzmessers ist aus Obgesagtem leicht begreiflich. Es handelt sich eben darum, einen constanten rechten Winkel zu erhalten, in dessen Scheitel sich ein Prisma befindet, so dass die Hypotenuse des Dreieckes, das man sich durch das Object, das Prisma und das Diaphragma gelegt denken kann, die optische Achse des drehbaren Fernrohres ist. Der Winkel, den die durch das Prisma reflectirte Visur mit der durch das drehbare Fernrohr gehenden directen einschliesst, wird mittelst einer Messschraube gemessen. Hiezu gerechnete Tabellen würden die Distanzen unmittelbar ergeben.

Um nicht für jedes Instrument von bestimmter Länge eigene Tabellen berechnen zu müssen, wird man die Lager für die Messschraube rectificirbar machen, um die für eine bestimmte Basislänge berechneten Tabellen, für welche eine Constante gefunden wurde, allgemein verwenden zu können.

Ich will nun versuchen, die gegen diese Construction möglichen verschiedenartigen Einwendungen zu widerlegen und die Mittel anzugeben, etwaigen Unrichtigkeiten auszuweichen.

Erstens wird dieses Instrument etwas kostspielig sein! Allerdings; aber bedenkt man, von welchem Werthe es ist, im Seekriege die Distanzen der feindlichen Positionen zu kennen, so wird bei den grossen Kosten, die ohnehin im Kriegsfalle erwachsen, die Ausgabe von etlichen tausend Gulden zur Anschaffung einiger Instrumente um so mehr verschwinden, wenn man den eventuellen Nutzen ins Auge fasst.

Der zweite Einwand wäre, dass die Biegung des Basisrohres die Veränderlichkeit der Basislänge zur Folge haben wird. Bedenkt man, dass man das ganze Instrument in verticaler Lage verwenden und daher dasselbe an einem Cardan'schen Ringe aufhängen wird, so wird in Folge der Schwere das Rohr gerade bleiben, daher die Biegung wegfallen, und nachdem das Instrument aufgehängt und das Prisma P_1 rectificirt ist, wird eine Biegung des Basisrohres um so mehr verschwinden, als man die durch Uebergewicht hervorgerufene von der Lothrechten abweichende Lage des Rohres zu contrabalanciren im Stande sein wird, die durch das Schwanken des Schiffes und den Wind hervorgerufenen Schwingungen aber nicht das Rohr werden verbiegen können, da man doch dasselbe genügend stark bauen wird. Zudem ist ja oben erwähnte Controlvorrichtung angebracht.

Der dritte Einwand wäre, dass das durch das Prisma P_1 reflectirte Bild nicht gleiche Lichtstärke wie das durch das directe Fernrohr erzeugte haben wird. Wollte man diesem geringfügigen Umstande wirklich ausweichen, brauchte man nur etliche Planparallelgläser hinter das Objectiv des directen Fernrohres zu stellen, um gleich viel Licht wie durch die zwei Prismen absorbiren oder die Objectivlinse im Basisfernrohre grösser zu machen, um selbe mehr Licht sammeln und dadurch das durch die Prismen absorbirte Licht ersetzen zu lassen; letzteres wäre vorzuziehen.

Da man aber beim Sextanten ebenfalls lieber Bilder von etwas ungleicher Lichtstärke sich gefallen lässt, so könnte man auf die Behebung dieses unwesentlichen Umstandes Verzicht leisten.

Der vierte Fragepunkt wäre:

Wird bei der Rectificationsvorrichtung das erwähnte Controlkreuz mit genügender Schärfe und Lichtstärke roth neben dem schwarzen Kreuze erscheinen?

Dem gegenüber kann die Thatsache erwähnt werden, dass man bei entsprechender Abhaltung störenden seitlichen Lichtes an den magnetischen Instrumenten sehr häufig die Lamont'sche Spiegelablesung anbringt, bei welcher die Scalentheilstriche mit der grössten Schärfe pointirt werden. Da man aber dennoch einwenden könnte, dass die Erzeugung eines secundären Bildes in der Diaphragmenebene störend wirken könnte und dass durch das Planparallelschleifen oder Durchbohren des Objectivs O_b' störende Lichtbeugungserscheinungen eintreten könnten, so habe ich eine andere Construction ausfindig gemacht, nach welcher man P_1 senkrecht auf die Visur stellen kann. Diese Construction ist aus Fig. 5 ersichtlich. Es befindet sich die Röhre mit dem optischen Bestandtheile für die Controle neben jener, durch welche die Hauptstrahlen vom anvisirten Objecte zum Objective O_b' gelangen. Die Lichtstrahlen sind also ganz getrennt von einander; daher sind auch zwei Oculare O_c und O_c' nöthig. Durch O_c werden die Bildhälften des anvisirten Objectes betrachtet; durch O_c' die Bilder der von den Spiegeln vom Basisprisma P_1 und in der Controlröhre F beim Objective O_b'' des drehbaren Fernrohres reflectirten Controlindices. Diese letzteren sind ein viereckiges Metallplättchen für das Basisprisma und ein Draht für das drehbare Fernrohr. Die Anordnung der Controlindices ist aus Fig. 5a ersichtlich. Der Schnitt 1 · 2 zeigt das vom Prisma π_1 beleuchtete Plättchen m und das vom Prisma π_4 beleuchtete Drahtstück $\alpha\beta$. Der Schnitt 3 · 4 zeigt die Anordnung der Fadenplatte EE', auf welcher zwei Fäden f, f' gespannt sind.

Nachdem die Platte undurchsichtig ist, wird sie als ein schwarzes Viereck durch das Prisma π_2 und das Objectiv O_b zum Prisma P_1 gelangen, von diesem zurückgeworfen vom Objective zum verkehrten physischen Bilde werden und durch das Prisma π_2 nach EE' ins Gesichtsfeld vor O_c' gelangen.

Im Gesichtsfelde EE' (in der Figur um 90^0 verdreht) Fig. $5_{3.4}$ befindet sich das Fadenkreuz, und man wird daher das Prisma P_1 auf diese Weise rectificiren können.

Selbstverständlich muss der Mechanicus dafür sorgen, dass π_2 eine sichere bleibende Stellung im Verhältniss zu π_3 erhalte und dass der Beobachter im Stande sei, entweder das Fadenkreuz am Diaphragma oder das Plättchen m zu rectificiren, indem er die Ecken des als physisches Bild vor dem Oculare befindlichen Viereckes genau auf die Fäden des Fadenkreuzes einstellt.

Die Kathetenfläche des Prismas P_1 ist an der der Controlröhre gegenüberstehenden Stelle versilbert, damit durch dieselbe kein Licht in die Controlröhre gelange und damit der reflectirende Spiegel genau in der Prismenfläche sich befinde.

Gesetzt, das Instrument sei beim Ocularende aufgehangen, welche Befestigung vorzuziehen wäre, wenn man dasselbe auf einem Seeschiffe verwendet, so wird das Licht zu schwach nach $E\ E'$ zum Vierecke gelangen; um nun wieder Oberlicht zu haben, wird man das Beleuchtungsprisma derart construiren, dass Oberlicht ungehindert eindringen kann und dasselbe von h' nach h'' Fig. 5 reflectirt werde und dadurch senkrecht auf die Diaphragmenebene unterhalb des Gesichtsfeldes auf das Controlblättchen u. s. w. seinen vorgeschriebenen Weg mache.

Auf diese Weise sind die störenden Elemente beim Basisfernrohre eliminirt, und es bleiben noch dieselben beim drehbaren Fernrohre zu beheben.

Beim drehbaren Fernrohre ist die Procedur eine einfachere; behufs Erklärung dieser will ich den Vorgang beim Messen zuerst klar legen.

In Fig. 5 ist P_1 das untere Prisma, dessen obere Kathetenfläche dem Basisrohrobjective zugewandt ist (der eine Theil des Prismas, dem Objective in der Controlröhre zugewandt, ist versilbert).

Der Beobachter in O_c wird also die Lichtstrahlen, welche vom anvisirten Objecte aufs Prisma P_1 fallen, sehen, nachdem sie von P_1 unter 90^0 reflectirt, von O_b' concentrirt, durch π_3 reflectirt in der Diaphragmenebene LL' zum physischen Bilde werden. Weiters wird er die durch das Objectiv O_b'' des drehbaren Fernrohres zum physischen Bilde werdenden Strahlen sehen. Sieht er nun den Punkt, also vielleicht den Bordrand eines ankommenden Schiffes durch das Basisfernrohr an, so wird er ein Bild desselben in der Diaphragmenebene haben; steht nun die optische Achse des drehbaren Fernrohres senkrecht auf der Basis, so wird vom letzteren ein zweites Bild des Bordrandes oberhalb erzeugt werden.

Es wird daher der Beobachter das drehbare Fernrohr derartig zu stellen haben, dass die beiden Bilder der Bordwand zusammenfallen, wodurch von dem in Sicht befindlichen Schiffe ein g a n z e s, n i c h t v e r z o g e n e s Bild entstehen wird, das sich erst mit der verändernden Distanz wieder verzerren und trennen wird.

Schwankt nun das eigene Schiff, so wird das Instrument sich immer in Folge der Schwere nahezu vertical stellen und ist daher immer das ganze Bild des Objectes sichtbar. Der Beobachter braucht nur dafür zu sorgen, dass die Bildhälften des Objectes sich ergänzen, ebenso wie beim Sextanten, wo auch das eigene Schiff und hiemit das Instrument schwankt und daher das Bild im Fernrohre beweglich erscheint.

Da er die Verdrehung des Fernrohres mit der Messschraube bewirkt, so wird er an derselben eine Lesung erhalten, die wir u nennen wollen. Hat nun der Beobachter die Bildhälften des anvisirten Objectes ergänzt und sich u gemerkt, so wird er beim Oculare O_c' hineinsehen.

Mit dem drehbaren Fernrohre fest verbunden ist eine zweite Röhre F, welche ebenso wie das Fernrohr selbst um die in der Diaphragmenebene LL' befindliche Achse gleichzeitig mit demselben sich dreht.

Am Ende derselben befindet sich ein rectificirbarer Planspiegel Sp und zwischen demselben und dem Oculare O_c' eine Collectivlinse O_b'''. In der Brennweite dieser Collectivlinse O_b''' ist das Diaphragma EE' angebracht mit den zwei Fäden f, f'. Zwischen dem Diaphragma und dem Oculare ist ein Beleuchtungsprisma π_4, welches bis etwa an den Rand des Gesichtsfeldes reicht. Auf demselben ist ein dünner Draht parallel zu f und f' aufgekittet. Durch dieses Prisma wird dasselbe bezweckt wie in der Controlvorrichtung für das Basisprisma durch π_1.

Es werden vom Drahte Strahlen auf den Planspiegel Sp auffallen, werden von demselben reflectirt und durch O_b''' zu einem physischen Bilde unterhalb der Prismenkante im offenen Gesichtsfelde vereinigt werden.

Nachdem der Spiegel vor dem Gebrauche des Instrumentes derart rectificirt wird, dass das Bild des Drahtes den oberen Faden dann vollkommen deckt, wenn die optische Achse des drehbaren Fernrohres genau senkrecht auf der optischen Achse des Basisfernrohres, mithin die directe obere Visur parallel zu der unteren Visur vor der durch P_1 unter 90° bewirkten Reflexion ist, so wird der Beobachter das drehbare Fernrohr mittelst der Messschraube derart verstellen, dass das Bild des Drahtes den Faden f' vollkommen genau deckt. Diese Lesung an der Messschraube wollen wir von nun an o nennen. Ist einmal das Instrument rectificirt, so wird dieser Werth von o für lange Zeit constant bleiben.

Auf diese Weise wird es dem Beobachter ermöglicht, mit einem Blicke die Sicherheit zu gewinnen, ob das Basisprisma rectificirt ist, und gleichzeitig die obere Ablesung zu machen. Es dürfte von Interesse

sein, zu betrachten, wie genau auf die angegebene Weise das Basisprisma rectificirt werden kann.

Die Basis sei wieder 6^m lang angenommen, so wird das Metallplättchen 6^m von der versilberten Basisprismenfläche entfernt sein. Wenn nun das Basisprisma um ganze 10 Secunden verrectificirt steht, in welchem Falle in der Distanz von 4000^m ein Fehler von 120^m circa entstünde, so wird der Spiegel auf demselben das Bild des Metallplättchens unter dem doppelten Winkel, also unter 20 Secunden reflectiren.

Das Bild des Plättchens wird also um $^6/_{10}{}^{mm}$ gegen das Fadenkreuz verstellt erscheinen, also um eine Grösse, die mit freiem Auge wahrgenommen werden kann.

Nehmen wir nun an, dass das drehbare Fernrohr eine Länge von 40^{cm} habe, dass also die mit demselben verbundene Controlröhre eben so lang, mithin der darin befindliche Spiegel eben so weit vom Oculare O_c' entfernt sei, so wird das Bild des Platinfadens am Prisma π_4, den man eben so fein wie einen Spinnenfaden erhalten kann, um $^1/_{50}{}^{mm}$ gegen den Spinnenfaden am Diaphragma verstellt erscheinen, wenn das drehbare Fernrohr um 10 Secunden verdreht wird. Berücksichtigt man die Dicke eines Spinnenfadens, welchen man unter gewöhnlichen Loupen von 10maliger Vergrösserung schon sehr scharf und deutlich sieht, im Verhältniss zu einer Fläche von $^1/_{50}{}^{mm}$ Breite, so wird man zu dem Schlusse gelangen, dass ein Fehler von 10 Secunden bei der oberen Ablesung nicht so leicht gemacht werden kann.

Eine Rectification dieses Instrumentes kann man mit Hilfe eines Sternes oder der Sonne bei ihrem Aufgange oder Untergange vornehmen, weil diese jedenfalls so weit entfernt sind, dass, wenn man das Basisrohr beliebig lang machen könnte, man die beiden Visuren o und u als parallel annehmen kann. Auch kann man behufs Rectification des Instrumentes folgendermassen verfahren: Man messe die Distanz eines am Schiffe befindlichen, möglichst vom Aufhängepunkte des Instrumentes entfernten Punktes ab, berechne aus dieser gefundenen Distanz und aus der bekannten Länge der Basis den Winkel auf trigonometrischem Wege, stelle das drehbare Fernrohr derartig, dass die Bildhälften des betreffenden Punktes sich decken, und corrigire die Trommellesung entsprechend. Da sich die Revolutionswerthe der Mikrometerschraube, wie die Erfahrung bei den Stampfer'schen Nivellirinstrumenten lehrt, selbst nach jahrelangem Gebrauche nur unmerklich ändern, so wird

man durch Verstellung des drehbaren Fernrohres in die auf der Basis senkrechte Lage nach der Angabe der Mikrometerschraube keinen wesentlichen Fehler begehen, folglich auch danach die Controlindices rectificiren können. Erwähnt muss hier werden, dass bei der Rectification des Instrumentes nach dieser Methode das Instrument nicht schwanken darf, was man leicht verhindern kann, weil, sobald der Zielpunkt, nach welchem dasselbe rectificirt wird, sich am Schiffe selbst befindet, die ganze durch das Object, das Basisprisma und das Ocular gelegt gedachte Ebene mitschwankt; somit ändern sich die relativen Lagen der Dreieckspunkte nicht. Bei richtiger Construction der Objectivverschiebungen unterliegt die Anwendung dieser Methode keinen Schwierigkeiten. Den jeweiligen Differenzen zwischen *o* und *u* entsprechend kann man die Distanz unmittelbar aus den hiezu zu rechnenden Tabellen finden. Bei dieser Construction fallen alle störenden Nebenbilder weg. Wie aus dem Gesagten erhellt, kann ein Schwanken des eigenen Schiffes nichts schaden, denn man wird das ganze Instrument an einen Cardan'schen Ring hängen, welchen man etwa am Mastkorbe befestigen wird, und zwar in der Weise, dass der Mast selbst an das Instrument nicht anstösst.

Es wird immer ein rechtwinkliges Dreieck durch das Ocular, das Prisma und einen Punkt des Objectes vorhanden sein, und es wird daher ganz gleichgiltig sein, in welchem Punkte des Objectes sich beide Visuren schneiden und ob die Lage des Winkelscheitels sich während der Messung ändert oder nicht, da ja doch nur bei sich verändernder Distanz die Bildhälften sich trennen werden.

Der Vorwurf, dass dieses Instrument eine stabile Basis haben müsse, kann hier nicht gemacht werden. Bezüglich der Grösse der Basis kann auch kein stichhaltiger Einwand gemacht werden, es wäre denn, dass Jemand einen Distanzmesser ohne Basis überhaupt ermöglichen würde.

Bedenkt man, dass der Mastkorb immerhin mehr als 12—20^{m} über Bord ragt, so wird die Anwendung einer Basislänge von 4—6—8^{m} in den weitaus meisten Fällen gestattet sein.

Zieht man in Betracht, dass man die vom directen Fernrohre erzeugte Bildhälfte neben der vom Basisfernrohre erzeugten Hälfte setzen kann, und man construirt das Instrument derartig, so wird eine schärfere Pointirung ermöglicht, indem beispielsweise durch das An-

visiren des Mastbaumes oder der Raaen eines Schiffes zerrissene Bilder des Objectes erscheinen würden, wenn die Visuren der beiden Fernrohre sich nicht genau im Objecte selbst schneiden, was jedenfalls leichter zu erkennen ist, als wenn die Bildhälften über einander stehen, in welch' letzterem Falle möglicherweise eine kleine Verlängerung oder Verkürzung des Bildes übersehen werden könnte.

Die für eine Basisrohrlänge von 6^m für nachstehende Werthe des abzulesenden Winkels α berechneten Distanzen sind in nachstehender Tafel ersichtlich, aus welcher hervorgeht, dass bei Anwendung eines 6^m langen Basisrohres noch bis zu einem Myriameter grosse Distanzen mit ziemlicher Sicherheit messbar sind.

Winkel α	Distanz in Metern	Winkel α	Distanz in Metern	Winkel α	Distanz in Metern	Winkel α	Distanz in Metern
5′ 9″	4005	4′ 49″	4281	3′ 55″	5266	2′ 55″	7071
8	4018	48	4296	50	5380	50	7280
7	4031	47	4312	45	5500	45	7500
6	4044	46	4327	40	5625	40	7735
5	4057	45	4342	35	5755	35	7984
4	4071	44	4357	30	5892	30	8250
3	4084	43	4373	25	6036	25	8535
2	4097	42	4388	20	6187	20	8840
1	4110	41	4404	15	6345	15	9167
5′ 0	4124	4′ 40	4420	10	6513	10	9542
				5	6689	5	9900
4′ 59″	4139	4′ 35	4500	3′ 0″	6875	2′ 0	10300
58	4153	30	4583				
57	4167	25	4670				
56	4181	20	4760				
55	4195	15	4853				
54	4209	10	4950				
53	4223	5	5051				
52	4238	4′ 0	5156				
51	4252						
4′ 50	4266						

Damit der Winkel α richtig erhalten werde, ist es von grösster Wichtigkeit, dass die Visuren der beiden Fernrohre sich im Objecte schneiden, weil von der Correctheit des gemessenen Winkels die Richtigkeit der Distanz abhängig ist.

Vorausgesetzt dass das Instrument rectificirt ist, wird beispielsweise der zu messende Winkel $\alpha = 5'9''$ sich ergeben, sobald das anvisirte Object 4005^m entfernt ist. Wird nun ein Visurfehler von $5''$ begangen, also $\alpha = 5'\,9'' \pm 5''$ gefunden, so ergibt sich bei der Annahme, dass etwa $\alpha = 5'\,4''$, somit die Distanz 4071^m gross gefunden worden sei, durch Rechnung für den entstandenen Fehler von 66^m in der Distanz ein Fehler von 95^{mm} oder rund von 1^{dcm} in der kleinen Kathete.

Da aber der Durchmesser der Raaen selbst stellenweise 2^{dcm} beträgt, so müsste der Beobachter deren Bilder an solchen Stellen um die Hälfte ihrer Durchmesser gegen einander verstellt sehen, wenn ein Visurfehler von 5 Secunden stattfände, was bei einiger Uebung gewiss vermieden werden kann.

Zur Messung kürzerer Distanzen wäre eine geringere Länge des Basisrohres zulässig, so dass für eine Basislänge von $1\,{}^1/_2{}^m$ das Basisrohr etwa in 5 Theile, jeder 32^{cm} lang, zusammenschiebbar gemacht werden könnte, wodurch man in der That ein in einem Etui zu verwahrendes, durch Umhängen tragbares Instrument erhielte.

Je kürzer die Distanzen wären, welche als die längsten für irgend ein Instrument anzunehmen wären, desto kürzer könnte selbstverständlich die Basis werden — und Versuche würden constatiren, ob unter diesen Umständen die Vorrichtung für die Correcturen des Basisprismas nicht etwa ganz entfallen könnte.

Unwillkürlich drängt sich die Frage auf: „Werden die durch das gebrochene Basisfernrohr und durch das directe Fernrohr erzeugten Bilder gleiche Grösse haben?"

Gewiss nicht, indem bei Anwendung von Objectiven gleicher Brennweite in beiden Fernröhren die durch das directe Fernrohr erzeugten Bilder grösser sein werden. Ist nun das Basisrohr 6^m lang, so wird man durch das Basisfernrohr die Objecte um 6^m entfernter sehen als durch das directe Fernrohr.

Nach den Gesetzen der Dioptrik ist die Bildweite d gleich der Gegenstandsweite D, multiplicirt mit der Brennweite F, dividirt durch die Differenz zwischen der Brennweite und der Gegenstandsweite, also

$$d = \frac{DF}{D - F}.$$

Ist nun h die Grösse des vom Objective erzeugten Bildes vom Gegenstande H, so ist

$$h : H = d : D.$$

Lässt man nun obige Bezeichnungen für das Basisfernrohr gelten und bezeichnet man die correspondirenden Ausdrücke für das directe Fernrohr durch die gleichen Buchstaben mit den Zeigern 1 und setzt die Brennweiten beider Fernröhre einander gleich, also

$$F = F',$$

so wird offenbar

$$h : h' = \frac{d}{D} : \frac{d'}{D'}$$

Um den Einfluss der Basislänge auf den Unterschied der Bildgrössen zu beurtheilen, diene nun folgende Tabelle, in welcher die Werthe von d und d' für die Distanzen von 25, 50, 100, 200, 400 und 1000 m für eine gemeinsame Brennweite der beiden Fernrohre von 32 cm berechnet sind.

D in Metern	d in Centimetern	D' in Metern	d' in Centimetern
31	32,33	25	32,415
56	32,184	50	32,206
106	32,097	100	32,103
206	32,050	200	32,051
406	32,02527	400	32,0257
1006	32,01018	1000	32,01026

Wie man sieht, sind also die Bildweiten beider Fernröhre schon bei einer Distanz von 200 m nahezu gleich gross.

In der folgenden Tabelle erscheinen nun die Verhältnisse der Bildgrössen beider Fernrohre ausgedrückt, und zwar für die Distanz

$$D = 25^{m} \text{ ist } h' : h = 0{,}01296 : 0{,}0104$$
$$50^{m} \text{ „ } h' : h = 0{,}006441 : 0{,}00575$$
$$100^{m} \text{ „ } h' : h = 0{,}00312 : 0{,}003028$$
$$200^{m} \text{ „ } h' : h = 0{,}001603 : 0{,}001556$$
$$400^{m} \text{ „ } h' : h = 0{,}0008006 : 0{,}00079$$
$$1000^{m} \text{ „ } h' : h = 0{,}00032 : 0{,}000318$$

Voraussichtlich werden daher von einer Distanz von 200 m an und darüber die Bilder für das Auge ganz unmerklich verschiedene Grössen enthalten.

Wollte man dennoch beide Bilder gleich gross erzeugen, so wäre dies durch die Combination von Linsen erreichbar.

Man stelle sich vor, dass ein Objectiv von bestimmter Brennweite

in der entsprechenden Bildweite ein Bild erzeugt, welches durch ein Ocular betrachtet werden kann, und dass zwischen Objectiv und Ocular eine zweite Objectivlinse eingeschaltet werde, so wird dieselbe die convergent auffallenden Strahlen noch mehr convergiren und hiedurch die Bildweite verringern.

Wird nun die Brennweite der beiden Linsen z. B. gleich gross angenommen, so wird zwischen beiden ein combinirter optischer Mittelpunkt in der optischen Achse der Linsencombination sich befinden, durch welchen man sich die Hauptstrahlen zur Erzeugung des Bildes durchgehend denken kann. Bei gegebener Grösse des Bildes lässt sich nun deren Verhältniss zu jener berechnen, welche dem Bilde zukommen würde, wenn es nur von einem der beiden Objective erzeugt würde.

Hat man nun bei irgend einer Distanz die beiden Objective im directen Fernrohre derart gestellt, dass dieselben ein Bild von gegebener Grösse erzeugen, also derselben Grösse, welche jenem durch das im Basisfernrohre befindlichen Objective erzeugten Bilde gleichkommt, so wirft sich die Frage auf: „Wie muss die Verstellung der Objective bei sich verändernder Gegenstandsweite stattfinden?“ Angenommen nun, es sei eine Linsencombination gefunden, welche ein Bild von bestimmter Grösse liefert, so wird die Entfernung δ der beiden Objective zwischen denselben einen combinirten optischen Mittelpunkt bedingen, dessen Lage so lange dieselbe bleibt, als δ unverändert erhalten wird; ändert sich aber die Gegenstandsweite, so wird man auch das Linsensystem verstellen müssen, um wieder ein deutliches Bild zu erhalten. Nachdem nun δ unverändert angenommen wurde, wird sich die Bildweite ebenso verhalten, als wenn sie durch ein einziges Objectiv bedingt wäre, sie wird auf den combinirten optischen Mittelpunkt sich beziehen. Die Bilder werden sich bei veränderter Gegenstandsweite abermals ungleich gross darstellen, nachdem das Verhältniss der beiden Gegenstandsweiten D und D' zu einander sich verändert.

Würde D' kleiner werden, so wird d' grösser; ebenso wird bei kleiner werdendem D das d grösser werden. Wäre nun nicht die constante Länge der Basis zu D' zu addiren, so bliebe das Verhältniss $D' : D$ unverändert und $h : h'$ würde im gleichen Verhältnisse grösser oder kleiner werden. Wenn nun D' kleiner wird, so wird $h' > h$; um nun $h' = h$ zu erhalten, wird man die der combinirten

Bildweite entsprechende combinirte Brennweite, also δ ändern müssen, und zwar wird δ mit D' kleiner oder grösser.

Die Entfernung des Oculares wird von der dem Gegenstande näheren Objectivlinse unverändert bleiben, und man wird bloss die mittlere Collectivlinse verstellen, um deutliche Bilder zu erhalten.

Von mir angestellte Versuche haben die Richtigkeit meiner Voraussetzungen und Berechnungen auch bestätigt; allein die Anwendung einer derartigen Linsencombination dürfte ganz entbehrlich erscheinen, wenn man erwägt, dass bei Entfernuugen von 200^m aufwärts ein Unterschied in den sich erzeugenden Bildgrössen für das Auge ganz unmerklich ist.

Es bleibt noch zu erwähnen, wo und wie man den Distanzmesser am Schiffe unterbringen soll. Dies ist eine Frage, welche am besten beantwortet wird, wenn man ein Instrument einmal auf ein Schiff bringt. Ich habe mir gelegentlich einer Reise nach England die Mühe genommen, die verschiedenen Schiffstypen zu studiren, und bin der Meinung, dass die Verwendung des Instrumentes bei einer Basislänge von etwa 4^m keine Schwierigkeiten haben dürfte, ausser bei Vollschifftakelung, selbst bei ziemlich bewegter See. Heutzutage werden Kriegsschiffe selten mehr mit Vollschifftakelung versehen, und selbst bei dieser könnte der Distanzmesser vor dem Fockmaste untergebracht werden. Das Instrument kann auch in horizontaler Lage verwendet werden, und müsste man durch Construction eines entsprechenden Statives und durch Gewichtsausgleichung den etwa entstehenden Schwierigkeiten abhelfen.

Bei den sogenannten Thurmschiffen ist die Unterbringung des beschriebenen Instrumentes auch keinen Schwierigkeiten unterworfen. Ich habe ein Thurmschiff gesehen, in welchem eigene Visirfernrohre für das Zielen mit dem Geschütze untergebracht sind.

Montirt man also die Basis des Instrumentes senkrecht auf die Seellinie des mit dem Thurme drehbaren Geschützes, so würde die Bestimmung der Distanz mit dem Zielen zusammenfallen.

Die Anwendung dieses Instrumentes auf Küstenpunkten, ist wie wohl erklärlich, keinen Schwierigkeiten unterliegend, selbst, wie ich glaube, zur Nachtzeit, weil man die Bildhälften eines in Sicht befindlichen Lampenlichtes ebenso zur Deckung bringen können dürfte wie die irgend eines andern Objectes.



Kleinere Mittheilungen.

Ueber die Diffusion der Flüssigkeiten.

Von

J. Stefan.

(Wiener Akadem. Anzeiger 1878 Nr. 26.)

Es werden in dieser ersten Abhandlung, welche die optischen Beobachtungsmethoden zu ihrem Gegenstande hat, zuerst die von E. Voit und Hoppe-Seyler über die Diffusion von Zuckerlösungen nach der saccharimetrischen Methode gemachten Beobachtungen discutirt und mit der von Fick aufgestellten Theorie der Diffusion verglichen. Von diesen Versuchen stimmen am besten die von Hoppe-Seyler über die Diffusion des Harnzuckers angestellten mit der Theorie, und lässt sich aus denselben auch der Diffusionscoëfficient bestimmen, welcher = 0,42 gefunden wird, unter Voraussetzung des Centimeters als Längen- und des Tages als Zeiteinheit.

Die mit einem anderen Saccharimeter gemachten Beobachtungen Hoppe-Seyler's über die Diffusion des Rohrzuckers, sowie die analogen Versuche Voit's zeigen so grosse Abweichungen von der Theorie, dass die Berechnung derselben nach den aus dieser Theorie abgeleiteten Formeln keinen Sinn hat.

Ferner werden die von Johannisjanz nach der von Kundt angegebenen Prismenmethode angestellten Versuche besprochen, deren formelle Abweichungen von der Theorie nicht gross zu sein scheinen, doch ist der aus ihnen berechnete Coëfficient der Diffusion des Kochsalzes durch Wasser, nämlich 0,45, mehr als um die Hälfte zu klein. Aus den von Fick über dasselbe Salz gemachten Beobachtungen werden für diesen Coëfficienten die Werthe 0,94 für 15° und 1,13 für 20° Temperatur abgeleitet, und diese Werthe stimmen mit den Versuchen Graham's, sowie mit später zu publicirenden Versuchen vollständig überein.

Die grossen Fehler, welche den nach den optischen Methoden erhaltenen Resultaten anhaften, rühren daher, dass die dieser Methode

zu Grunde liegende Voraussetzung, dass ein horizontaler Lichtstrahl, welcher auf eine verticale eine diffundirende Flüssigkeit begrenzende Ebene auffällt, auch während des Durchganges durch die Flüssigkeit horizontal bleibe, nicht richtig ist. Eine solche von zwei parallelen Wänden begrenzte Flüssigkeit, deren Dichte von unten nach oben abnimmt, verhält sich wie ein Prisma, dessen brechende Kante nach oben gerichtet ist, oder auch, insofern die Dichtigkeitsabnahme der Flüssigkeit von unten nach oben eine ungleichförmige ist, zeigt dieselbe neben den Eigenschaften eines Prismas zugleich die einer Cylinderlinse. Es werden in der Abhandlung mehrere Versuche beschrieben, durch welche diese Eigenthümlichkeiten der Lösungen dargelegt werden.

Der Verfasser weist zum Schlusse auf das analoge Verhalten des Schalles hin, wenn sich derselbe in der Richtung oder gegen die Richtung des Windes, dessen Geschwindigkeit nach oben hin zunimmt, fortpflanzt, aus welchem Verhalten zuerst Stokes die Thatsache erklärt hat, dass in dem ersteren Falle ein Schall auf sehr weite, im letzteren nur auf kleine Distanzen gehört wird.

Neue Beobachtungen an tönenden Luftsäulen.

Von

V. v. Lang.

(Wiener Akadem. Anzeiger 1878 Nr. 27.)

Bei diesen Versuchen wurde die Luft einer Glasröhre auf die von Hopkins angegebene Weise mit einer Platte ins Tönen gebracht. Der Nachweis der Knoten einer solchen tönenden Luftsäule kann auf mannigfache Weise geschehen; am bequemsten durch Resonatoren, welche den Ton sehr verstärken, wenn ihre Mündung einen Knoten passirt. Aber jeder andere Körper hat diese tonverstärkende Wirkung im Knoten, wenn nur sein Querschnitt gross genug. Ja man kann die Knoten schon auf der Aussenfläche der Glasröhre mit dem blossen Ohre nachweisen.

Auf Grund seiner Experimente bespricht der Verfasser die bekannten Versuche von N. Savart und Seebeck über die stehenden Wellen zwischen einer Tonquelle und reflectirenden Wand und gibt eine Lösung der scheinbaren Widersprüche in den Arbeiten der beiden Genannten.



Selbstthätig wirkender Regulator für Abdampfen oder Destilliren von Flüssigkeiten.

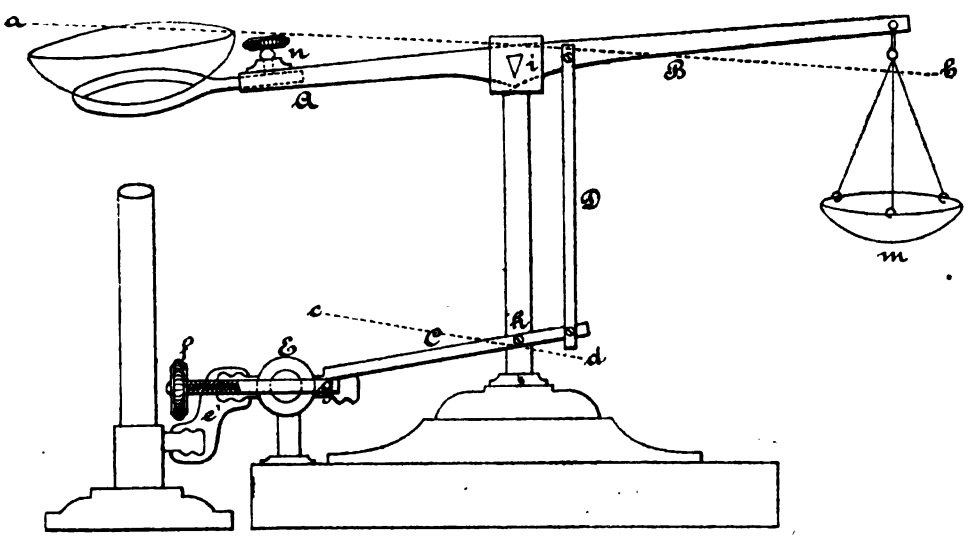
Von

Prof. A. Wagner.

(Aus dem Bayerischen Industrie- und Gewerbeblatt.)

Im chemischen Laboratorium ist bekanntlich eine sehr häufig vorkommende Arbeit, Flüssigkeiten nur bis auf ein ganz bestimmtes Quantum abdampfen zu müssen, um Spritzen, Anbrennen etc. zu vermeiden. Diese Arbeit ist oft mit grossem Zeitverlust in Folge von Warten und Nachsehen verbunden. Um diese Mühe zu ersparen, habe ich mir einen Apparat construirt, der diese Arbeit ganz selbstthätig besorgt. Ich habe im voraus von einer Einrichtung abgesehen, bei welcher nach bestimmter Zeit durch ein Uhrwerk ein Gashahn geschlossen werden kann, weil eine solche Veränderung im Gasdruck eine Unsicherheit verursacht, welche selbst durch Anwendung eines Gasdruckregulators nicht völlig zu vermeiden ist.

Mein Apparat ist als eine Wage auf massivem Gestell construirt. Der gleicharmige Wagbalken AB ist um seine Achse i in der Weise



⅓ natürl. Grösse.

drehbar, dass seine Lage nur wenige Grade von der horizontalen Lage abweichen kann, so dass nur eine Bewegung desselben zwischen der

Stellung *AB* oder *ab* möglich ist, weil das Achsenlager so construirt ist, dass es dem Wagbalken keine grössere Drehung gestattet.

Am Arme *A* lässt sich durch Schraube *n* ein Reif als Unterlage für eine Porzellanschale oder ein Halter für eine Retorte befestigen; der Arm *B* trägt die Wagschale *m*. Am Arme *B* befindet sich nicht weit von der Achse *i* entfernt die Stange *D*, durch welche die ungleicharmige Stange *C* um deren Drehpunkt *h* gedreht wird, so dass sie in die Lage *cd* versetzt wird, wenn der Wagbalken die Stellung *ab* annimmt. Der Bunsen'sche Brenner, welcher unter der Porzellanschale oder Retorte zu stehen kommt, steht durch einen Kautschukschlauch bei *e'* in Verbindung mit der Hahnvorrichtung *E*, von welcher bei *e* ein weiterer Schlauch zu einem Hahne der Gasleitung führt. Der leicht drehbare Hahn *E* hat einen ungleicharmigen Schlüssel, dessen längerer mit Schraubengewinde versehener Arm die etwa 10^{gr} schwere Linse *f* trägt, welche beliebig daran verstellt werden kann. Der kürzere Arm wird je nach Stellung des Wagbalkens von der Stange *C* berührt oder nicht. Befindet sich der Wagbalken in der Stellung *ab* in Folge stärkerer Belastung des Armes *B*, so ist die Stange *C* in der Lage *cd* und berührt nicht den kürzeren Arm *g* des Hahnschlüssels, so dass in Folge des Gewichts von *f* der längere Arm des Schlüssels herabsinkt und hiedurch den Hahn schliesst, wodurch die Verbindung zwischen der Gasleitung und dem Gasbrenner aufgehoben ist. Befindet sich dagegen der Wagbalken in der Stellung *AB* in Folge stärkerer Belastung des Armes *A*, so drückt die Stange *C* auf den kürzeren Arm *g* des Hahnschlüssels, wodurch ein Herabfallen von *f* verhindert ist, so dass die Verbindung zwischen der Gasleitung und dem Gasbrenner ununterbrochen ist. Die Länge des kurzen Armes *g* des Hahnschlüssels und der Stange *C* muss gegenseitig so gewählt sein, dass *C* auf *g* drückt, so lange der Wagbalken in der Stellung *AB* und in der horizontalen Richtung sich befindet, dass dagegen bei der Stellung *ab* des Wagbalkens die Stange *C* von *g* sich so weit entfernt, dass das Gewicht von *f* durch Herabsinken den Hahn schliessen und hiedurch die Gaszuleitung zum Brenner abstellen kann. So lange also der Arm *A* stärker belastet als *B* bleibt, ist die Gaszuleitung zum Gasbrenner hergestellt; wird aber die Belastung von *A* allmählich geringer als die von *B*, so wird die Leitung zum Brenner abgesperrt.

Die Linse *f* wird so gestellt, dass ihr Gewicht im Stande ist, sofort durch Herabziehen des Schlüssels den Hahn *E* mit Sicherheit zu

schliessen, wenn durch Ueberlastung des Armes *B* die Stange *C* sich vom kleinen Schlüsselarm *g* entfernt. Vor jeder Benutzung des Apparates muss man sich vom leichten Gang der Hahnvorrichtung dadurch überzeugen, dass man einfach den Arm *B* herabdrückt, wodurch der Schlüssel sofort ein Schliessen des Hahns bewirken muss; wenn dieses nicht eintritt, so muss das Gewicht *f* weiter hinausgeschraubt oder der Hahn geputzt und geölt werden.

Die Benutzung des Apparates wird ein Beispiel am leichtesten ersehen lassen.

Es sollen z. B. 300^{ccm} Wasser auf 25^{ccm} eingedampft werden, ohne dass Nachsehen nöthig ist, und hiemit selbst ein Verlassen des Locals möglich wird.

Hiezu gibt man auf den durch Schraube *n* am Arm *A* gehaltenen Reif ein Drahtnetz, hierauf eine 300^{ccm} reichlich fassende Porzellanschale und bringt, während *C* auf *g* drückt, den Wagbalken durch Einwerfen von Schrotkörnern in die Wagschale *m* in die horizontale Lage. Dann giesst man das abzudampfende Wasser in die Porzellanschale und legt in die Wagschale *m* 25^{gr} als Belastung, weil im gewählten Beispiele der gewünschte Rest von 25^{ccm} Wasser einem Gewicht von 25^{gr} entspricht. Der Arm *A* ist nun stärker (um 275^{gr}) belastet als *B*, der Wagbalken hat hiemit die Stellung *A B* und drückt deshalb *C* auf *g*, wodurch die Verbindung zwischen der Gasleitung und dem Gasbrenner, der unter das abzudampfende Wasser gestellt wird, offen erhalten bleibt. Die Flammengrösse dieses Brenners wird durch den Hahn der Gasleitung so klein regulirt, dass kein Sieden des Wassers eintreten kann. Sobald im gewählten Beispiele 275^{ccm} Wasser verdampft sind, kommt der Wagbalken ins Gleichgewicht und bald hierauf in die Stellung *ab*, wodurch *C* von *g* entfernt wird, so dass durch Herabsinken des Hahnschlüssels wegen des Gewichtes *f* der Hahn *E* völlig geschlossen wird, worauf kein Gas weder zum Brenner gelangen noch sonst wie entweichen kann. Der Rückstand in der Porzellanschale wird nun, wie gewünscht, ziemlich genau 25^{ccm} ausmachen.

Soll eine Flüssigkeit bis auf ein bestimmtes Rückstandsgewicht abdestillirt werden, so wird eine Retorte mittelst eines Retortenhalters am Arme *A* durch die Schraube *n* befestigt und im Uebrigen wie im obigen Falle verfahren.

Damit die Hahnvorrichtung durch die vom Brenner ausgehende Wärme nicht erhitzt wird, stellt man zweckmässig eine Thonplatte dazwischen.

Herr Mechaniker Niemeitz in München hat mir einen solchen Apparat, der über ½ Liter Wasser auf einmal abzudampfen gestattet, genau nach meiner Zeichnung um 38 ℳ hergestellt.

Stöpsel-Umschalter zum Gebrauche in Vorlesungen.

Von

Oskar Emil Meyer.

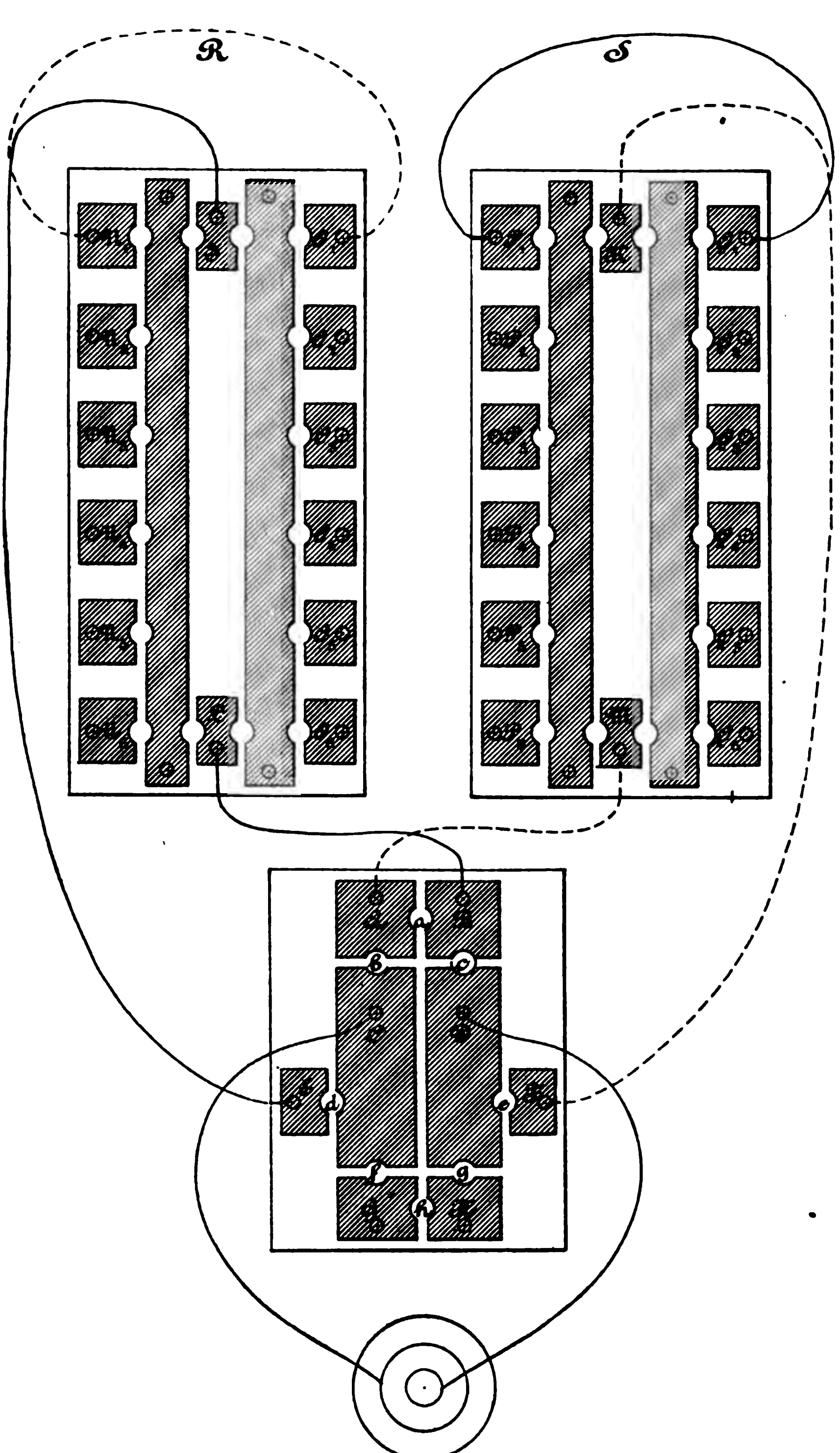
Bei Vorlesungen über elektrische Ströme ist es höchst lästig, wenn man während des Vortrages die durch Klemmschrauben hergestellten Verbindungen der Leitungsdrähte verändern muss. Denn der Uebergang von einem Versuche zu dem nächstfolgenden ist immer mit Zeitverlust und zugleich mit der Gefahr verknüpft, dass bei dem Einschalten eines neuen Apparates an irgend einer Stelle ein Mangel übersehen wird, welcher eine Unterbrechung der Leitung bedingt. Um derartige Unannehmlichkeiten zu vermeiden, benutze ich in meinen Vorlesungen über Experimentalphysik Stöpselumschalter verschiedener Einrichtung. Dieselben sind zwar bereits kürzlich auf meinen Wunsch von Herrn F. Auerbach[1]), welcher sie gleichfalls benutzt hat, gelegentlich kurz beschrieben worden; doch scheint es mir wünschenswerth zu sein, dass auch in diesem Repertorium eine Beschreibung derselben gegeben werde, und zwar hauptsächlich zu dem Zwecke, um meine Collegen auf die Vortheile aufmerksam zu machen, welche der Gebrauch dieser Umschalter gerade in Vorlesungen gewährt.

Die beiden verschiedenen Arten, welche ich benutze, sind auf folgender Figur dargestellt, und zwar, um gleich ein Beispiel der Anwendung zu geben, in einer Verbindung mit einander, wie sie sich zur Ausführung von Ampère's Versuchen über elektrodynamische Wechselwirkung und von ähnlichen Experimenten empfiehlt. Diese Verbindung besteht aus drei Apparaten, von welchen zwei einander gleich sind.

Bei jeder der beiden Arten sind auf einer Platte von Hartgummi Messingstücke befestigt, welche in der Zeichnung schraffirt dargestellt sind; jedes dieser Messingstücke ist mit einer Klemmschraube versehen, und zwischen je zwei benachbarten Messingstücken kann in eine

1) Wiedemann's Annalen der Physik 1878 Bd. 5 S. 330 und 331.




R
S

Bohrung, durch welche jedes einen halbrunden Ausschnitt erhalten hat, ein Metallstöpsel eingesteckt werden, so dass eine leitende Verbindung hergestellt wird.

Die Poldrähte der galvanischen Batterie werden in den Klemmen *C* und *D* festgeschraubt. Von diesen kann der Strom durch die bei *b* und *e* eingesteckten Stöpsel nach *A* und *F* und von hier durch die Leitungsdrähte zunächst nach den Klemmen *K* und *M* eines zweiten Stöpselapparates und dann weiter zu irgend einem in den Schliessungsdraht *S* eingeschalteten Apparate, z. B. zu einem der Ampère'schen Gestelle, fortgeleitet werden. Gleichzeitig kann man durch Stöpsel bei *c* und *d* einen zweiten Zweigstrom nach *B* und *E*, von hier durch Drähte weiter nach den Klemmen *I* und *L* eines dritten Umschalters und endlich zu einem beliebigen, in den Schliessungsdraht *R* eingeschalteten Apparate, z. B. zu einem anderen Ampère'schen Gestelle fortführen. So erhält man in zwei Apparaten zwei Ströme, deren Wirkung auf einander man demonstriren mag.

Statt zweier Zweigströme, welche durch die beiden Leitungen *R* und *S* fliessen, kann man sofort einen einzigen ungetheilten Strom herstellen, welcher beide Leitungen hinter einander durchströmt; man braucht nur die Stöpsel bei *b* und *c* herauszuziehen und einen bei *a* wieder einzustecken.

Bei beiden beschriebenen Verbindungen kann man in jeder der Leitungen *R* oder *S* für sich allein die Stromrichtung umkehren. Man hat nämlich, um den Strom in *R* umzukehren, nur die bei *I* und *L* eingesteckten Stöpsel, von welchen der eine rechts, der andere links stecken muss, einfach den rechten nach links, den linken nach rechts hinüber umzustecken. Auch kann man, wenn man diese Stöpsel beide nach derselben Seite einsteckt, die Leitung *R* ganz ausschalten.

In anderen zwischen N_2 und O_2, zwischen P_2 und Q_2 u. s. w. angebrachte Leitungen schaltet man andere Apparate ein, welche sofort durch Umsteckung der Stöpsel von N_1 und O_1 nach N_2 und O_2 u. s. w. in Betrieb gesetzt werden können. Man kann auf diese Weise, wenn jeder der beiden mit langen Schienen versehenen Umschalter, wie in der Zeichnung, 6 Paar Messingklötzchen trägt, nicht weniger als 12 verschiedene Apparate nach einander vorführen, ohne eine einzige Schraube zu lösen oder anzuziehen. Die Uebersicht wird dabei erleichtert, wenn man farbig übersponnene Leitungsdrähte verwendet, so dass für jeden Apparat eine andere Farbe benutzt wird.

Bei so vielfachen verschiedenen Versuchen bedarf man gewöhnlich verschiedener Stromstärke. Man benutzt deshalb die Klemmen *G* und *H* am ersten Stöpselapparat dazu, einen Zweigstrom abzuleiten, dessen Stärke durch Abgleichung des Widerstandes angemessen geregelt wird.

Die zuerst beschriebene Art von Umschaltern kann auch als Stromwender dienen. Bei Versuchen über galvanische Polarisation z. B. benutze ich zwei Umschalter, je einen von jeder Art; ich verbinde die verschiedenen Zersetzungszellen mit den Klemmenpaaren *N* und *O*; ferner werde *I* und *L* mit *C* und *D* verbunden, desgleichen *E* und *F* mit dem Galvanometer, welches nach Einsteckung von Stöpseln bei *d* und *e* den Polarisationsstrom anzeigt; der die Elektrolyse und Polarisation bewirkende Strom wird vorher, also so, dass bei *d* oder *e* ein Stöpsel herausgezogen ist, bei *A* und *H* zugeleitet. Stecken nun einmal die Stöpsel *a, h, c* und *f* und das andere Mal statt der beiden letzteren *b* und *g*, so hat in beiden Fällen der Strom entgegengesetzte Richtung.

Derselbe Umschalter dient zur raschen Umwandlung der Combination von Elementen in Volta'scher oder gewöhnlicher Weise. Verbindet man die Poldrähte eines ersten Elementes mit *F* und *A*, eines zweiten mit *B* und *G*, eines dritten mit *H* und *E*, so erhält man nach Einstecken der Stöpsel *e, a, h, d* einen Strom in dem zwischen *C* und *D* eingeschalteten Schliessungsdrahte, welcher aus den drei hinter einander eingeschalteten Elementen entstanden ist. Werden dagegen die Stöpsel *b, c, d, e, f, g* eingesteckt, so hat man einen Strom, welcher aus der Vereinigung der drei durch je ein Element erregten Ströme zu einer gemeinsamen Bahn entstanden ist.

Diese Beispiele werden genügen, um die allgemeine und bequeme Anwendbarkeit der Stöpselumschalter für Vorlesungen zu erläutern. Herr Mechanicus C. G. Pinzger in Breslau liefert derartige Apparate in sorgfältigster Ausführung, das Stück je nach der Grösse für 50 bis 60 Mark.

Ein Vorlesungsversuch über das Verhalten von Gasabsorptionen in luftverdünntem Raum.

Von

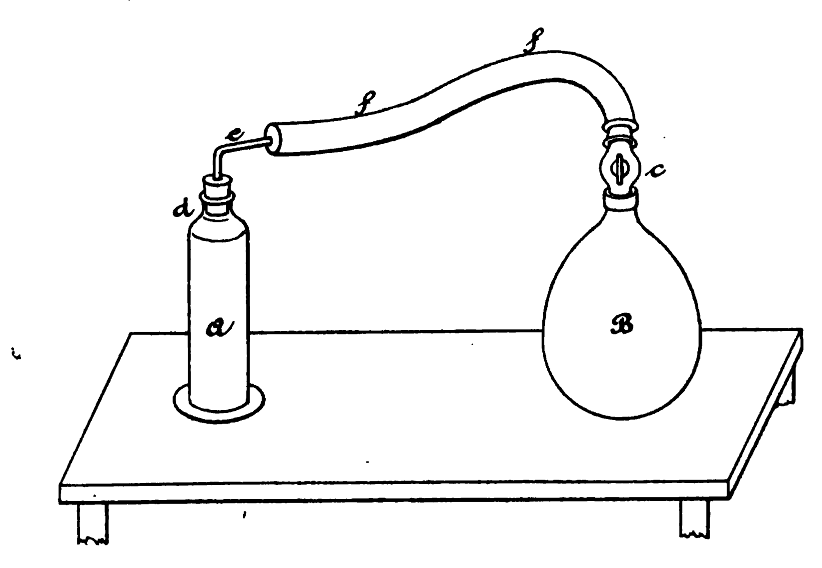
A. Wagner.

Stellt man ein mit Wasser, welches Gase absorbirt enthält, gefülltes Gefäss unter den Recipienten der Luftpumpe, so entwickeln sich

bekanntlich Gasblasen bei zunehmender Luftverdünnung. Da aber eine Verdünnung erst allmählich hierin eintritt, so können natürlich auch die Gase nicht plötzlich, sondern gleichfalls nur allmählich frei werden.

Um ein sofortiges Entweichen der vom Wasser absorbirten Gase zu bewirken, benutze ich folgenden Apparat:

Der starkwandige circa 300^{ccm} fassende Glascylinder *A* wird mit der betreffenden Absorption z. B. Kohlensäure in Wasser (selbst Luft in Wasser) bis zu $^3/_4$ gefüllt und mit dem Gummistopfen *d*, durch



welchen die Glasröhre *e* geht, geschlossen. Die Röhre *e* kann durch den starkwandigen Gummischlauch *f* in Verbindung mit dem Glasballon *B* gebracht werden. Letzterer ist ein Ballon, wie dieselben zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Gasen verwendet werden, von etwa 8 Liter Capacität, versehen mit einer Messingfassung, welche den Hahn *c* und ein Schraubengewinde zum Anschrauben an die Luftpumpe enthält. Ist der Ballon *B* mittelst der Luftpumpe luftleer gemacht, so wird, wenn *B* durch *f* mit *A* luftdicht verbunden worden ist, bei Oeffnen des Hahnes *c* das von der Flüssigkeit in *A* absorbirte Gas in Folge der über der Flüssigkeit in *A* entstandenen Luftverdünnung plötzlich frei werden, so dass ein sofortiges lebhaftes Aufschäumen im Cylinder *A* ersichtlich wird.

Sphärometer mit Libellenfühlhebel.

Von

F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel.

(Hiezu Tafel X.)

Das im Uebrigen bekannte Sphärometer steht mit seinen drei Stahlfüssen auf einem zweiten Dreifuss mit drei Stellschrauben, als Basis. Für die Stahlfüsschen mit eichelförmigen Spitzen sind in den unteren Dreifussbeinen Stahlstöpsel eingelassen, deren einer plan ist, der andere einen Körner und der dritte eine radial stehende Rinne hat. Der Fühlhebel sitzt auf dem unteren Dreifuss und ist zwischen den beiden Spitzenschrauben *a* gehalten und leicht beweglich; nach vorn hat der Hebel das Tischchen mit Planglas für die Messschraube des Sphärometers, nach der anderen Seite ist zwischen Spitzen die Cylinderlibelle gehalten, welche 5 Secunden angibt. Letztere ruht gegenüber auf der Kuppe einer Stellschraube *l* und zwar auf der im Mittelkörper des Hebels befestigten Stahlstange.

Der Dreifuss wird nach einer Dosenlibelle horizontal gestellt und das Tischchen mittelst der durch einen am Dreifuss befestigten Arm von unten gegen den Hebel wirkenden Stellschraube *s* genau eingestellt. Mit dem verstellbaren kleinen Gegengewicht *g* ist der Hebel genau balancirt. Ist dann auch die Fühlhebellibelle mit ihrer Stellschraube genau eingestellt, so wird beim Auftreten des Messstiftes aufs Tischchen der Berührungspunkt durch einen Ausschlag der Libelle sofort und präcis angezeigt.

Contactvorrichtung für Anemometer.

Von

J. Palisa.

(Hiezu Tafel XI.)

Es ist bekanntlich bei elektrisch registrirenden Anemometern eine sehr wesentliche Eigenschaft der Contactvorrichtung, dass der Contact auch dann von ganz kurzer Dauer sei, wenn durch eingetretene Windstille der Apparat an jener Stelle stehen bleibt, an welcher der Contact erfolgt. Dies wird auf verschiedene Weise erzielt; eine sehr einfache Einrichtung ist die folgende, welche ich an einem Anemometer angebracht habe und welche sich bereits durch längere Zeit vollkommen bewährt.

An der Achse AA', welche unmittelbar durch das Schalenkreuz gedreht wird, befindet sich eine unendliche Schraube, welche in das Zahnrad B eingreift. Mit dem Zahnrad B ist eine hölzerne Schnecke C fest verbunden, an deren Peripherie das Ende H eines Hebels E aufruht, dessen Drehungspunkt sich in F befindet. Sobald das Rad B und mit demselben auch die Schnecke C gedreht wird, wird der Hebelarm gehoben, bis jene Stelle erreicht ist, an welcher der Hebelarm abfällt. Während des Abfallens geschieht nun der Contact, und zwar dadurch, dass das Ende H des Hebels an einer Feder I schleift. Es ist nur nöthig, dass die Drahtverbindungen nach H und I geleitet werden. In Folge des Schleifens an der Feder bleibt die Contactstelle stets blank, während die Dauer des Contactes genügend lang verzögert wird, damit der Anker Zeit findet, das Zeichen auf dem Papier zu geben. Um das Abfallen des Hebels zu sichern, kann dem Hebel ein Gewicht G aufgesetzt werden.

Geissler †.

Am 24. Januar verstarb in Bonn der allen Physikern hinreichend und rühmlichst bekannte Glaskünstler Dr. Heinrich Geissler in einem Alter von 65 Jahren. Glücklicherweise hat derselbe bei Zeiten dafür Sorge getragen, dass seine vielseitigen Erfahrungen nicht verloren gehen. Herr Franz Müller, der ihn als sein Schüler seit 25 Jahren in der Leitung seines Institutes unterstützte, wird dasselbe — wie wir erfahren — im Sinne Geissler's fortführen.

Bibliographische Mittheilung.

Der Civilingenieur Ch. Fiévez in Brüssel hat unter dem Titel „Bibliographie des Ouvrages, Mémoires et Notices de Spectroskopie; Bruxelles, F. Hayez“ eine sehr reichhaltige Zusammenstellung der Literatur über Spectralanalyse etc. publicirt, auf die wir unsere Leser aufmerksam machen zu müssen glauben.

Preisermässigung

der bis jetzt erschienenen Jahrgänge des

REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE UND ASTRONOMISCHE

INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN.

Erschien früher unter dem Titel: „Repertorium für physikalische Technik".

Preis pro Jahrgang aus der Reihe 1865—1877 ℳ. 19. 20.
Preis pro Jahrgang 1878 (12 Hefte) ℳ. 20.
Preis pro Jahrgang 1879 (12 Hefte) ℳ. 24.

Um neu eintretenden Abonnenten der Zeitschrift die Erwerbung eines completen Exemplares zu erleichtern, hat sich die Verlagshandlung entschlossen, den Preis der bis jetzt erschienenen Jahrgänge derart zu ermässigen, dass sie, soweit der sehr geringe Vorrath reicht, complete Exemplare vom

Jahrgang 1865—1878 inclusive

nebst Supplement zum Jahrgang 1877: „Neumayer, Hülfstafeln für barometrische Höhenmessungen"

bisheriger Preis Mark 274. 10.

für nur

Mark 180.

bis Schluss des Jahres 1879 erlässt.

Bei gleichzeitigem Bezuge des laufenden Jahrganges 1879 wird die ganze Sammlung Jahrgang 1865—79 incl. nebst Supplement zum ermässigten festen Preise von

Mark 200.

erlassen. Die früher bestandene Preisermässigung für Band 1—10 ist erloschen.

Einzelne Bände aus obiger Sammlung werden nur zum vollen Preise geliefert.

München. **R. Oldenbourg.**



XV. Band. 4. u. 5. Heft.

REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE & ASTRONOMISCHE INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN.

FÜNFZEHNTER BAND.

Inhalt des 4. u. 5. Heftes

(mit Tafel XII bis XIV).

MÜNCHEN, 1879.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

☛ AVIS. ☚

Dem Wunsche vieler Abonnenten gern entsprechend, wird unter dem Titel: „**Bezugsquellen-Liste**" dem Repertorium für Experimental-Physik von nun an eine Uebersicht derjenigen verehrl. Firmen mit Angabe ihrer Specialitäten beigegeben, von welchen gewünschte Maschinen, Apparate, Instrumente etc. etc. bei vorkommendem Bedarf zu beziehen sind. Diese Rubrik wird im Nachstehenden mit einem Verzeichniss derjenigen Firmen eröffnet, welche mit ihren Specialitäten der unterzeichneten Expedition bisher bekannt geworden sind. Eine Ergänzung und Erweiterung dieser Liste nach Massgabe des eingehenden Materials wird erscheinen. Dass damit aber eine vollständige Wiederholung der schon einmal genannten Firmen verbunden sein wird, kann nicht versprochen werden. Die verehrlichen Abonnenten wollen deshalb die Bezugsquellen-Liste, je nachdem sie mehr oder weniger Werth auf dieselbe legen, sorgfältig aufbewahren.

Mit der Bitte, bei Bestellungen, Correspondenzen etc. an die hier angezeigten Firmen gefl. das Repertorium für Experimental-Physik als Quelle angeben zu wollen, zeichnet

hochachtungsvoll

München,
Glückstrasse Nr. 11.

Die Expedition des Repertorium für Experimental-Physik
R. Oldenbourg.

Bezugsquellen-Liste.

Bezeichnung der Firma.	Fabrikate und Angabe der Specialität.
Albert, Frankfurt a. M., Mainzerstrasse.	Physikalische Vorlesungsapparate.
Alvergniat frères, 10, rue de la Sorbonne, Paris.	Glasinstrumente.
Amsler, Schaffhausen.	Pantographen.
Baur, Gustav, Stuttgart, Blumenstrasse 13.	Physikalische Apparate, elektro-medicinische Apparate, Apparate für Galvanoplastik, Haustelegraphen etc.
Beck, R. & J., Manufacturers of optical, mathematical and physical Instruments, 31, Cornhill, London E. C.	Mikroskope.
Breithaupt, F. W. & Sohn, Cassel.	Astronomische u. geodätische Instrumente.
Browning, John, Optical and physical Instrument-maker, 63, Strand, W. C. London.	Spiegel-Teleskope.
Cleff, C. & F., Remscheid-Hasten.	Elektrische u. speciell magnet-elektrische Apparate.
Desaga, C., Universitäts-Mechaniker, Heidelberg.	Bunsen's u. Kirchhof's Instrumente.
Dencker, F., Hamburg, Börsenbrücke 1.	Astronomische Pendeluhren.
Duboscq, J., 21, rue de l'Odéon, Paris.	Optische Apparate.
Ducretet, E. & Co., rue des Feuillantines, Paris.	Cailletet's Apparate für Liquefaction der Gase.
Eiss, Joseph, Mechaniker, Wien VI, Stümpergasse 10.	Puluj's Apparat zur Bestimmung des mechan. Aequivalents der Wärme.
Edelmann, Max, Physikalisches Institut, München, Augustenstrasse 41.	Physikalische Instrumente.
Ertel & Sohn, München, Louisenstrasse 12.	Astronomisch-mathemat. Instrumente.
Fein, C. & E., Stuttgart, Kasernenstr. 43b.	Galvanische Batterien und elektrische Vorlesungsapparate.
Fleischer, Hermann, Mechaniker, Berlin.	Physikalische Waagen.
Fritsch, K., Wien.	Spiegel-Teleskope.
Fritz, Max, Görlitz i. Schlesien, Wilhelmsplatz 3.	Scioptikon mit dazu gehörigen Glasphotogrammen.
Greiner & Friedrichs, Sturzenbach.	Physikalisch-meteorologische Apparate und Instrumente.

Fortsetzung auf der dritten Seite des Umschlages.

Die Wagemanometer

und deren Verwendbarkeit zur Construction eines meteorologischen Universalregistrirapparates

sowie eines

autographirenden Pegels für Flüsse und das Meer

mit stetigen Aufzeichnungen und eventuell selbstthätigem Integrir- und Aufziehwerk.

(Zugleich als dritte Abhandlung über den Barothermographen.)

Von

Dr. **Paul Schreiber,**

Lehrer für Physik an den kgl. technischen Lehranstalten in Chemnitz (Sachsen).

(Hiezu Tafel XII und XIII.)

Einleitung.

Der Stand der Forschungen über die Bewegungen und Zustandsänderung in unserer Atmosphäre ist gegenwärtig derart, dass wir rasche und zuverlässige Fortschritte nur erwarten können, wenn wir die gleichzeitigen Witterungserscheinungen womöglich auf der ganzen Erdoberfläche zu übersehen vermögen und deren Veränderungen von Augenblick zu Augenblick zu verfolgen im Stande sein werden. Ich habe nicht nöthig, den Nutzen nachzuweisen, welchen die Meteorologie aus den synoptischen Karten Hoffmeyer's, aus den täglichen graphischen und tabellarischen Wetterberichten der meteorologischen Institute der verschiedenen Länder hat ziehen können. Mir scheint eine Hauptaufgabe der meteorologischen Congresse, zusammengesetzt aus officiellen Vertretern der verschiedenen Länder, zu sein, die Publication täglicher synoptischer Karten, welche sich auf die ganze Erde beziehen, anzubahnen. Auch dann, wenn diese Karten mehrere Jahre später erscheinen, werden sie von ganz enormem Werth sein und wird der Fortschritt der Wissenschaft lediglich von diesen Publicationen abhängen. Material zu solchen Karten würde zu

beschaffen sein durch die Beobachtungsnetze auf dem Festland und durch die Beobachtungen auf Schiffen. Diese letzteren können jedoch nur als ein Nothbehelf betrachtet werden, und sollte man auf Inseln, vielleicht auch, wo ein grösseres Terrain des Meeres ohne Insel ist, auf verankerten meteorologischen Schiffen etc. Registrirapparate aufstellen, die so eingerichtet sind, dass sie mindestens ein Jahr sich selbst überlassen bleiben können, so dass nur in gewissen Zeiträumen durch Kriegsschiffe oder auch durch Handelsschiffe, die zufällig vorüberfahren, eine Auswechselung des Papieres stattzufinden braucht und die gesammelten Registrirungen der Wissenschaft nutzbar gemacht werden können.

Namentlich in den hohen Breiten sind solche Registrirapparate nöthig, da die dort sich abspielenden Vorgänge vorzüglich bestimmend auf unsere Witterung zu sein scheinen und für die Theorie der grossen Circulationen der Luft von der grössten Wichtigkeit sind. Dort müssen die Apparate aber so eingerichtet werden, dass sie unter allen Umständen mindestens während des Winters vollständig allein arbeiten können und auch der grössten Witterungsunbill zu trotzen vermögen. Erst dann, wenn wir auf den grossen Flächen der Meere in gleichmässiger Vertheilung ständige und stetige Aufzeichnungen der Vorgänge in der Atmosphäre erhalten können, wenn auf einsamen Inseln, sowohl in den heissen Regionen der Tropen, namentlich in den Calmenzonen, als auch in den eisigen Regionen der Pole, sich vollständig zuverlässig wirkende Registrirapparate befinden werden, werden wir an die Lösung der grossen Probleme in der Meteorologie denken können. Meiner Meinung nach sollte man überhaupt das ganze jetzige System der Beobachtungsnetze aufzugeben suchen. Die Stationen sind an grosse Städte und an die Beobachter gebannt und müssen mit diesen wandern. Dass hier gerade in grossen Städten Verhältnisse vorwalten, welche mit dem allgemeinen Zustand der Atmosphäre, namentlich was Temperatur, Feuchtigkeit, Wind etc. betrifft, nichts zu thun haben und so massenhaftes Material von mehr als zweifelhaftem Werth erhalten wird, ist schon oft genug hervorgehoben worden. Man mache sich vollständig von dem subjectiven Beobachter, der sich in seinen gebundenen Verhältnissen nie behaglich finden wird, frei, lasse alle Beobachtungen durch Registrirapparate, welche an passenden Orten aufgestellt werden, in eigens dazu gebauten Häusern aufzeichnen und stelle nur als Wächter Leute hinzu, die der Staat so wie so erhalten

muss, namentlich Invalide etc., welche so auch in ihren alten Tagen noch zu den nützlichen Mitgliedern der menschlichen Gesellschaft gemacht werden können. So wird man wissenschaftlich Gebildeten geisttödtende und in jeder Beziehung störende Thätigkeit und manchem noch geistig rüstigen Manne das unangenehme Gefühl, Anderen zur Last zu fallen, ersparen können. Ueber allgemeine Witterungsvorgänge, die nicht registrirt werden können, werden auch Leute aus dem Volk genügend Rechenschaft geben können und wird so die Wissenschaft in jeder Weise gewinnen. Wenn Stationen besser ausgesucht werden können, werden auch auf demselben Gebiet weniger angeordnet zu werden brauchen. Zweifellos wird eine solche Aenderung viel Capital erfordern; die Beobachter hat man aber auch nicht umsonst, und wird man bei der Erwägung meiner Ansichten weniger das Anlagecapital als die zur Verzinsung desselben nöthige jährliche Ausgabe in Betracht zu ziehen haben. Sicher wird dann die etwaige Erhöhung des jährlichen Budgets durch den überaus grossen Gewinn der Wissenschaft mehr als gedeckt werden.

Von diesen Erwägungen ausgehend habe ich der Construction selbstregistrirender meteorologischer Instrumente schon seit Jahren eine besondere Aufmerksamkeit zugewandt und meine Bemühungen darauf gerichtet, einen Apparat zu ersinnen, welcher allen den Anforderungen genügt, welche man billigerweise an einen solchen stellen kann und stellen muss, wenn er als Ersatz eines wissenschaftlich gebildeten Beobachters dienen soll.

Dabei bin ich von bestimmten Gesichtspunkten ausgegangen, die ich im Folgenden aufführen und begründen will und nach denen ich die in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagenen Einrichtungen eines completen Registrirapparates zu beurtheilen bitte. Ich unterscheide zwei Arten von Registrirapparaten: solche, welche auf festem Grund und Boden aufgestellt werden können und dauernd an dem betreffenden Ort bleiben sollen, und solche, welche an Bord von Schiffen oder bei wissenschaftlichen Expeditionen auch zu Land Verwendung finden sollen. *Meine folgenden Auseinandersetzungen werden sich lediglich auf die erste Art, auf Registrirapparate mit fester und sicherer Fundirung, beziehen.*

1) Wenn es sich darum handelt, gegenwärtig einen Registrirapparat aufzustellen, so muss in erster Linie darauf gesehen werden, dass derselbe fähig ist, an demselben Ort und möglichst lange, wo-

möglich auf Jahrhunderte, sicher und ohne wesentliche Störung zu functioniren. Es erfordert dies, dass ein solcher Apparat in ein besonderes ad hoc gebautes Haus kommt, welches für ihn angepasst ist, und dass auf die Dauerhaftigkeit gesehen wird, dass alle kleinen Apparate mit ihren winzigen Mechanismen, die voraussichtlich mit der Zeit ihre Dienste versagen, im Princip ausgeschlossen werden. Grosse, massige Instrumente werden diese Bedingungen weit mehr erfüllen als die zierlichen Dinger, welche heutzutage von den Mechanikern geliefert werden, die sich auf einer Ausstellung als Paradepferde sehr gut machen, aber zu ernster Arbeit nicht gebraucht werden können.

2) Die Instrumente, welche zu dem Registrirapparat kommen, müssen so gewählt werden, dass sie direct grosse Bewegungen mit grossen bewegenden Kräften geben. Es soll die Bewegung eher zu gross als zu klein sein, und wird eine Uebersetzung in langsamere Bewegung für den Stift weit günstiger wirken als die Vergrösserung kleiner directer Bewegungen zur Erzielung grösserer Amplituden des Stiftes. Die Vergrösserung kleiner Bewegungen hat einen sehr zweifelhaften Werth; es wird dann zwar die Bestimmung der Ordinaten der Diagramme genauer, aber die vergrösserten Fehler des Instrumentes lassen den Werth dieser Genauigkeit sehr illusorisch erscheinen.

3) Die Aufzeichnungen der Vorgänge in der Atmosphäre sollten continuirlich erfolgen durch einen einfachen Bleistift, eventuell Capillarfeder und Tinte, auf Papier.

Es hat dies zwar den Nachtheil, dass die Markirungen dann im einzelnen Falle nie den Grad von Genauigkeit haben wie bei Anwendung von Nadeln, es werden durch die Reibungswiderstände die Amplituden der Bewegungen verkleinert. Jedoch lassen sich diese Störungen durch Vermehrung der bewegenden Kräfte auf Minima reduciren, und in den Mitteln fallen diese Fehler heraus. Der wesentliche Vortheil stetig schreibender Apparate besteht darin, dass keine der interessanten Erscheinungen verloren gehen kann dadurch, dass sie zufällig zwischen zwei Markirungen fällt und dass man auch zum Betrieb des Registrirwerkes weniger mechanische Arbeit braucht.

4) Man soll die Apparate so einzurichten suchen, dass die Aenderungen in den Ordinaten der Registrircurven möglichst proportional den bewegenden Ursachen sind. Dann lässt sich der Gang der Erscheinungen auf dem Originalstreifen sofort verfolgen und wird die Verarbeitung durch Verwendbarkeit von Glasscalen oder Liniirmaschinen,

durch welche die Scala direct auf das Papier gezogen werden kann, und namentlich des Planimeters zur Ableitung der Mittel wesentlich vereinfacht. Es soll überhaupt durch mechanische Mittel der Neuzeit die Reduction der Registrirungen möglichst vereinfacht werden.

5) Der Druck der Stände der meteorologischen Apparate in Zahlen durch den Registrirapparat selbst ist durchaus zu verwerfen. Es ist vielfach hervorgehoben worden zu Gunsten der Typendruckregistrirapparate, dass sie wesentlich an Arbeitskraft ersparen. In der That, wenn man sich auf jede Zahl, die der Apparat liefert, verlassen kann, wenn keine einer Correction auf wahre Werthe, wegen Temperatur und sonstiger störender Ursachen, bedarf, dann kann man die Registrirstreifen direct in die Druckerei schicken und füllt stattliche Bände ohne Mühe mit Zahlen an. Dies kann aber doch nicht der Zweck der Registrirapparate sein, sondern es sollen diese das Material liefern, das nutzbar verwendet werden muss. Es sollten überhaupt meteorologische Beobachtungen nicht in Tabellen, sondern in Curven publicirt werden; die Publicationen werden dadurch übersichtlicher, compendiöser, mithin nutzbarer. Wenn man den Apparat gleich so einrichtet, dass er Curven liefert, welche den Gang der Erscheinung direct in den natürlichen Verhältnissen darstellen, so braucht man höchstens einen Pantographen, um die Curven in die für die Publication gehörige Grösse zu bringen. Sollen die Registrirungen gar zur Ableitung von Mitteln benutzt werden, so fängt man bei den Streifen mit Zahlen mit Addiren und Dividiren an, während die graphische Registrirung mit dem Planimeter rasch die Mittelzahlen hinlänglich genau liefert. Typendruck begünstigt jedenfalls das lange Liegenlassen von Registrirungen. Müssen nun gar an den gedruckten Zahlen Correctionen angebracht werden, so wird der Werth dieser Einrichtungen noch zweifelhafter. Namentlich wenn man die jetzt so sehr ausgebildeten photographischen Vervielfältigungsmittel in Betracht zieht, verschwinden alle die zu Gunsten der Typendruckregistrirapparate angeführten Momente. Es lassen sich durch diese Verfahren die Registrircurven ausserordentlich klein und doch getreu reproduciren und sind mit Hilfe von Vergrösserungsgläsern leicht ablesbar.

6) Soll ein Registrirapparat dauernd functioniren können, so müssen alle in der freien Atmosphäre beweglichen Theile wegfallen. Dieselben werden durch Rost und sonstige Zerstörung mit der Zeit unbrauchbar

und können namentlich jeden Moment bei Stürmen so beschädigt werden, dass sie entweder gar nicht oder nur schlecht ihre Thätigkeit ausführen. Es erfordert dies namentlich bei den Anemometern ganz andere Einrichtungen, als gewöhnlich jetzt angewandt werden. Für Apparate, die in höheren Breiten namentlich, wo Schnee und Eis vorkommen können, sich selbst überlassen bleiben sollen, wird man die in Fig. 7 Tafel XIII dargestellte Einrichtung des Anemometers unter allen Umständen anwenden müssen.

7) Zur Vermeidung von Zerstörungen und Untauglichwerden des Apparates muss das Gebäude aus mindestens zwei Theilen bestehen. Im ersten befinden sich die Vorrichtungen, welche die Bewegungen durch die Aenderungen im atmosphärischen Zustande aufnehmen. Diese Vorrichtungen müssen sehr massiv construirt werden, und ist namentlich darauf zu sehen, dass Rost, Schmutz, Kälte eine wesentliche Störung in ihren Functionen nicht hervorbringen können. Es lassen sich diese gegen Einwirkung von Feuchtigkeit, Seeluft und starken Temperaturwechsel nicht schützen oder wenigstens nur sehr ungenügend.

Im zweiten Raume stehen die eigentlichen Registrirapparate. Derselbe ist so dicht als nur möglich zu schliessen, gegen Temperaturschwankungen zu schützen und namentlich vor Feuchtigkeit und Seeluft zu bewahren. Da in diesem Raume das Barometer steht, so darf der Schluss nicht hermetisch sein, es sollen Oeffnungen angebracht sein; diese müssen dann aber mit zweckmässigen Einrichtungen zur Verhütung des Eindringens von Feuchtigkeit und Staub eventuell auch der Seeluft versehen werden. Nur dadurch werden alle Stahltheile vor Rost, der Apparat vor Verstaubung bewahrt und wird die Function eine lange Zeit ungestörte bleiben.

8) Sind die unter 7 geforderten Bedingungen erfüllt, so ist eine Uebertragung der Bewegung von den Apparaten, welche die Bewegung aufnehmen, zu den Registratoren nöthig. Dieselbe darf nicht durch gewöhnliche Wellen-, Rad- oder Seiltransmissionen, auch nicht durch Elektricität erfolgen. Die ersten Vorrichtungen würden entweder die Bedingung 7 vernichten, oder wegen zu grosser Reibungswiderstände schlechte Resultate geben. Die Elektricität darf bei rationellen Registrirapparaten überhaupt nicht verwendet werden. So bleiben nur übrig die Fortpflanzungen der Bewegung in Flüssigkeiten oder Gasen, was in Röhren geschieht und so den dichten Schluss des Raumes der Registratoren nicht stört.

9) Wie die elektrische Uebertragung der Bewegung bei einem rationellen Registrirapparat nicht zulässig ist, darf auch weder die Registrirung noch die Bewegung des Papieres durch diese Naturkraft bewirkt werden. Sowie bei einem Registrirapparat eine elektrische Vorrichtung, welche zur Registrirung selbst, oder zu irgend einer Bewegung, oder der Uebertragung einer solchen von einem Ort zum anderen nöthig, angebracht ist, ist gleich von vornherein die Möglichkeit, diesen Apparat an isolirten Punkten ohne Aufsicht aufzustellen, ausgeschlossen. Es ist bei einem solchen Apparat sogar nothwendig, dass ein mehr oder weniger wissenschaftlich gebildeter Mechaniker die Aufsicht hat. Das Reinigen der Elemente und der Contacte, Aufsuchen von Bruchstellen in Leitungsdrähten oder plötzlich irgendwo entstandener Unterbrechungen wird nur ein solcher ausführen können. Es soll bei einem Registrirapparat lediglich die Schwerkraft der Erde zum Bewegen des Papieres und der sonstigen zum Registriren nöthigen Vorrichtungen benutzt werden. Ein solches mechanisches Betriebswerk lässt sich viel leichter dauerhaft herstellen; es wirkt mit der Zeit immer besser, da sich die Eingriffe der Räder einarbeiten, etwaige Stellen, wo Reibungen stattfinden, blank poliren und so die Coëfficienten der Reibung vermindern, so lange nur Rost und etwaiges Gefrieren des Oeles vom Instrument abgehalten wird. Es wird ein solches Werk anfangs möglicherweise Schwierigkeiten machen und wird man hie und da nachhelfen müssen, es wird dann aber kaum eine Störung zeigen, wenn nicht aussergewöhnliche Ursachen, als Erdbeben oder Bruch, veranlasst durch schlechtes Material etc., eintreten. Elektrische Apparate wirken ganz entgegengesetzt, anfangs gut, so dass es eine Lust ist, einen solchen Apparat arbeiten zu sehen; allein es kommt die Zeit heran, und kein Apparat zeigt mehr die Bedeutung des Wortes „Alterschwäche“ wie eben der elektrische Apparat.

Weiter sind die elektrischen Einrichtungen zu theuer, sie erfordern ein ziemliches Betriebscapital, welches durch Materialverbrauch, Aufsichts- und Reinigungskosten bedingt wird. Wenn man diese Kosten in Rechnung zieht und sie als Zinsen eines Capitals auffasst, so kann man für ein solches schon eine prächtige und sicher wirkende mechanische Einrichtung schaffen.

10) Wenn alle mechanische Arbeit, welche zum Betrieb des Registrirapparates nöthig ist, durch den Fall von Gewichten gewonnen wird, kann man dem Apparat endlich noch eine Einrichtung hinzu-

fügen, welche gestattet, ihn sich vollständig selbst zu überlassen; man kann dann ein Aufziehwerk anbringen. Dieses muss getrieben werden durch irgend eine Kraft, die Leistungfähigkeit genug besitzt und auf deren Existenz man sich verlassen kann. Derartige Kräfte werden sein: der Wind, Ebbe und Fluth des Meeres, Wasserströmungen, Aenderungen im Druck und der Temperatur der Atmosphäre. Gelingt es, eine dieser Naturkräfte nutzbar zu machen durch Einrichtungen, deren Preis in einem vernünftigen Verhältniss zu den Leistungen und namentlich zu den Kosten anderer Mittel zur Erreichung desselben Zweckes steht, so ist nur noch ausreichend langes Papier nöthig, um einen Apparat zu bekommen, der jahrelang ununterbrochen und genau die Aufzeichnungen der Vorgänge in der Atmosphäre an vollständig isolirten und unbewohnten Orten, ohne menschliche Beihilfe ausführt, und würde dies erst ein Registrirapparat im wahren Sinne des Wortes sein.

Nach reiflichen Erwägungen aller der Umstände, die hier in Betracht kommen können, soweit ich dieselben vorauszusehen vermag, glaube ich einen Weg gefunden zu haben, auf dem es möglich sein dürfte, einen Registrirapparat für die wichtigsten meteorologischen Elemente zu erhalten, welcher die im Vorhergehenden besprochenen Bedingungen erfüllen kann. Dieser Weg besteht einfach darin, dass man suchen muss, alle Aenderungen und Vorgänge in der Atmosphäre in Aenderungen der Spannung eingeschlossener Luftmengen oder der Druckhöhen von Flüssigkeiten zu verwandeln. Diese werden dann durch Manometer und zwar durch Wagemanometer gemessen und registrirt. Von den vorgeschlagenen Einrichtungen habe ich, abgesehen vom Barographen, eine schon durch die Praxis erproben können, nämlich die Messung und Registrirung der Lufttemperatur durch ein Gasthermometer in Verbindung mit einem Wagemanometer. Ich habe in der folgenden Arbeit Gelegenheit genommen, die Theorie dieses Instrumentes specieller zu behandeln unter besonderer Berücksichtigung des in Hamburg functionirenden Exemplares, dessen Beschreibung schon früher gegeben wurde[1]). Es wird dies gerade zeigen, dass bei den complicirtesten der vorgeschlagenen Instrumente die Theorie sich sehr einfach behandeln lässt und dass diese Instrumente eine theoretische Behandlung zulassen, was wesentlich für dieselben von Vortheil sein dürfte.

1) Repertorium Bd. 14 S. 471 ff.



Der Erfolg, welcher die Construction des Wagethermographen begleitete, veranlasst mich nun auch mit Vorschlägen zu weiteren Verwendungen des Wagemanometers bei Construction eines Universalregistrirapparates hervorzutreten. Ich kann mir nicht verhehlen, dass bei diesen Erweiterungen der Erfolg nicht so sicher ist, als bei dem Thermographen; doch erscheinen mir die Schwierigkeiten nicht unüberwindlich und der Vortheil eines solchen Apparates der Bemühungen und auch eventuellen Geldopfer bei der ersten Ausführung werth.

Ich habe gleich bestimmte Constructionen aufgestellt, um einen greifbaren und discutirbaren Gegenstand zu haben, und bemerke hiebei, dass ich die Einrichtungen durchaus nicht für die definitiven halte, bin im Gegentheil der Meinung, dass, wenn es mir gelingen sollte einen derartigen Apparat ausführen zu können, wesentliche Aenderungen sich nöthig erweisen werden.

Indem ich nun zur Besprechung der Einrichtung meines Universalregistrirapparates übergehe, bemerke ich, dass ich zuerst die Grundinstrumente behandeln werde. Es sind dies das Wagebarometer, das Wagemanometer für Gasdrücke und das Wagemanometer für Druckhöhe von Flüssigkeiten. Beim Wagebarometer werde ich die verschiedenen Arten derselben und ihre Verwendung zur directen Bestimmung des Luftdruckes, als auch zum Registriren desselben, erörtern. Alle diese Methoden werden bei den Wagemanometern Verwendung finden können.

Dann folgt unter II. die Besprechung der Einrichtungen, durch welche die Aenderungen in den meteorologischen Elementen in Aenderung von Druckhöhen umgewandelt und durch Wagemanometer messbar gemacht werden können. Es werden hier in Betracht gezogen die Construction von Registrirapparaten für Temperatur und Feuchtigkeit der Atmosphäre, Windrichtung und Windstärke, Regen und Verdunstung, Wasserstände in Flüssen und im Meere etc.

Im dritten Theil werden die Einrichtung der Schreibapparate der Registratoren, der Vorrichtungen zum mechanischen Integriren der Flächen der Diagramme behufs Ableitung der Mittel und die Instrumente zur selbstthätigen Aufziehung der Uhrwerke behandelt werden.

I. Die Grundinstrumente.

A. Das Wagebarometer.

Zu den subjectiven Bestimmungen des Luftdruckes dürfte wohl das Wagebarometer praktisch noch nicht gebraucht worden sein, trotzdem dass sein Erfinder, Samuel Moreland, dasselbe direct zu diesen Beobachtungen eingerichtet angab. Wir finden angegeben ein cylindrisches Barometerrohr, welches an dem einen Schenkel eines zweiarmigen geraden Hebels hängt und beweglich in ein Quecksilbergefäss taucht. Der andere Hebelarm bildet einen Zeiger, welcher sich vor einer Kreisscala bewegt und so durch einen Blick die Grösse des Luftdruckes zu finden gestattet. Merkwürdigerweise ist dieses einfache Instrument in der neueren Zeit, soviel mir bekannt ist, nicht ausgeführt worden; wie gut müsste ein derartiger Apparat sich an Hafenplätzen und an anderen Orten eignen, dem grösseren Publikum den Barometerstand sichtbar zu machen. Man könnte bei der bedeutenden bewegenden Kraft, welche man einem solchen Instrumente geben kann, hier die Zeiger so gross wie bei Thurmuhren und so von grosser Entfernung sichtbar machen. Das Verdienst, das einer so grossen und vielfachen Anwendung fähige Instrument wirklich im Dienste der Wissenschaft zuerst praktisch verwendet zu haben, scheint zweifellos dem jüngst verstorbenen Astronomen Secchi in Rom zuzusprechen zu sein, und wird Secchi deshalb von Vielen fälschlich als der Erfinder desselben angesehen. Secchi gehört auch das Verdienst, gezeigt zu haben, dass nur ein cylindrisches Rohr an einer gleicharmigen Wage oder Rolle mit constantem Gegengewicht im stabilen Gleichgewicht sein kann, dass dagegen bei einem oben weiteren Rohre das Gleichgewicht variabel gemacht werden muss, und zwar so, dass es beim Aufsteigen des Rohres leichter wird, wenn nicht labiles Gleichgewicht eintreten soll. Den theoretischen Nachweis gab er aber nicht und auch nicht Radau, denselben dürfte wohl zuerst ich[1]) geliefert haben.

Secchi verwendete das Wagebarometer bei der Construction eines autographen Barometers und führte den Winkelhebel als Aufhängevorrichtung des Rohres ein. Der Winkelhebel wurde von allen späteren Constructeuren von Wagebarographen benutzt mit wohl alleiniger Ausnahme von King in Liverpool, welcher zwar das Rohr oben weiter

1) Schreiber: Repertorium Bd. 8 S. 257 ff.



als unten wählte, den Durchmesser des eintauchenden Theiles aber durch einen Mantel grösser machte als den der Kammer und so bei Aufhängung an einer Rolle mit constantem Gegengewicht stabiles Gleichgewicht erzielte. Diese Erweiterung des eintauchenden Theiles des Rohres hat aber den grossen Uebelstand, dass das Rohr durch den Auftrieb gar zu leicht und kräftig gegen die Wandung des Troges gedrückt wird, wodurch ziemliche Reibungswiderstände entstehen können und die Führung des Rohres zwischen Rollen sich nöthig macht. Die Vortheile, welche der Winkelhebel gewährt, bestehen vorzugsweise darin, dass man zur Erzielung einer grossen bewegenden Kraft den Durchmesser des Rohres an den Stellen, an welchen sich die Kuppe im Rohr befinden kann, der Kammer, sehr gross machen, dadurch aber, dass der untere Theil sehr eng gemacht wird, das Gewicht des ganzen Rohres verhältnissmässig vermindern kann, so dass die Schneiden des Hebels nicht gar zu sehr in Anspruch genommen werden. Würde man ein einigermassen weites Rohr von etwa 30^{mm} lichter Weite cylinderförmig anwenden, so würde das Gewicht desselben circa 8 Kilogr., die ganze Belastung des Balkens demnach mindestens 16 Kilogr. betragen, während bei Anwendung eines Rohres, welches oben eben so weit, aber unten enger ist, diese ganze Belastung sehr bequem auf weniger als 4 Kilogr. reducirt werden kann. Es ist dieser Umstand der Grund, weshalb man diese Rohrform überhaupt anwendet, und scheinen dies diejenigen Constructeure, welche neuerdings für cylindrische Rohrform sich aussprechen, ganz vergessen zu haben.

Einen grossen Uebelstand haben die Wagebarographen mit Winkelhebel, der sich stets sehr unangenehm bemerkbar machte: ihre Bewegung ist nicht proportional den Druckschwankungen, sondern ist eine Function des Ausschlages des Balkens. Namentlich bei sehr kurzen Hebelarmen und grossen Bewegungen des Rohres kann die Aenderung der Bewegung des Rohres pro 1^{mm} Aenderung des Luftdruckes bei den Reductionen der Barogramme sehr unangenehm werden. Auch bei der Bestimmung der Reductionsgleichung und namentlich Aenderung derselben, hervorgerufen durch Veränderungen am Instrumente, macht sich dieser Uebelstand vorzugsweise geltend.

Bei der Construction meines früher beschriebenen Barothermographen[1]) habe ich ein Rohr mit weiter Klammer und engem unteren

1) Repertorium Bd. 14 S. 471 ff.



Theil angewandt, dasselbe an eine Rolle gehängt, das cylindrische Gegengewicht aber in ein Gefäss mit Quecksilber tauchen lassen. Dadurch ist dasselbe variabel gemacht und die Stabilität des Gleichgewichtes erreicht, zugleich aber auch die Bewegung des Rohres streng proportional den Aenderungen des Luftdruckes gemacht worden. Die ganze Einrichtung hat sich, wie ich in einer früheren Abhandlung[1]) nachgewiesen habe, auf das beste bewährt.

Die ganze Einrichtung meines Barographen ist aus Fig. 1 Taf. XII leicht zu ersehen. In der vorhin erwähnten Abhandlung habe ich die Theorie des ganzen Instrumentes ausführlich behandelt und namentlich gezeigt, dass sich die zur Aufstellung der Reductionsgleichung nöthigen Constanten mit der grössten Schärfe, theils vor der Aufstellung durch Auswägen der Röhre und des Troges mit Wasser, theils aber nach definitiver Aufstellung durch Auflegen von Gewichten, Aenderung der Quecksilbermengen in den beiden Trögen und Bestimmen der dadurch hervorgebrachten Bewegungen, ermitteln lassen.

Von ganz wesentlicher Bedeutung, was nicht genug hervorgehoben werden kann, ist bei dieser Methode der Umstand, dass Aenderungen im Barometerstande dabei nicht nur nicht nöthig, sondern sogar störend sind, dass diese Messungen rasch hinter einander gemacht werden müssen, um soviel als möglich von den Luftdrucksänderungen unabhängig zu sein. Man kann bei meinem Instrument, nach meiner Methode, in wenig Tagen die Röhre und das Gegengewicht an allen Stellen prüfen, kann alle möglichen Controlen der Messungen vornehmen, jede Grösse auf zwei verschiedenen Wegen bestimmen und kann dann Reductionsgleichungen danach berechnen, welche den einer bestimmten Ordinate des Barogrammes entsprechenden Barometerstand auf das schärfste geben und tägliche directe Controlbeobachtungen absolut unnöthig machen. Mein Barometer wird einen Beobachter vollständig ersetzen.

In Fig. 1 bedeuten:

C, *B*, *D*, *E* und *F* Cylinderweiten ausgedrückt durch Gewichte von Quecksilbersäulen von 1^{cm} Länge und den entsprechenden Durchmessern.

V ist das Gewicht Quecksilber, welches in dem Rohre vom offenen Ende an bis zum Schnitt *OO* enthalten ist;

1) Repertorium Bd. 14 S. 649 ff.



M_1 und M_2 sind die Gewichte Quecksilber in den unteren Theilen der Tröge. G und Γ bedeuten die Gewichte des leeren Rohres und des Gegengewichtes. x ist die Ordinate des Barogrammes.

Bedeuten weiter P_1 und P_2 die Gewichte des gefüllten Rohres und des im Quecksilber sich befindlichen Gegengewichtes, S das Gewicht des ganzen Quecksilbers im Barometerrohr und im Trog I, Σ das Gewicht des Quecksilbers im Trog II, so gelten folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= G + V + Cs - Bw \\ P_2 &= \Gamma - D\sigma \\ S &= M_1 + V + Cs - Bw + Ey \\ \Sigma &= M_2 + Fz - D\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (1$$

Die Bedingungen des Gleichgewichtes des Barometers werden demnach durch folgende drei Gleichungen ausgedrückt, welche wir die Hauptgleichungen nennen können:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= G - \Gamma + V + Cs + D\sigma - Bw \\ 0 &= -S + M_1 + V + Cs - Bw + Ey \\ 0 &= -\Sigma + M_2 - D\sigma + Fz. \end{aligned}\right\} \quad (2$$

Zu diesen Gleichungen kommen noch die Beziehungen zwischen den Längen:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= l_1 + l_2 + \lambda - 2h - r\pi \\ l &= l_3 - \lambda \\ L_2 &= L_1 - l_1 \\ u &= x + L_1 \\ w &= x + y + L_1 \\ s &= b + x + y + L_2 \\ \sigma &= z - x + l. \end{aligned}\right\} \quad (3$$

Aendert sich der Barometerstand bei constanter Temperatur, so treten auch in s, σ, w, y und z Aenderungen ein, während die Dimensionen des Apparates constant bleiben. Wir erhalten durch Differentiation der Systeme 2 und 3

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Cds - Bdw + Dd\sigma \\ 0 &= Cds - Bdw + Edy \\ 0 &= - Dd\sigma + Fdz \end{aligned}\right\} \quad (4$$

$$\left.\begin{aligned} ds &= db + dx + dy \\ dw &= dx + dy \\ d\sigma &= dz - dx \end{aligned}\right\} \quad (5$$

und aus der Combination der Systeme (4) und (5) die **Bewegungsgleichungen**

$$\left.\begin{aligned}
0 &= Cdb + (C - B - D)\,dx + (C - B)\,dy + Ddz \\
0 &= Cdb + (C - B)\,dx + (E + C - B)\,dy \\
0 &= Ddx + (F - D)\,dz
\end{aligned}\right\} \quad (6$$

In diesen drei Gleichungen sind vier Variabele enthalten, und werden sich stets drei derselben als lineare Functionen der vierten darstellen lassen. Die wichtigste dieser Functionen

$$\frac{db}{dx} = \left[\left(\frac{FD}{F - D} - \frac{E(C - B)}{E + C - B}\right) : \frac{EC}{E + C - B}\right] = \text{Const.}$$

liefert die Grundgleichung zur Reduction der Barogramme.

Wenn dagegen der Luftdruck constant bleibt, aber die Temperatur des Instrumentes sich ändert, so kommen bei der Differentiation noch die Dimensionen des Instrumentes als variabel in Betracht. Die Differentialgleichungen lauten dann

$$\left.\begin{aligned}
0 &= dV + Cds + sdC + Dd\sigma + \sigma dD - Bdw - wdB \\
0 &= d(V + M_1) + Cds + sdC + Edy + ydE - Bdw - wdB \\
0 &= dM_2 - Dd\sigma - \sigma dD + Fdz + zdF
\end{aligned}\right\} \quad (7$$

$$\begin{aligned}
dw &= dx + dy + dL_1 \\
ds &= db + dx + dy + dL_2 \\
d\sigma &= dz - dx + dl.
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit α den Ausdehnungscoëfficienten des Quecksilbers und mit β den linearen Ausdehnungscoëfficienten der festen Bestandtheile des Apparates, welche, Glas und Eisen vorausgesetzt, fast gleiche Dilatation haben, und erhalten für die Bewegungen dx, dy und dz, welche die Erhöhung der Temperatur um 1°C. dem Instrument ertheilt, folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= Cb\alpha - (\Gamma - G)(\alpha - 2\beta) + [V + CL_2 + Dl - BL_1]\beta + \\
&\quad + (C - D - B)\,dx + (C - B)\,dy + Ddz \\
0 &= Cb\alpha - S(\alpha - 2\beta) + [V + M_1 + CL_2 - BL_1]\beta + \\
&\quad + (C - B)dx + (E + C - B)\,dy \\
0 &= -\Sigma(\alpha - 2\beta) + (M_2 - Dl)\beta + Dx + (F - D)\,dz.
\end{aligned}\right\} \quad (8$$

Man sieht, dass daraus dx, dy und dz sich als Functionen von b ergeben; es hat sich aber gezeigt, dass bei den Dimensionen, welche mein Instrument hat, die Veränderlichkeit mit dem Barometerstand

vernachlässigt werden kann und ein für den mittleren Luftdruck geltender Coëfficient zur Reduction der Barogramme ausreichend ist.

Zur Bestimmung der in dem Systeme (8) vorkommenden Constanten genügt einfach das Auswägen von Röhre und Trog mit Wasser, Messen der äusseren Durchmesser mit der Schublehre und der anderen Dimensionen mit einem einfachen Millimetermass. Die Constanten des Systemes (6) müssen dagegen schärfer ermittelt werden, und geschieht dies am besten dadurch, dass man auf die Röhre oder das Gegengewicht am fertig aufgestellten Instrument Gewichte legt und die dadurch hervorgebrachten Bewegungen misst, dass man die Quecksilbermengen in den Trögen ändert. Der äussere Durchmesser des engen Theiles des Rohres muss aber mit der Schublehre bestimmt werden, und muss weiter vor dem Anhängen der Röhre durch Auflegen von Gewichten auf eine provisorisch angebrachte Wageschale die Belastung ermittelt werden, welche das Gegengewicht um 1^{cm} zu heben vermag.

Es sind dies zwei Bestimmungen, welche sich ohne Schwierigkeiten vornehmen lassen. Der Berechnung der Constanten aus diesen Messungen liegen dann die folgenden theoretischen Untersuchungen zu Grunde. Wir erhalten zunächst aus den Hauptgleichungen die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= dG + Cds + Dd\sigma - Bdw \\ 0 &= -dS + Cds - Bdw + Edy \\ 0 &= -d\Sigma - Dd\sigma + Fdz, \end{aligned}\right\} \quad (9$$

woraus wir die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= dG + dS - d\Sigma - Edy + Fdz \\ 0 &= dG - dS - d\Sigma + 2(C-B)ds + 2Bdb + Edy + Fdz \\ 0 &= dG + dS + d\Sigma + 2Dd\sigma - Edy - Fdz \end{aligned}\right\} \quad (10$$

herleiten können.

Die erste der Gleichungen (10) liefert, falls E und F schon sehr nahe bekannt sind (durch Auswägen der Tröge mit Quecksilber vor der Aufstellung), eine Controle der Beobachtungen dG, dS, $d\Sigma$, dy und dz, und wird jeder grössere Fehler in einer dieser beobachteten Grössen sich bemerklich machen müssen. Eine weitere Controle der Beobachtungen liefert die aus dem System (3) sich ergebende Gleichung

$$ds = db + dx + dy.$$

Die zweite Gleichung des Systemes (10) dient zur Berechnung von

$C - B$ und, da B durch die Schublehre ermittelt worden war, mithin auch zur Bestimmung von C.

Die dritte Gleichung (10) liefert dagegen D.

Zeigen sich bei Prüfung der Beobachtungen durch die erste Gleichung

$$0 = dG + dS - d\Sigma - E dy + F dz$$

Abweichungen, welche nicht zufälligen Fehlern zugeschrieben werden können, sondern ungenauen Werthen von E und F, so wird man nach der Methode der kleinsten Quadrate alle Beobachtungen zur Ableitung verbesserter Werthe von E und F benutzen können und bekommt so durch die Beobachtungen dG, dS, $d\Sigma$, dy und dz eine vollständige Bestimmung der Grössen C, D, E und F.

Setzen wir nun in die Gleichungen (10) die Relationen (5) ein, so gehen diese über in die Formen

$$\left.\begin{array}{l} 0 = dG + (C - D - B)\,dx + (C - B)dy + D dz \\ 0 = -dS + (C - B)\,dx + (E + C - B)\,dy \\ 0 = -d\Sigma + D dx + (F - D)\,dz, \end{array}\right\} \quad (11$$

da $db = 0$ angenommen werden kann.

Weiter bekommen wir aus der zweiten und vierten Gleichung des Systemes (1)

$$\left.\begin{array}{r} dP_2 = D(dx - dz) \\ 0 = D dx + (F - D)\,dz. \end{array}\right\} \quad (12$$

Aus den Gleichungen (11) und (12) ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} M = \frac{dG}{dx} = \frac{FD}{F - D} - \frac{E(C - B)}{E + C - B} \\ N = \frac{dS}{dx} = \left(\frac{FD}{F - D} - \frac{E(C - B)}{E + C - B}\right) : \frac{C - B}{E + C - B} = M : \frac{C - B}{E + C - B} \\ O = \frac{d\Sigma}{dx} = \left(\frac{FD}{F - D} - \frac{E(C - B)}{E + C - B}\right) : \frac{D}{F - D} = M : \frac{D}{F - D} \\ Q = \frac{dP_2}{dx} = \frac{FD}{F - D}. \end{array}\right\} \quad (13$$

Die Constanten M, N, O und Q stellen die Gewichtsänderungen in G, S, Σ und P_2 dar, welche die Bewegung $dx = 1^{cm}$ erzeugen. Wir bezeichnen weiter

$$\frac{E(C - B)}{E + C - B} = -(M - Q) = R \quad (14$$

und erhalten

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{NR}{M} \\ F &= \frac{OQ}{M} \\ D &= \frac{QF}{F+Q} \\ C &= \frac{RE}{E-R} + B. \end{aligned}\right\} \qquad (15$$

Die Grössen E, F, C und D lassen sich demnach auf zwei verschiedenen Wegen ermitteln, wir erhalten sie aus den Grössen

dG, dS, $d\Sigma$, db, dy, dz einmal und aus
dG, dS, $d\Sigma$, dx, dP_2 das zweite Mal.

Bei genauer Arbeit wird man auf beiden Wegen zu denselben Resultaten kommen müssen. Ich bin in der glücklichen Lage gewesen, nach der kurz angeführten Methode wirklich Bestimmungen der Constanten des in Hamburg an der Seewarte functionirenden Barographen vornehmen zu können, habe die Beobachtungen und deren Resultate in der früher schon erwähnten Abhandlung[1]) ausführlich discutirt und muss hier einfach darauf verweisen.

Da der Barograph in der beschriebenen Form von Temperaturänderungen beeinflusst wird, ist es nöthig, mit demselben zur Erzielung scharfer Resultate einen Thermographen zu verbinden, wodurch es möglich wird, an jeder Markirung des Barometerstandes die nöthige Correction anzubringen. Bei meinem Barothermographen ist dies auch wirklich geschehen.

Der Director des physikalischen Centralobservatoriums in St. Petersburg, Prof. Dr. H. Wild, ist wohl der erste gewesen, welcher versucht hat, das Wagebarometer gegen die Einflüsse der Temperatur zu compensiren, um die Combination des Barographen mit einem Thermographen unnöthig zu machen. Er bringt zu diesem Zweck an dem Wagebalken des Barometers ein Ausflussthermometer an, welches die Gewichtsänderungen durch die Schwankungen in der Temperatur immer ausgleichen soll. Ich habe in meiner Abhandlung gezeigt, dass auch mein Barograph compensirt werden kann und vielleicht bequemer und

1) Repertorium Bd. 14 S. 668 ff.

vollständiger als der Barograph von Wild. Wir können aus den Systemen (8) und (11) folgende Gleichung herleiten:

$$0 = A_1\,dx + A_2\,db + A_3\,dG + A_4\,dS + A_5\,d\Sigma + A_6\,dt, \quad (16$$

welche die Abhängigkeit einer der 6 Variabeln von den 5 anderen ausdrückt. Die Bedingungen der Compensation werden dann die Gleichung

$$0 = A_3\,dG + A_4\,dS + A_5\,d\Sigma + A_6\,dt \quad (17$$

geben, und sagt uns diese Gleichung, dass, um die Beziehungen zwischen db und dx von dt zu befreien, Aenderungen in dem Gewicht der Röhre und in den Quecksilbermengen, oder auch nur in einer dieser drei Grössen vorgenommen werden müssen, welche stets die Gleichung (17) realisiren. Man wird nun die Compensation stets dadurch zu erreichen suchen, dass man eine der Grössen G, S oder Σ der Temperaturänderung proportional variirt, und wird man diesen Einrichtungen die Gleichungen

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{A_6}{A_3}; \quad \frac{dS}{dt} = -\frac{A_6}{A_4}; \quad \frac{d\Sigma}{dt} = -\frac{A_6}{A_5}$$

zu Grunde legen müssen. Ich glaube, dass man stets durch Aenderung der Quecksilbermengen am einfachsten wegkommen wird, und habe für den in Hamburg functionirenden Barographen die Bedingungen der Compensation gefunden zu

$$\frac{dS}{dt} = -10{,}9^{gr} \quad \text{oder} \quad \frac{d\Sigma}{dt} = -6{,}5^{gr},$$

was weiter zeigt, dass sich die Anbringung der Compensation am Trog II empfiehlt. Man wird hier für 1° C. Erhöhung der Temperatur $6{,}5^{gr}$ Quecksilber aus dem Trog herausnehmen müssen, und wird dies am besten dadurch geschehen, dass man in das Quecksilber desselben ein passendes Eisengewicht eintauchen lässt, dieses mit einer Metallstange verbindet und die Einrichtung so trifft, dass die Metallstange, bei Erhöhung der Temperatur des Instrumentes um 1°C., dem Eisencylinder eine Bewegung ertheilt, welche den Auftrieb desselben um $6{,}5^{gr}$ vermindert.

Nach einer ganz neuen Seite hin verändert ist die Einrichtung, welche Dr. Sprung[1]) in Hamburg dem Wagebarographen ertheilt. Sprung hängt eine cylindrische Röhre an einen Wagebalken, welcher mit einem Laufgewicht versehen ist, und lässt dieses durch eine mechanische und elektromagnetische Vorrichtung den Aenderungen

1) Oestr. Zeitschrift für Meteorologie Bd. 12 S. 305. — Repertorium Bd. 14 S. 46.

des Gewichtes der Röhre, mithin auch den Aenderungen des Luftdruckes, proportional hin und her bewegen. Dabei bleibt die Röhre nahezu in derselben Lage und wird demnach bei diesem Instrumente die verticale Bewegung der Röhre bei den älteren Barographen in eine horizontale Bewegung umgesetzt. Es ist zweifellos, dass durch diese Vorrichtung der Apparat weit weniger hoch als die anderen Barographen wird, aber er dehnt sich mehr nach einer horizontalen Dimension aus und wird um so länger, je grösser die Bewegungen des Laufgewichtes gemacht werden. Weiter wird der Stift, welcher hier durch mechanische Vorrichtung mit dem Laufgewicht bewegt wird und mit dem Instrumente direct nicht in Verbindung steht, jeden Reibungswiderstand überwinden können und kann demnach auf jedem Papier continuirlich und kräftig die Schwankungen im Luftdruck aufzeichnen. Es sind dies Vorzüge, welche unter Umständen sehr in das Gewicht fallen und den Apparat des Herrn Dr. Sprung anderen gegenüber von Vortheil erscheinen lassen dürften, wenn auch es sich fragt, ob in diesen Fällen nicht der nach anderen Principien construirte Apparat von Dr. Müller in Osnabrück[1]) den Vorzug haben dürfte.

Ob sich der Apparat von Dr. Sprung bewähren wird, wird der Erfahrung überlassen bleiben müssen. Ich kann an seine Vorzüge nicht recht glauben und kann namentlich, von meinem in der Einleitung dargelegten Standpunkte aus, einen Fortschritt nicht erkennen.

Wenn ich demnach einen Barographen mit unbewegtem Rohr für wenig zweckmässig erachte, so scheint mir eine ähnliche Einrichtung zur subjectiven Bestimmung des Luftdruckes vortheilhaft und bequemer als diejenigen Barometer, bei welchen der Luftdruck durch die Barometerhöhe gemessen und nicht gewogen wird.

Man wird ein Barometer dadurch erhalten können, dass man das Rohr an dem einen Schenkel eines zweiarmigen geraden Hebels hängt und an dem anderen Schenkel ein Laufgewicht angreifen lässt. Es kann dieser Schenkel dann mit einer Theilung versehen sein, welche directe Barometerstände angibt, und wird der herrschende Barometerstand derjenige sein, auf welchen das Laufgewicht eingestellt werden muss, um Gleichgewicht zu erzielen. Zweckmässiger erscheint mir aber das in Fig. 2 Taf. XII dargestellte zur directen Bestimmung des Luftdruckes eingerichtete Wagebarometer zu sein. Ich denke mir das

1) Pogg. Ann. Bd. 4 S. 286 (1878).

oben weitere und unten so eng als irgend möglich gemachte Rohr an einem gewöhnlichen Wagebalken angehängt. Das Lager der Schneide kann man sich an einer Säule angebracht denken, welche auf demselben Tische befestigt ist, auf welchem auch der Trog aufruht. Das Gegengewicht besteht aus einer Stange, welche durch ein Loch im Tisch geht, und den über und unter der Tischplatte befindlichen Gewichten. Die letzteren Gewichte werden so schwer gemacht, dass bei 700^{mm} Barometerstand die Wage gerade einspielen würde, und sie verhindern durch ihr Anlegen an den Tisch grosse Bewegungen des Balkens und der Röhre. An der Stange sind weiter Blechscheiben angebracht, auf welche Ringgewichte aufgelegt werden können. Diese Ringgewichte werden von bestimmter Grösse gemacht; so macht man das eine so schwer, dass es gleich der Gewichtszunahme des in unveränderter Stellung befindlichen Rohres bei Zunahme des Barometerstandes um 50^{mm} entspricht, zwei weitere Gewichte sind dann aequivalent Aenderungen im Barometerstande um 20^{mm} und eins um 10^{mm}. Weiter sind Gewichte zu machen entsprechend Aenderungen im Barometerstande um: 5; 2; 2; 1; 0,5; 0,2; 0,2; $0{,}1^{mm}$. Diese 12 Gewichte werden dann ausreichend sein, um den Luftdruck auf $0{,}1^{mm}$ Quecksilbersäule zu bestimmen. Es werden die Zehnergewichte auf die untere Platte gelegt, ebenso die Einergewichte und die Zehntelgewichte auf die zweite Platte. Bleibt noch ein Ausschlag der Wage, so kann dieser sogar direct zur Bestimmung von Hundertelmillimetern benutzt werden, wenn die Theilung vor der Zunge entsprechend gemacht wird. Die Temperaturcorrection kann auch gleich angebracht werden, wenn man sich Gewichte macht, welche die Gewichtsänderungen durch die Temperatur ausgleichen, und das der Temperatur bei der Beobachtung entsprechende Gewicht vor der Einstellung der Wage auflegt. Man kann hier das Barometer so einrichten, dass Jeder, welcher überhaupt mit einer gewöhnlichen Wage umgehen kann, den Luftdruck mit der grössten Schärfe bestimmen kann. Man ist dabei nicht von den Kuppeneinstellungen, Noniusablesungen etc. abhängig, hat keine Differenz der persönlichen Gleichung zwischen verschiedenen Beobachtern zu befürchten, hat keine Correctionen anzubringen; es geben die aufgelegten leicht zu übersehenden Gewichte ohne weiteres den wahren auf 0^{0} reducirten Barometerstand an. Ich glaube, ein solches Instrument wird bequemer sein als die zur Bestimmung der Höhe der Quecksilbersäule eingerichteten Barometer und wird sich bei derselben Genauigkeit



billiger herstellen lassen. Die Theorie des Instrumentes ist sehr einfach. Behalten wir die in Fig. 1 Taf. XII eingeführten Bezeichnungen bei, so gestalten sich die Hauptgleichungen, welche die Bedingungen des Gleichgewichtes ausdrücken, folgendermassen:

$$0 = -P + G + V + Cs - Bw$$
$$0 = -S + M + V + Cs - Bw + Ey.$$

Weiter bestehen zwischen den linearen Grössen die Beziehungen

$$\begin{aligned} s &= b + y + L_1 \\ w &= y + L_2 \\ L_1 &= l_3 - h \\ L_2 &= l_2 + l_2 - h. \end{aligned}$$

Eine Aenderung des Barometerstandes db bei constanter Instrumentaltemperatur ergibt eine Aenderung des Gewichtes dP, welche sich aus den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= -dP + Cds - Bdw \\ 0 &= Cds - Bdw + Edy \\ ds &= db + dy \\ dw &= dy \end{aligned}$$

finden lässt und als Gewichtsänderung, welche die Erhöhung des Barometerstandes um 1[cm] hervorbringt,

$$\frac{dP}{db} = \frac{EC}{E + C - B}$$

ergibt. Bleibt der Luftdruck constant, tritt aber eine Erhöhung der Temperatur um 1°C ein, so verändert sich das Gewicht des Rohres um die Grösse

$$\frac{dP}{dt} = \Big[m(-V + Cl_1 - [C - B]w) + nA_1\Big]\alpha + m(V + 2[P - G] + Cl_2 - Bl)\beta - n(Eh + M + 2A_1)\gamma,$$

wenn wir mit

α den Ausdehnungscoëfficienten des Quecksilbers,

β den linearen Ausdehnungscoëfficienten von Glas,

γ " " " " Eisen

bezeichnen und

$$A_1 = M + Ey$$
$$m = \frac{E}{E + C - B}$$
$$n = \frac{C - B}{E + C - B}$$

setzen. Man sieht, dass $\frac{dP}{dt}$ eine Function von w, y und P oder auch kurz von b ist, da w, y und P als Functionen von b hergeleitet werden können. Wie gross die Veränderlichkeit von $\frac{dP}{dt}$ ist, lässt sich im Allgemeinen nicht angeben, wahrscheinlich wird sie aber in den meisten Fällen vernachlässigt werden können. Bei einem cylindrischen Rohr haben wir

$$V = Cl_1$$

zu setzen, und verschwindet, wenn ausserdem noch $C - B$ sehr klein ist, der Coëfficient von α fast vollständig, ebenso wie der von γ, so dass nur noch die Ausdehnung des Glases eine Gewichtsänderung hervorbringt. Diese ist jedenfalls sehr klein, und sehen wir, dass unter diesen Bedingungen das Instrument wirklich nahezu, aber auch nur nahezu, compensirt ist, jedoch auf Kosten von Quecksilber und der Schneiden des Wagebalkens. Mancherlei Gründe, welche auseinanderzusetzen hier zu weit führen würde, machen es mir wahrscheinlich, dass sich die genannte Form des Wagebarometers vorzüglich für Normalbarometer eignet, und will ich die Meteorologen, in dieser Hinsicht namentlich, auf das einfache Instrument aufmerksam gemacht haben.

B. Das Wagemanometer für Gasdrücke.

In Fig. 3 Taf. XII stellt V_1 ein Gefäss dar, welches mit Luft gefüllt ist, von einer Spannung H, die wir uns in Quecksilbersäule ausgedrückt denken wollen. V_1 braucht man sich nicht unveränderlich vorzustellen, es kann gewissen Veränderungen ausgesetzt sein, und haben wir nur anzunehmen, dass dV_1 gewissen mathematisch darstellbaren Gesetzen unterworfen sei. Von V_1 geht ein beliebig langes enges Rohr nach einem verticalen Rohre D aus Eisen, welches im Innern des Troges EME im Quecksilber heraufragt und den Luftraum der beweglichen Glocke G mit V_1 verbindet. Die Glocke ist an einer Rolle aufgehängt und durch das constante Gewicht P balancirt. Wir bezeichnen mit B, C, D und E die Weiten von Cylindern, durch die Gewichte von Quecksilbersäulen von denselben Durchmessern und 1^{cm} Höhe. E soll ringförmig gerechnet sein, also = vollem Trogquerschnitt — D. y ist die Differenz der beiden Kuppen im Rohr und ausserhalb desselben, und zwar soll dieses y positiv nach oben gerechnet werden. Es ist

leicht ersichtlich, dass y den Minderdruck darstellt, um welchen die Spannung des eingeschlossenen Gases kleiner ist als der Luftdruck, und wird demnach

$$H = b - y \tag{1}$$

sein, wenn wir mit b den Barometerstand bezeichnen.

Auf das Rohr wirken nun vier verticale Drücke ein:

P, das constante Gegengewicht von unten nach oben
$P_1 = Cb$, der Luftdruck von oben nach unten
$P_2 = BH$, der Gasdruck von unten nach oben
$P_3 = (B - C)(b + u)$, der Auftrieb von unten nach oben,

Die Röhre wird demnach im Gleichgewicht sein, wenn

$$0 = P + P_2 + P_3 - G - P_1 \tag{2}$$

ist. Setzen wir die vorhin gefundenen Werthe für P_1, P_2 und P_3 ein, so erhalten wir

$$0 = P - G + BH + (B - C)(b + u) - Cb$$

und unter Berücksichtigung der Relation (1) einfacher

$$0 = P - G - Cy + (B - C)u. \tag{3}$$

Wenn wir zu dieser Gleichung noch die Gleichung für das Gewicht S des ganzen im Apparat befindlichen Quecksilbers und die Beziehungen zwischen den linearen Grössen hinzufügen, so bekommen wir für das Instrument alle Bedingungen des Gleichgewichtes ausgedrückt durch folgendes System:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -P + G + Cy - (B - C)u \\ 0 &= -S + M + (C - D)y - (B - C)u + Ez \\ L &= l_1 + l_2 + \lambda - 2h - r\pi \\ u &= x + z + L. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wir wollen annehmen, dass die Constanten dieser Gleichung für eine bestimmte Temperatur t des Instrumentes bekannt sind, dann werden wir, wenn wir weiter u oder z irgendwie messen können, aus den beiden ersten Gleichungen des Systemes (4) die Grösse von y berechnen können und wird y den Minderdruck des eingeschlossenen Gases, gemessen in Quecksilbersäule von der Temperatur t, bedeuten.

Tritt nun irgend eine Aenderung in der Spannung H des eingeschlossenen Gases, in der Temperatur des Instrumentes und auch im Luftdruck ein, so ändern sich im System (4) alle Grössen,

mit Ausnahme von G, S und P. Wir bekommen dann folgende Differentialgleichungen der Bewegung:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C dy + y dC - (B-C) du - u d(B-C) \\ 0 &= dM + (C-D) dy + y d(C-D) - (B-C) du - u d(B-C) + \\ &\qquad + E dz + z dE \\ du &= dx + dz + dL. \end{aligned}\right\} \quad (5$$

Wir setzen

$$\mu = \alpha - 2\beta; \quad \nu = \alpha - 3\beta,$$

wenn α den Volumenausdehnungscoëfficienten des Quecksilbers, β den Längenausdehnungscoëfficienten aller festen Bestandtheile des Manometers bedeuten, und erhalten

$$dC = -C\mu dt; \quad dB = -B\mu dt; \quad dE = -E\mu dt; \quad dD = -D\mu dt$$
$$dM = -\nu M dt; \quad dL = L\beta dt.$$

Führen wir diese Werthe in die Gleichungen (5) ein und beachten die Grundgleichungen, so gehen die Bewegungsgleichungen in folgende Formen über:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= C dy - (B-C) dx - (B-C) dz - [(P-G)\mu + L(B-C)\beta] dt \\ 0 &= (C-D) dy - (B-C) dx + (E-B+C) dz - (S\mu + [L(B-C)-M]\beta) dt \end{aligned}\right\} \quad (6$$

Wir haben hier zwei Gleichungen mit vier Variabeln; nehmen wir dt und dx als diejenigen an, welche durch Beobachtungen am Instrument gefunden werden können, so wird das System (6) zwei neue Gleichungen liefern:

$$\left.\begin{aligned} dy &= \text{Const}_1\, dx + \text{Const}_2\, dt \\ dz &= \text{Const}_3\, dx + \text{Const}_4\, dt. \end{aligned}\right\} \quad (7$$

Denken wir uns nun die Abscissenachse der Ordinaten x derart gelegt, dass für

$$y = 0 \text{ und } t = 0 \text{ auch } x = 0$$

ist und dass in diesem Falle die Höhe des Quecksilbers im Troge den Werth z_0 besitzt, so werden auch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} y &= \text{Const}_1\, x + \text{Const}_2\, t \\ z &= z_0 + \text{Const}_3\, x + \text{Const}_4\, t \end{aligned}\right\} \quad (8$$

richtig sein und wir werden so im Stande sein, aus den Ordinaten des durch den Stift des Instrumentes aufgezeichneten Diagrammes und der Temperatur des Manometers die Werthe y und z berechnen zu können. Es bedeutet y den Minderdruck des eingeschlossenen Gases,

gemessen in Quecksilbersäule von t^0, und muss daher mit $(1+\alpha t)$ dividirt werden, um diesen Druck in Quecksilbersäule von der Temperatur des Eispunktes zu erhalten. Bezeichnen wir diese mit y_0, so ist

$$y_0 = \frac{y}{1+\alpha t} = y(1-\alpha t) \tag{9}$$

und wir bekommen

$$H_0 = b_0 - y_0. \tag{10}$$

Da wir demnach durch die beobachteten Werthe x und t den Druck des eingeschlossenen Gases in Quecksilbersäule von der Temperatur des schmelzenden Eises erhalten, so wird das Instrument als ein Manometer für Gasdrücke in der vollsten Bedeutung des Wortes bezeichnet und verwendet werden können. Es gehört dasselbe aber zu den sogenannten offenen Manometern, und erfordert demnach jedesmal eine Bestimmung des Barometerstandes, wenn es sich um die Ermittelung des absoluten Druckes handelt. Es wird dieses Instrument sowohl zur directen subjectiven Beobachtung als auch für autographe Registrirungen sich eignen und wird die Aenderungen im Manometerstand entweder durch seine Bewegungen, oder durch die Aenderungen seines Gewichtes, in unveränderter Stellung, bestimmen lassen.

Das Volumen der Luft im Apparate setzt sich zusammen aus der im Gefässe v_1 und aus der im Manometer, und wollen wir die Grenze zwischen v_1 und v_2 uns als in der Mitte des Zuleitungsrohres liegend denken. Es ist dann

$$v_2 = v' - (u+y)\,c - [l_3 - (y+z]\,\delta, \tag{11}$$

wenn wir mit

v' das Volumen der ganzen Glocke und ausserdem des Hohlraumes der Rohre D (diesen also zweimal gerechnet in v_2),

c und δ die Querschnitte der Röhre in Flächenmass

bezeichnen.

Im Allgemeinen werden die beiden Volumina nicht dieselbe Temperatur haben. Bezeichnen wir diese Temperaturen mit t_1 und t_2 und mit Γ eine Constante, so kommt für die eingeschlossene Luft noch folgende Gleichung hinzu, welche stets realisirt sein muss, falls die Luft absolut trocken ist:

$$\left(\frac{v_1}{T_1} + \frac{v_2}{T_2}\right) = \frac{\Gamma}{H_0}.$$

T_1 und T_2 sind hier die absoluten Temperaturen.

C. Das Wagemanometer für Druckhöhe von Flüssigkeiten.

In Fig. 4 Taf. XII habe ich gezeigt, wie man ein Wagemanometer zur Bestimmung der Druckhöhe einer Flüssigkeit und sogar zur Messung der Aenderungen im Gewicht derselben verwenden kann.

Wir haben ein Gefäss HF_1, in welchem sich irgend eine Flüssigkeit befindet. Von diesem Gefäss aus geht eine Röhre nach dem Rohr D im Manometer, so dass auch der Raum in der beweglichen Glocke über dem Quecksilber mit derselben Flüssigkeit ausgefüllt ist.

Ueber die Bedeutung der in Fig. 4 eingeführten Bezeichnungen haben wir nur wenig zuzufügen.

B, C, D und E bedeuten wie früher Cylinderweiten ausgedrückt durch das Gewicht von Quecksilbersäulen von 1cm Höhe.

B_1, C_1, D_1, F_1 sind dagegen Weiten derselben Cylinder, aber dargestellt durch Gewichte von Flüssigkeitssäulen von 1cm Höhe.

b, b_1 und b_2 sind Barometerstände in Quecksilbersäule in den verschiedenen Niveaux.

W ist das Gewicht der Flüssigkeit im Gefäss HF_1,

V das Gewicht der Flüssigkeit, welche in die ganze leer gedachte bewegliche Röhre und in die Hohlräume der Zuleitungsröhren gehen würde.

M bedeutet das Gewicht Quecksilber in dem unteren Theil des Troges,

S die ganze Quecksilbermenge im Apparat.

G ist das Gewicht der leeren Röhre und P das constante Gegengewicht.

ϱ ist die Reductionszahl zur Umrechnung der Druckhöhe der Flüssigkeit in entsprechende Druckhöhe von Quecksilber; man erhält dieselbe durch Division der Dichte der Flüssigkeit durch die Dichte des Quecksilbers.

h bedeutet die Druckhöhe der Flüssigkeit im Niveau BB und zwar reducirt auf Quecksilbersäule, während

H die Druckhöhe der Flüssigkeit im Gefäss HF_1 ist.

y, x und z sollen nach oben positiv gerechnet werden, und ist ihre Bedeutung, wie die der übrigen Grössen zweifellos.

k ist die Abnahme des Luftdruckes für 1cm Höhe in Quecksilbersäule.

Das Instrument wird nun im Gleichgewicht sein, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -P + G + P_1 - P_2 - P_3\\
0 &= -P_4 + P_5\\
0 &= -S + M + (C-D)y - (B-C)u + Ez\\
0 &= -W + V + F_1 H - D_1 l_3 - D_1(-y-z) - C_1(u+y).
\end{aligned}\right\} \quad (1$$

Wir bekommen aber

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= Bb_2\\
P_2 &= C(b_2+h)\\
P_3 &= (B-C)(b+u)\\
P_4 &= (C-D)(b-y)\\
P_5 &= (C-D)[b_1 + \varrho(H+l_5-y-z)],
\end{aligned}\right\} \quad (2$$

wodurch die Grundgleichungen des Gleichgewichtes übergehen in die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -P+G+(B-C)(b_2-b)-Ch-(B-C)u\\
0 &= \varrho l_5 + (b_1-b) + (1-\varrho)y - \varrho z + \varrho H\\
0 &= -S+M - (B-C)u + (C-D)y + Ez\\
0 &= -W+V-D_1 l_3 - C_1 u - (C_1-D_1)y + D_1 z + F_1 H.
\end{aligned}\right\} \quad (3$$

Die Beziehungen zwischen den linearen Grössen werden durch das folgende System von Gleichungen ausgedrückt:

$$\left.\begin{aligned}
L_1 &= l_1 + l_2 + \lambda - 2l_4 - r\pi\\
L_2 &= L_1 + l_5 - l_1\\
u &= L_1 + x + z\\
h &= \varrho H + \varrho L_2 + \varrho x,
\end{aligned}\right\} \quad (4$$

und kommen hierzu endlich noch die Gleichungen für die Aenderungen des Luftdruckes in den verschiedenen Niveaux

$$\left.\begin{aligned}
b_2 - b &= -k(l_1 - u)\\
b_1 - b &= -k(H + l_5 - z).
\end{aligned}\right\} \quad (5$$

Aendert sich im Gefässe $F_1 H$ die Menge der Flüssigkeit, so wird dies verbunden sein mit einer Aenderung der Druckhöhe und demnach mit einer Bewegung des Manometers. Wir können die Differentialgleichungen dieser Bewegung leicht ableiten und bekommen

$$\left.\begin{aligned}
0 &= (B-C)d(b_2-b) - Cdh - (B-C)du\\
0 &= d(b_1-b) + (1-\varrho)dy - \varrho dz + \varrho dH\\
0 &= -(B-C)du + (C-D)dy + Edz\\
0 &= -dW - C_1 du - (C_1-D_1)dy + D_1 dz + F_1 dH
\end{aligned}\right\} \quad (6$$

und

$$\left.\begin{aligned} du &= dx + dz \\ dh &= \varrho dH + \varrho dx \\ d(b_2 - b) &= k dx + k dz \\ d(b_1 - b) &= - k dH + k dz. \end{aligned}\right\} \quad (7$$

Wir haben hier 8 Gleichungen und in diesen 9 Variable, werden daher stets 8 derselben als Function der 9. darstellen können.

In dem Falle, dass wir F_2 als unendlich gross gegenüber den anderen Durchmessern betrachten können, wird

$$dH = \frac{dW}{F}$$

zu setzen sein, und fällt damit die letzte Gleichung des Systemes (6) weg, wodurch sich die Zahl der Variabeln auf 8 und die der Gleichungen auf 7 reducirt.

Wir sehen, dass Aenderungen im Luftdruck selbst auf das Instrument ohne Einfluss sind. Dagegen werden Temperaturänderungen sich bemerklich machen, wird man dieselben aber durch Rechnung finden und leicht als Correctionen anbringen können. Höchst wahrscheinlich werden diese Temperatureinflüsse sehr klein sein, wird aber eine Untersuchung dieses Einflusses im Allgemeinen keinen Zweck haben.

Das Instrument kann, wie die Gleichungen (6) zeigen, benutzt werden zur Messung der Aenderung des Gewichtes einer Flüssigkeit in einem Gefässe, oder auch, wenn dieses Gefäss sehr weit ist, direct zur Messung der Aenderungen der Höhe der Flüssigkeit in demselben.

II. Die Einrichtungen, durch welche die Aenderungen in den meteorologischen Elementen in Aenderung der Spannung eingeschlossener Luft oder Aenderung der Druckhöhe einer Flüssigkeit umgewandelt und so durch Wagemanometer messbar und registrirbar gemacht werden können.

A. Thermometer.

Die Verwendung eines Wagemanometers zur Bestimmung der Temperatur der Luft bietet die wenigsten Schwierigkeiten dar, da Gefässe, in welchen sich ein Gas befindet, dessen Aenderung in Volumen und Spannung gemessen werden kann, zur Bestimmung von Temperaturen schon längst in Gebrauch sind und sogar die ältesten Thermometer gewesen zu sein scheinen.

Die Einrichtung, welche ich dem zur Bestimmung der Temperatur der Atmosphäre bestimmten Thermometer gegeben habe, ist schon in der Beschreibung meines Barothermographen[1]) gegeben worden, und kann Fig. 3 Taf. XII direct als Abbildung desselben betrachtet werden. Es ist dann V_1, welches wir früher (Seite 230) als einen beliebigen Luftraum auffassten, das Thermometergefäss, welches der Atmosphäre den Regeln, welche über Aufstellung von Thermometern gelten, entsprechend exponirt ist und so die Temperaturänderungen derselben möglichst getreu annimmt. Das Gefäss des in Hamburg functionirenden Thermographen hat circa 5 Liter Rauminhalt und besteht aus Kupfer, die Zuleitung zum Manometer aus starkwandigem Bleirohr.

Die Theorie des Wagemanometers für den Druck eingeschlossener Luft, welche wir auf Seite 231 ff. besprochen haben, lehrte uns, dass eine Bewegung des Instrumentes in x eintritt, wenn sich y ändert, das ist die Differenz zwischen dem Luftdruck und dem Druck der im Apparat befindlichen Luft, und ist

$$dy = db - dH.$$

Eine Aenderung in H bringt aber jede Aenderung in den Temperaturen im Instrument hervor, also die Aenderung der Temperatur der Atmosphäre und des Manometers, so dass wir drei Ursachen der Bewegung in Rücksicht zu ziehen haben. Die Aenderungen im Barometerstande folgen nun stets aus dem Barogramm des mit dem Apparat verbundenen Barographen, die Aenderungen in der Temperatur des Manometers kann man durch einen besonderen Thermographen bestimmen; so wird man die Bewegungen unseres Thermographen, hervorgebracht durch diese zwei Ursachen, berechnen können und nach Abzug derselben von der gemessenen Bewegung des Instrumentes die durch Aenderung in der Temperatur der Atmosphäre erzeugte Bewegung und dadurch diese Temperaturänderung selbst erhalten können.

Ich will jetzt auf die Theorie dieses Instrumentes specieller eingehen und unter Anwendung derselben auf das Hamburger Instrument die Reductionsgleichungen für dasselbe ableiten.

Das Instrument zerfällt in zwei Theile, die gesondert behandelt behandelt werden müssen:

1) das Manometer für sich,

2) das Manometer als Thermometer.

1) Repertorium Bd. 14 S. 480.



Für das Manometer für sich hatten wir (Seite 232) die Differentialgleichungen der Bewegung gefunden:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= Cdy - (B-C)dx - (B-C)dz - [(P-G)\mu + L(B-C)\beta]dt \\ 0 &= (C-D)dy - (B-C)dx + (E-B+C)dz - (S\mu + [L(B-C)-M]\beta)dt \end{aligned}\right\} \quad (1$$

Die bewegliche Röhre war mit Wasser ausgewogen worden, der Trog mit Quecksilber, die äusseren Durchmesser der beweglichen Röhre und des Zuleitungsrohres waren dagegen mit der Schublehre gemessen worden. Es ergaben diese Messungen

$$B = 102{,}93^{gr};\quad C = 82{,}99^{gr};\quad D = 27{,}2^{gr};\quad E = 1055^{gr}$$
$$M = 18875^{gr};\quad P - G = -837{,}5^{gr};\quad L = 39^{cm}$$
$$S = 21203^{gr}.$$

Setzen wir weiter

$$\alpha = 0{,}00018;\quad \beta = 0{,}00001,$$

so bekommen wir die Gleichungen (1) in diesem Falle numerisch:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 82{,}99\,dy - 19{,}94\,dx - 19{,}94\,dz + 0{,}126\,dt \\ 0 &= 55{,}7\,dy - 19{,}94\,dx + 1035\,dz - 3{,}212\,dt \end{aligned}\right\} \quad (2$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} dz &= 0{,}025868\,dy + 0{,}003164\,dt \\ dz &= 0{,}00625\,dx + 0{,}003145\,dt \\ dy &= 0{,}2418\,dx - 0{,}00076\,dt \end{aligned}\right\} \begin{matrix} \text{Centimeter} \\ \text{Centigrade.} \end{matrix}$$

Sehen wir von dem Temperatureinfluss ab, so ist also

$$dy = 0{,}242\,dx \quad \text{oder} \quad dx = 4{,}13\,dy,$$

d. h. die Aenderung des relativen Manometerstandes um 1^{cm} bewegt das Rohr 4^{cm}. Sind wir im Stande, die Ordinaten des Diagrammes des Manometers auf $0{,}01^{cm}$ genau zu bestimmen, so können wir demnach die relativen Manometerstände mit diesem Instrumente bis auf $\pm\, 0{,}002^{cm}$ genau ermitteln. Da Luft von atmosphärischer Dichte bei constantem Volumen eine Zunahme der Spannung um circa $0{,}25^{cm}$ pro 1^{0} C. Temperaturerhöhung erhält, würde demnach das Instrument im Stande sein, noch $0{,}008^{0}$ C. Temperaturänderung mit Sicherheit anzugeben. Wir werden aber die Sicherheit in der Bestimmung von dx auf höchstens $\pm\, 0{,}05^{cm}$ annehmen dürfen, und wird daraus sich die Sicherheit der Temperaturbestimmung auf etwa $\pm\, 0{,}04^{0}$ C. ergeben.

Man hat es in der Hand, die Empfindlichkeit des Manometers beliebig zu verändern. Aus den Gleichungen (1) findet man leicht allgemein

$$dy = \frac{E(B-C)}{EC-(B-C)D}\,dx \quad (4$$

und sieht daraus, dass bei grossem Trogquerschnitte E und enger Zuleitungsröhre D, also wenn E sehr gross und D klein genommen wird, sich die Gleichung (4) sehr der Form

$$dy = \frac{B - C}{C} dx \Big\} \qquad (5$$

nähert. Es hängt also die Empfindlichkeit des Manometers bloss von dem ringförmigen Querschnitt und der lichten Weite der Röhre ab und wird um so grösser, je kleiner $(B - C)$ gegenüber C ist.

Der Einfluss der Temperatur auf das Manometer ist gering, beträgt aber doch pro 1° C. circa $0{,}01^{mm}$ und wird überall da, wo noch Hundertstel eines Millimeters berücksichtigt werden sollen, in Rechnung zu ziehen sein.

Das y, welches man nach der Gleichung

$$y = 0{,}2418\,x - 0{,}00076\,t \qquad (6$$

erhält, gibt aber den Manometerstand in Quecksilbersäule von t^0, und müssen wir, um denselben in dem üblichen Masse der Quecksilbersäule von 0° C. zu erhalten, y noch mit $(1 - 0{,}00018\,t)$ multipliciren, wodurch wir erhalten

$$y_0 = y\,(1 - 0{,}00018\,t) = 0{,}2418\,x - 0{,}00076\,t - 0{,}000044\,xt. \quad (7$$

Es wird hier y_0 der auf Null reducirte Manometerstand sein, wenn das Instrument so eingerichtet ist, dass bei $x = 0$ und $t = 0$ die Kuppe im Rohr genau so hoch steht wie ausserhalb desselben.

Das Manometer als Thermometer.

Wir wollen vorläufig den Fall betrachten, dass die Temperatur des ganzen Instrumentes an allen Stellen dieselbe sei und sich auch überall gleichmässig ändere. Ist dann v das Volumen der ganzen Luft im Apparat, H_0 die Spannung derselben in Quecksilbersäule von 0° ausgedrückt, T die absolute Temperatur und Γ eine Constante, so ist der Zustand der eingeschlossenen Luft gegeben durch die Gleichung

$$v H_0 = \Gamma T. \qquad (8$$

Wir haben hierin zu setzen

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= b_0 - y_0 = b_0 - 0{,}2418\,x + 0{,}00076\,t + 0{,}000044\,xt \\ T &= 272{,}86 + t. \end{aligned}\right\} \qquad (9$$

Das Volumen v setzt sich zusammen aus dem Volumen des Gefässes v_1 und dem Volumen der Luft im Manometer v_2.

Wir bekommen nach Gleichung (11) Seite 233

$$v = v_1 + v_2 = v_1 + v' - (u + y)\, c - (l_3 - y - z)\, \delta. \qquad (10$$

Differenziren wir die Gleichung (10) so bekommen wir

$$dv = dv_1 + dv' - (u + y)\, dc - c du - c dy - (l_3 - y - z)\, d\delta - \delta dl_3 + \delta dy + \delta dz.$$

Bezeichnen wir mit γ den Ausdehnungscoëfficienten im Volumen des Thermometergefässes und behalten die auf Seite 231 bis 233 gegebenen Beziehungen und Bezeichnungen bei, so wird

$$dv_1 = v_1 \gamma dt;\; dv' = 3\beta v' dt;\; dc = 2\beta c dt;\; d\delta = 2\beta \delta dt;\; du = dx + dz + L\beta dt.$$

Setzen wir diese Werthe in die Differentialgleichung ein und beachten die Grundgleichung (10), so erhalten wir

$$dv = [v_1 \gamma + 2 v_2 \beta + (v' - c L - \delta l_3)\, \beta]\, dt - c dx - (c - \delta)\, dy - (c - \delta)\, dz.$$

v_2 ist eine Function von x, ist aber klein, und sind namentlich die Veränderungen desselben, v_1 gegenüber, verschwindend, so dass wir dasselbe constant annehmen können, wodurch aber die Gleichung sofort integrabel wird.

Wir bezeichnen mit v_0 das Volumen der Luft im Apparat bei $t = x = y = 0$ und $z = z_0$ und erhalten

$$v_2 = v_0 - v_1$$

und

$$v = v_0 + [v_1 \gamma + (v_0 - v_1) 2\beta + (v' - c L - \delta l_3)\, \beta]\, t - cx - (c - \delta) y - (c - \delta)(z - z_0). \quad (11$$

Die Messungen an dem Hamburger Thermographen gaben

$$v_0 = 5547^{\text{ccm}};\quad v_1 = 5148^{\text{ccm}};\quad v' = 679^{\text{ccm}};\quad L = 39^{\text{cm}};\quad l_3 = 15^{\text{cm}};$$
$$c = 6{,}104^{\text{qcm}};\quad \delta = 2{,}01^{\text{qcm}},$$

und wurden weiter, da das Thermometergefäss aus Kupfer, das Manometer aber aus Glas und Eisen besteht,

$$\gamma = 0{,}00005;\quad \beta = 0{,}00001$$

angenommen.

Beachten wir noch, dass wir für y und z nach den Differentialgleichungen auf Seite 238 setzen können

$$y = 0{,}2418\ x - 0{,}00076\ t$$
$$z - z_0 = 0{,}00625\, x + 0{,}003145\, t,$$

so folgt nach Gleichung (11) für v die numerische Gleichung

$$v = 5547 - 7{,}121\, x + 0{,}26\, t \text{ (Cubikcentimeter)}. \qquad (12$$

Eine Beobachtung, bei welcher das Thermometergefäss im Eis lag, zeigte, dass bei einem Barometerstand von $75{,}51^{\text{cm}}$ und 0° C.

Temperatur des Instrumentes die Spannung der Luft im Apparat genau gleich dem Luftdrucke sei, dass also für

$$t = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = z_0,\ v = v_0:$$
$$H = 75{,}51^{\text{cm}}$$

ist. Gemäss der Gleichung (8) bekommen wir so

$$\Gamma = \frac{v_0 H_0}{272{,}86} = \frac{5547 \times 75{,}51}{272{,}86} = 1535{,}07 \qquad (13$$

und endlich, wenn

Δb die Abweichung des Barometerstandes von $75{,}51^{\text{cm}}$ bedeutet, also

$$b_0 = 75{,}51 + \Delta b$$

zu setzen ist:

$$H_0 = (75{,}51 + \Delta b - 0{,}2418x + 0{,}00076t + 0{,}000044xt)^{\text{cm}}. \quad (14$$

Wir bekommen so endlich nach den Gleichungen (8), (11), (12), (13)

$$T = \frac{75{,}51 + \Delta b - 0{,}2418x + 0{,}00076t + 0{,}000044xt)(5547 - 7{,}121x + 0{,}26t)}{1535{,}07}$$

oder

$$T = 272{,}86 + 3{,}6135\Delta b - 1{,}2240x + 0{,}0155t + 0{,}00011xt - \\ - 0{,}00464x\Delta b + 0{,}00112x^2 + \cdots \quad (15$$

oder

$$T_1 = 277{,}1 + 3{,}6702\Delta b - 1{,}2432x + 0{,}00011xt - 0{,}0047x\Delta b + \\ + 0{,}00114x^2 + \cdots \quad (16$$

und daraus endlich auch

$$x = -0{,}8044t + 2{,}9523\Delta b + 0{,}00009xt - 0{,}0038\Delta bx + 0{,}00092x^2. \ (17$$

Die Bedeutung von T_1 in Gleichung (16) ergibt sich folgendermassen:

Wenn wir das Glied $0{,}0155t$ in Gleichung (15) auf die linke Seite nehmen, so bekommen wir

$$T - 0{,}0155t = 272{,}86 + t - 0{,}0155t = 0{,}9845(277{,}1 + t) = 0{,}9845T_1. \ (18$$

Beachtet man nun, dass in Gleichung (16) ausser T_1 nur noch ein Glied mit t vorkommt und dieser Werth $0{,}00011xt$ nur in den seltensten Fällen einen Maximalwerth von 0,1 ° C. erreichen wird, diese Grösse aber bei der praktischen Bestimmung der Lufttemperatur, um welche es sich ja allein hier handelt, nach meiner Meinung vernachlässigt werden kann, so bekommen wir sehr einfach

$$T_1 = 277{,}1 + 3{,}6702\Delta b - 1{,}2432x - 0{,}0047\Delta bx + 0{,}00114x^2. \quad (19$$

Wir können T_1 als eine absolute Temperatur auffassen, bei welcher der Nullpunkt um etwa 4° tiefer gelegt ist. Es hat dies die Bedeutung, dass wir bei dem in Hamburg functionirenden Instrumente alle Ausdehnung der flüssigen und festen Körper vernachlässigen können, wenn wir nur den Ausdehnungscoëfficienten der Luft von 0 bis 1° C. nicht 0,003665, sondern kleiner $= \frac{1}{277,1} = 0,00361$ in Rechnung bringen. Dieser die scheinbare Ausdehnung der Luft im Instrument darstellende Coëfficient hat natürlich nur für das betreffende Instrument Giltigkeit und muss für jedes andere Instrument besonders abgeleitet werden.

Die Resultate, zu denen wir so gekommen sind, haben grosse Wichtigkeit, sie helfen die Theorie des Instrumentes wesentlich vereinfachen.

Wir können alle Formeln vereinfachen in folgende:

$$\left.\begin{aligned} vH &= \Gamma(277,1 + t) \\ v &= v_0 - ox \\ H &= b_0 + \Delta b - mx. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

und bedeuten darin

v das Volumen der Luft im Apparat in Cubikcentimetern,
H deren Spannung in Centimetern 0° warmer Quecksilbersäule,
v_0 und b_0 Volumen und Druck der eingeschlossenen Luft bei $t = 0$ und $x = 0$.
$\Gamma = \frac{v_0 b_0}{277,1}$ ist die Constante des Apparates,
o die Aenderung des Luftvolumens für $x = 1^{\text{cm}}$,
m die Aenderung des relativen Manometerstandes für $x = 1^{\text{cm}}$,
Δb die Abweichung des herrschenden Barometerstandes von b_0.

Wir bekommen aus den Gleichungen (20) zunächst die Differentialgleichung

$$\left.\begin{aligned} Hdv + vdH &= \Gamma dt \\ dv &= -odx \\ dH &= db - mdx \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

und daraus weiter die Gleichung

$$-(oH + vm)\,dx + vdb - \Gamma dt = 0. \tag{22}$$

Bezeichnen wir mit

$\varphi = \frac{dx}{db}$ die Bewegung des Rohres pro 1 cm Aenderung im Barometerstand,

$\chi = \frac{dx}{dt}$ die Bewegung desselben für 1° C. Aenderung in der Temperatur, so bekommen wir aus Gleichung (22)

$$\varphi = \frac{v}{oH + mv} = \frac{v_0 - ox}{(ob_0 + mv_0) + o\Delta b - 2omx} \qquad (23$$

$$\chi = -\frac{\Gamma}{oH + mv} = -\frac{\Gamma}{(ob_0 + mv_0) + o\Delta b - 2omx} =$$
$$= -\frac{0{,}00361\, b_0 v_0}{(ob_0 + mv_0) + o\Delta b - 2omx}. \qquad (24$$

Die Gleichung (23) lehrt uns zunächst, dass die durch den Luftdruck erzeugten Bewegungen proportional mit dem Luftvolumen wachsen und Functionen von x und Δb sind. Der Werth φ erreicht für $o : v =$ Null seinen Maximalwerth $1 : m$ und wird dabei constant.

Aus Gleichung (24) sehen wir, dass dagegen die durch Temperaturänderung erzeugten Bewegungen von b_0 abhängig sind und um so grösser sind, je mehr Luft sich im Instrumente befindet. Auch χ ist eine Function von x und Δb und wird wahrscheinlich veränderlicher sein als φ.

χ wird constant, wenn der Quotient $o : v$ als gleich Null betrachtet werden kann, und erreicht dann den Werth $b_0{}^{cm} : 277{,}1$.

Die Bedingungen, welche wir erfüllen müssen, wenn wir grosse und den bewegenden Ursachen proportionale Bewegungen haben wollen, bestehen demnach lediglich darin, dass wir möglichst viel Luft in einem sehr grossen Gefäss mit dem Manometer in Verbindung zu bringen haben. Zur Berechnung der Temperatur aus den beobachteten Ordinaten des Thermogrammes und den dabei stattgehabten Barometerständen werden wir die nöthige Formel durch Auflösung der Gleichung

$$(v_0 - ox)(b_0 + \Delta b - mx) = \Gamma(277{,}1 + t),$$

welche wir aus den Gleichungen (20) erhalten, bekommen. Wir erhalten

$$t = \frac{v_0}{\Gamma}\Delta b - \frac{v_0 m + ob_0}{\Gamma} x - \frac{o}{\Gamma} x\Delta b + \frac{om}{\Gamma} x^2 \qquad (25$$

und

$$x = \frac{v_0}{v_0 m + ob_0}\Delta b - \frac{\Gamma}{v_0 m + ob_0} t - \frac{o}{v_0 m + ob_0} x\Delta b + \frac{om}{v_0 m + ob_0} x^2. \qquad (26$$

In den Gleichungen (23) bis (26) kommen folgende zu bestimmende Constanten vor: m, o, v_0, b_0 und Γ.

Für m und o haben wir die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{E(B-C)}{EC-(B-C)D} \\ o &= c+(c-\delta)\frac{E+D}{E}m. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

E wird man durch Auswägen des Troges mit Quecksilber bestimmen und C durch Auswägen der Röhre ebenfalls mit Quecksilber.

D wird am einfachsten durch Messung mit der Schublehre bestimmt, namentlich wenn dasselbe klein ist, oder man wägt erst den Trog ohne das Zuleitungsrohr und dann noch einmal mit demselben aus und bekommt so die Werthe $E+D$ und E, woraus sich D leicht findet.

$B-C$ wird man am einfachsten und genau bei der Aufstellung des Apparates ermitteln. Es empfiehlt sich, in der Zuleitungsröhre irgendwo einen Dreiwegehahn anzubringen (Fig. 3). Durch diesen Hahn kann entweder das Gefäss v_1 allein mit der Atmosphäre in Verbindung gebracht oder abgeschlossen werden, oder das Manometer allein, oder man kann alle beide mit der Atmosphäre in Communication bringen, oder beide unter sich verbinden und von der Atmosphäre abschliessen, oder endlich alle Verbindungen unterbrechen. Es wird dann bei der Aufstellung zunächst die Probe der Dichtheit vorgenommen, dann das Gefäss v_1 sorgfältig ausgetrocknet, mit trockener Luft gefüllt und dann abgeschlossen. Man stellt den Hahn so, dass nun nur der Luftraum vom Manometer mit der Atmosphäre communicirt, und bringt die Röhre in das Gleichgewicht, so dass sie etwa zur Hälfte in das Quecksilber taucht und dabei der Markirstift auf dem Nullpunkt der Ordinaten steht. Es ist dann $y=0$ und $x=0$. Legt man dann Gewichte auf und beobachtet die Einsenkung der Röhre, so gibt der Quotient aus Belastung durch Einsenkung direct den Werth $(B-C)$. Bringt man am Hahn ein gewöhnliches Manometer an und ändert durch Saugen oder Lufteinblasen die Menge derselben im Manometer, so kann man direct den Werth m bestimmen. Durch Abschliessen des Manometers und Auflegen von Gewichten kann man das Volumen der eingeschlossenen Luft ändern, die Druckänderung messen und wird daraus, wenn nur die Temperatur constant

erhalten ist, den Werth von o herleiten können. Es sind jedoch diese Messungen nicht absolut nöthig und werden, wenn nur $B - C$ scharf bestimmt ist, die Werthe von m und o sich mit genügender Sicherheit aus den Gleichungen (27) ergeben. Wenn ein Hahn angebracht ist, die Röhre bei Communication des Innern des Manometers mit der Atmosphäre in das Gleichgewicht gebracht wurde, so dass $y = 0$ auch $x = 0$ entspricht, so wird das Volumen v_0 ohne weiteres gleich dem Volumen der Luft im Manometer, den Zuleitungsröhren und in v_1 sein. Das Volumen von v_1 und den Zuleitungsröhren lässt sich leicht durch Auswägen dieser Räume mit Wasser ermitteln, wobei man das etwa noch vorhandene Luftquantum durch die Volumenänderung desselben durch Druck bestimmen muss. Das Volumen der Luft in der beweglichen Röhre in ihrer Gleichgewichtsstellung wird durch das zur Bestimmung von C so wie so nöthige Auswägen mit mehr als hinreichender Genauigkeit gegeben sein, es wird demnach auch v_0 ohne Schwierigkeit sich bestimmen lassen.

So bleiben nur noch b_0 und Γ übrig, scheinbar zwei Constante, in Wirklichkeit aber nur eine, da

$$\Gamma = \frac{v_0 b_0}{277,1} \tag{28}$$

gefunden worden war. Nun ist aber jederzeit

$$\Gamma = \left(\frac{v_1}{T_1} + \frac{v_2}{T_2} + \frac{v_3}{T_3} + \cdots\right) H, \tag{29}$$

wenn wir mit v_1, v_2, $v_3 \cdots$ beliebige Theilvolumina des endgiltig aufgestellten Apparates und mit T_1, T_2, T_3 etc. deren absolute Temperaturen $(277,1 + t)$ bezeichnen. Um Γ zu bestimmen, legen wir am besten das Thermometergefäss in Wasser oder Eis, oder befestigen wenigstens mehrere Thermometer mit den Kugeln anliegend an demselben, wenn es in der Luft sich befindet. Wir suchen die Temperatur des Manometers möglichst genau zu messen, vielleicht auch, wenn dieselben wesentlich verschieden sind, die Temperaturen einzelner Stücke der Zuleitungsröhren, und beobachten zu bestimmten Momenten alle Thermometer und die zugehörigen Werthe von x und b. Wir bekommen so die Temperaturen T, die Volumina v und $H = b - mx$. Jede Beobachtung gibt nach Gleichung (29) einen Werth von Γ, und kann man dieses demnach mit der erforderlichen Schärfe leicht ermitteln. Sowie aber Γ bekannt ist, wird auch b_0 sich aus Gleichung (28)

finden lassen. Wir sehen so, dass die zur Ableitung der Reductionsgleichung nöthigen Werthe sich leicht und rasch finden lassen und, was wesentlich ist, keine vergleichenden Beobachtungen erfordern, sondern bei constanten Temperaturen der Atmosphäre genau so gut ermittelt werden können, wie bei veränderlichen.

Bei dem in Hamburg functionirenden Apparate wurde gefunden

$$v_0 = 5547^{\text{ccm}},\ b_0 = 75{,}51^{\text{cm}},\ m = 0{,}2418,\ o = 7{,}121,$$

und ergibt sich daraus

$$\Gamma = \frac{v_0\, b_0}{277{,}1} = 1511{,}1.$$

Wir bekommen mit diesen Werthen

$$\varphi = \frac{5547 - 7{,}121\,x}{1879{,}0 + 7{,}121\,\varDelta b - 3{,}444\,x} = 2{,}9521 + 0{,}00162\,x - 0{,}0112\,\varDelta b$$

$$\chi = -\frac{1511{,}1}{1879{,}0 + 7{,}121\,\varDelta b - 3{,}444\,x} = -0{,}8044 - 0{,}001474\,x + 0{,}00305\,\varDelta b.$$

Das Rohr bewegt sich demnach $2{,}95^{\text{cm}}$ nach unten, wenn das Barometer um 1^{cm} steigt, während die Erhöhung der Temperatur um 1^0 C. ein Aufsteigen des Rohres von $8{,}04^{\text{mm}}$ bewirkt. Setzen wir in Hamburg die Schwankungen der Temperatur etwa $= \pm\ 30^0$ C. von 0^0 an und die Schwankung in $\varDelta b$ zu $\pm\ 4^{\text{cm}}$, so bekommen wir als grösste Abweichung der Röhre von ihrer Normalstellung circa 36^{cm} und die totale Bewegung derselben demnach zu circa 70^{cm}.

Da v_1 verhältnissmässig gross gegen o ist, ist die Veränderlichkeit von φ und χ nicht bedeutend und kann bei φ fast vernachlässigt werden. Bei χ beträgt sie circa $0{,}06^{\text{cm}}$ im Maximum, d. h. die Länge des Grades ist bei sehr niederen Temperaturen und hohen Barometerständen etwa $0{,}86^{\text{cm}}$, dagegen bei hohen Temperaturen und niederem Luftdruck nur $0{,}74^{\text{cm}}$.

Um einen Anhalt zu haben, wie scharf die Constanten des Apparates bestimmt werden müssen, wenn eine bestimmte Genauigkeit in der Temperaturmessung vorgeschrieben ist, gehen wir auf die Gleichungen

$$\varphi = \frac{v}{mv + oH},\quad \chi = -\frac{vHR}{mv + oH} = -\varphi\, HR$$

zurück, worin wir mit R den reciproken Werth von 277,1, also den scheinbaren Ausdehnungscoëfficienten der Luft bezeichnet haben, und

bilden die Differentialquotienten. Wir bekommen, wenn wir gleich die für $t = 0$ und $\varDelta b = 0$ geltenden Zahlenwerthe einsetzen:

$$\frac{d\varphi}{dv} = +0{,}00015^{\text{ccm}}\ (128^{\text{ccm}})$$

$$\frac{d\varphi}{dH} = -0{,}0112^{\text{cm}}\ (1{,}7^{\text{cm}})$$

$$\frac{d\varphi}{do} = -0{,}1186^{\text{ccm}}\ (0{,}17^{\text{ccm}})$$

$$\frac{d\varphi}{dm} = -8{,}720^{\text{cm}}\ (0{,}0022^{\text{cm}})$$

$$\frac{d\varphi}{dR} = \quad 0 \quad \text{ohne Einfluss}$$

$$\frac{d\chi}{dv} = -0{,}000041^{\text{ccm}}\ (72^{\text{ccm}})$$

$$\frac{d\chi}{dH} = -0{,}00761^{\text{cm}}\ (0{,}4^{\text{cm}})$$

$$\frac{d\chi}{dR} = -222{,}9\ (0{,}000013)$$

$$\frac{d\chi}{do} = +0{,}03234^{\text{ccm}}\ (0{,}093^{\text{ccm}})$$

$$\frac{d\chi}{dm} = +2{,}376^{\text{cm}}\ (0{,}0012^{\text{cm}}).$$

Die in Klammern den Differentialquotienten beigesetzten Werthe sind die Grössen der unabhängigen Variabeln, welche die Temperatur bei $x = \pm 30^{\text{cm}}$ um $\pm 0{,}1^{0}$ C. falsch geben, demnach die Maximalwerthe der Fehler, mit welchen diese Werthe behaftet sein dürfen. Zur besseren Uebersicht stelle ich die für $t = 0$ und $\varDelta b = 0$ geltenden Werthe von v, H, R, o und m zusammen und füge jeder dieser Grössen die zulässige Fehlergrenze bei:

$$v_0 = 5547^{\text{ccm}} \pm 72^{\text{ccm}} \qquad o = 7{,}121^{\text{ccm}} \pm 0{,}093^{\text{ccm}}$$
$$b_0 = 75{,}51^{\text{cm}} \pm 0{,}4^{\text{cm}} \qquad m = 0{,}2418^{\text{cm}} \pm 0{,}0012^{\text{cm}}.$$
$$R = 0{,}00361 \pm 0{,}00001$$

Einfluss einer Aenderung der Temperatur des Manometers allein.

Wenn das ganze Instrument die Temperatur t hat, so ist der Zustand der Luft in demselben bestimmt durch die Gleichung

$$vH = \Gamma T.$$

Das Volumen v können wir zerlegen in v_1 und v_2, von denen das erstere das Volumen der Luft im Thermometergefäss, das letztere das Volumen im Manometer darstellt. Bezeichnen wir weiter den reciproken Werth der absoluten Temperatur mit R, so dass also R den Ausdehnungscoëfficienten für die Temperatur t darstellt, so bekommen wir auch die Gleichung

$$v_1 R + v_2 R = \frac{\Gamma}{H}.$$

Nehmen wir nun an, dass die Temperatur des Gefässes v_1 und mithin auch das Volumen desselben constant bleiben, dagegen die Temperatur des Manometers sich ändert, so gilt für diese Aenderung die Differentialgleichung

$$R dv_2 + v_2 dR = -\frac{\Gamma}{H^2} dH,$$

in welcher

$$dR = -R^2 dt, \quad dv_2 = -o dx, \quad dH = -m dx$$

einzusetzen sind, wodurch sie in die Form

$$-H v_2 R dt = (oH + vm)\, dx = -\frac{v_2}{v} \Gamma dt$$

übergeht. Wir bekommen daraus

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{v_2}{v} \cdot \frac{\Gamma}{oH + vm} = \frac{v_2}{v} \chi. \tag{30}$$

Daraus ersehen wir, dass die Bewegung, hervorgebracht durch Aenderung der Temperatur des Manometers allein, abhängig ist zunächst von χ, d. i. die Grösse der Bewegung durch Aenderung der Temperatur des ganzen Instrumentes um 1° C., dann aber vorzüglich von dem Verhältniss des Luftraumes des Manometers zu dem ganzen Volumen der Luft.

Für $v = \infty$ würde $\frac{dx}{dt} = 0$ werden, es würde demnach das Instrument gegen die Schwankungen der inneren Temperatur absolut unempfindlich und in seinen Bewegungen nur von der äusseren Temperatur und dem Luftdruck abhängig sein. Wir sahen schon früher, dass dieselbe Bedingung $v = \infty$ erfüllt sein muss, wenn die Bewegungen proportional den Schwankungen im Luftdrucke und der Temperatur der Atmosphäre werden soll, und wird, wenn wir das Gefääss v_1 so gross als es irgend möglich ist machen, die Reductionsgleichung die einfache Form

$$t = \text{Const}_1\, x + \text{Const}_2\, \Delta b$$

annehmen. Die Realisirung der Bedingung $v = \infty$ praktisch genau kann auf die einfachste Art jederzeit erreicht werden.

Ist der Einfluss der inneren Temperatur auf das Instrument aber merklich, so muss dieselbe selbst bei den Reductionen der Thermogramme in Rücksicht genommen werden. Dabei macht sich der Umstand sehr unangenehm geltend, dass $\frac{dx}{dt} = f(x)$ und zwar unter Umständen ziemlich stark veränderlich ist. Bezeichnen wir mit t die äussere Temperatur (von v_1), mit τ die innere Temperatur (des Manometers), mit x die Ordinate, welche bei $t = \tau$ stattfindet, und Δx die Bewegung, welche der Aenderung der inneren Temperatur von t in τ entspricht, so ist die Relation zwischen diesen Grössen gegeben durch die Gleichung

$$\int_t^\tau dt = \int_x^{x+\Delta x} \frac{v}{v_2} \cdot \frac{1}{\chi} \, dx. \tag{31}$$

Bei dem Thermographen in Hamburg haben wir in Gleichung (30) und (31) zu setzen

$$v_2 = 399 - 7{,}121\,x$$
$$v = 5547 - 7{,}121\,x$$
$$\chi = -0{,}8044 - 0{,}001474\,x + 0{,}00305\,\Delta b$$

und erhalten

$$\frac{dx}{dt} = -(0{,}05786 - 0{,}000853\,x - 0{,}00022\,\Delta b - 0{,}000002\,x^2 \ldots) \tag{32}$$

$$\frac{dt}{dx} = -(17{,}283 + 0{,}2546\,x + 0{,}00467\,x^2 + 0{,}00008\,x^3 \ldots). \tag{33}$$

Aus Gleichung (32) folgt, dass die Bewegung, hervorgebracht durch Aenderung der inneren Temperatur um 1° C· bei constanter äusserer Temperatur und constantem Luftdruck, im Mittel circa 0,06 cm beträgt, also kleiner ist als $^1/_{10}$ der Bewegung, welche dieselbe Aenderung der Temperatur des ganzen Instrumentes hervorgebracht haben würde. Da x die Werthe $\pm$ 30 cm erreichen kann, ändert sich aber diese Bewegung pro Grad um $\mp$ 0,026 cm, demnach um volle 100% des Mittels. Die Aenderung der Temperatur, welche nöthig ist, um das Instrument um 1 cm zu bewegen, beträgt für $x = 0$ circa 17° C., kann aber auf 30° für $x = +30$ cm steigen und bei $x = -30$ cm auf 12° herabgehen. In Gleichung (32) können wir die Glieder mit Δb und x^2 vernachlässigen und bekommen einfacher

$$dx = -0{,}05786\,dt + 0{,}000853\,x\,dt$$

oder auch durch Integration

$$\Delta x = -0{,}05786\,(\tau - t) + 0{,}000853\,x\,(\tau - t). \tag{34}$$

Wir können jetzt die Gleichung (34) mit der Gleichung (17) (S. 241) combiniren. Bezeichnen wir mit x_1 die Bewegung, welche das Instrument ausführt, wenn die Temperatur aussen und innen von 0^0 auf t^0 steigt und das Barometer von b_0 auf $b_0 + \Delta b$, dagegen mit x die Bewegung bei der Erhöhung der äusseren Temperatur von 0 auf t^0 C., der inneren von 0 auf τ und des Barometerstandes von b_0 auf $b_0 + \Delta b$, behalten die Bedeutung von Δx bei und nehmen an, dass für

$$t = \tau = \Delta b = 0 \text{ auch } x = 0 \text{ ist,}$$

so bekommen wir $x = x_1 + \Delta x$, oder da

$$x_1 = -0{,}8044t + 2{,}9523\Delta b + 0{,}00009xt - 0{,}0038\Delta bx + 0{,}00092x^2$$
$$\Delta x = -0{,}05786(\tau - t) + 0{,}00085x(\tau - t)$$

sind:

$$x = -0{,}7465t + 2{,}9523\Delta b - 0{,}00076xt - 0{,}0038\Delta bx + 0{,}00092x^2 - 0{,}0579\tau + 0{,}00085x\tau. \quad (35$$

Aus Gleichung (35) folgt die endgiltige Reductionsgleichung

$$t = -1{,}34x + 3{,}956\Delta b - 0{,}0091\Delta bx + 0{,}0026x^2 - 0{,}0776\tau + 0{,}00012x\tau \quad (36$$

$\Delta b = (b - 75{,}51)^{cm}$,
x = Ordinate des Thermogrammes in Centimetern,
τ = Temperatur des Manometers in Centigraden.

Zur Reduction der Thermogramme wird man sich nach Gleichung (36) eine Tabelle berechnen von der Form wie die hier folgende:

Reductionstabelle für den Thermographen an der Seewarte in Hamburg.

Beob. Ordinaten x	Barometerstände auf 0° reducirt 710	730	750	770	790	Beob. Ordinaten x	Correction wegen der inneren Temperatur $\tau = (-0{,}0776 + 0{,}0012x)\tau$
mm	Centigrade					mm	
− 300	+ 23,50	+ 31,95	+ 40,37	+ 48,85	+ 57,31	− 300	− 0,114 τ
− 250	+ 16,27	+ 24,63	+ 32,98	+ 41,35	+ 49,73	− 250	− 0,108 τ
− 200	+ 9,20	+ 17,47	+ 25,72	+ 34,01	+ 42,29	− 200	− 0,102 τ
− 150	+ 2,25	+ 10,43	+ 18,60	+ 26,79	+ 34,98	− 150	− 0,096 τ
− 100	− 4,58	+ 3,52	+ 11,59	+ 19,70	+ 27,79	− 100	− 0,090 τ
− 50	− 11,27	− 3,27	+ 4,73	+ 12,74	+ 20,74	− 50	− 0,084 τ
0	− 17,84	− 9,93	− 2,02	+ 5,91	+ 13,81	0	− 0,078 τ
+ 50	− 24,27	− 16,45	− 8,63	− 0,81	+ 7,02	+ 50	− 0,072 τ
+ 100	− 30,58	− 22,85	− 15,11	− 7,39	+ 0,35	+ 100	− 0,066 τ
+ 150	− 36,75	− 29,11	− 21,46	− 13,83	− 6,19	+ 150	− 0,060 τ
+ 200	− 42,80	− 35,25	− 27,68	− 20,15	− 12,59	+ 200	− 0,054 τ

Ist diese Tabelle bequem eingerichtet, so bekommt man mit x und b sofort einen Werth von t, an dem nur noch die kleine Temperaturcorrection $f(\tau)$ anzubringen ist, die man nach der rechts im Niveau von x stehenden Formel im Kopf berechnet oder aus passend angebrachten Tafeln, etwa in der Form der Interpolationstäfelchen in Tabellenwerken, bestimmt und an dem Tafelwerth von t mit dem angegebenen Vorzeichen (für positive τ) anbringt.

B. Regenmesser und Verdunstungsmesser.

Die Einrichtung, bei welcher das Wagemanometer zur Bestimmung der Temperaturen Verwendung findet, konnten wir ziemlich ausführlich behandeln, weil ein derartiges Instrument praktisch ausgeführt und in Function ist.

Die nachfolgenden Vorrichtungen sind vorläufig nur Projecte, und werden wir dieselben nur andeuten können, namentlich was die Theorie derselben betrifft. Ich habe mich bemüht, bei jedem der zu besprechenden Apparate gleich mit einer bestimmten Form, wie derselbe etwa ausgeführt werden könnte, hervorzutreten, um nicht über gar zu sehr in der Luft schwebende Dinge reden zu müssen. Ich bemerke nochmals ganz ausdrücklich, dass ich die in den Figuren 5 etc. dargestellten Einrichtungen durchaus nicht als die vortheilhaftesten und endgiltigen Constructionen halte, bin im Gegentheil überzeugt, dass etwa nach den Principien wirklich ausgeführte Instrumente wesentlich anders aussehen werden.

Einen Regen- und Verdunstungsmesser in der einfachsten und vielleicht sogar nicht unzweckmässigen Form stellt direct Fig. 4 Taf. XII dar. Wir haben hier die einfachste Anwendung eines Wagemanometers für Druckhöhen von Flüssigkeiten. Denken wir uns das Gefäss HF_1 frei aufgestellt, das Manometer dagegen im geschlossenen Raum, so wird jede durch Regen und Schnee hervorgebrachte Zunahme der Flüssigkeit die Grösse dW in den Differentialgleichungen (6) und (7) sub I. C. darstellen und demnach durch dx bestimmt werden. Eine Verdunstung bewirkt dagegen eine Verminderung der Flüssigkeit im Gefäss und wird getreu in dem Diagramm des Manometers dargestellt werden. Die Wassermengen, welche vom Himmel niederfallen, werden gleichmässig bestimmt werden, in welcher Form sie auch in das Gefäss gelangen; der Apparat wird ruhig functioniren, mag Eis auf dem Wasser schwimmen oder nicht, wenn dies nur nicht e i n e a n d e n W ä n d e n h a f t e n d e massive Decke bildet. Es wird daher bei uns im Winter

der Apparat in dieser Form einer beständigen Ueberwachung bedürfen und bei starkem Frostwetter wahrscheinlich seine Dienste versagen. Soll der Apparat diesen störenden Einflüssen widerstehen können, so wird er etwas complicirter ausgeführt werden müssen, wie etwa in Fig. 5 Taf. XIII dargestellt ist. Den eigentlichen Regen- und Verdunstungsmesser stellt hier das Gefäss *BBBB* dar, auf welchem der Trichter *AABB* aufgesetzt ist, der im Winter oder auch dauernd einen Cylinder aus Drahtnetz trägt, um den Schnee zu fangen und gegen das Herabwehen etwas zu schützen. Durch eine weite und starkwandige Röhre (Gasrohr) steht das Gefäss *B* mit einem zweiten *C* in Verbindung, und befindet sich *C* in der Flüssigkeit (Wasser oder Salzlösung, Glycerin etc.) im Gefässe *D*. Die Einrichtung ist so getroffen, dass das ganze System der Gefässe *ABC* in der Flüssigkeit in *D* schwimmt. Der Regen fällt auf die Fläche *AA* und fliesst in das Gefäss *B*, oder wenn dies schon voll ist durch die Rohre in das Gefäss *C*. Es wird dadurch das System *ABC* schwerer und sinkt etwas ein, es vermehrt sich die Druckhöhe in *DD*, und wird diese durch ein Wagemanometer für Flüssigkeiten, das an einem gegen Feuchtigkeit etc. geschützten Ort steht, gemessen. Die Relation zwischen der Aenderung dx der Ordinate des Diagramms des Manometers und der Gewichtszunahme des Systemes *ABC* wird sehr einfach zu erhalten sein, und wird jedenfalls d (Regenmenge) $=$ Const dx sein. Wenn es nicht regnet, so wird wahrscheinlich eine Verdunstung im Gefäss *B* eintreten, während in *C* durch eine Oelschicht das Wasser constant erhalten wird. Das letztere ergibt leicht die Differenz zwischen der in einer gewissen Zeit auf die Flächeneinheit aufgefallenen und der durch Verdunstung entzogenen Wassermenge. Das Manometer hat dann ganz die in Fig. 4 gegebene Einrichtung. Wie man sieht, hat der Aggregatzustand des Wassers oben auf den Apparat gar keinen Einfluss, es kann sogar das Gefäss *BB* vollständig ausgefroren sein, und muss man nur zu verhüten suchen, dass irgendwie ein Bewegungshinderniss sich dem System *ABC* durch Eisbildung etc. entgegenstellen kann. Ich glaube bestimmt, dass auf eine der Fig. 5 ähnliche Weise sich ein Apparat herstellen lässt, der in allen Klimaten sich selbst überlassen bleiben kann und über die Hydrometeore interessante Aufschlüsse und Aufzeichnungen geben wird. Natürlich wird derselbe nicht für alle Gegenden gleichmässig gebaut werden dürfen, sondern muss den klimatischen Verhältnissen angepasst werden.

C. Anemometer.

Das Wagemanometer für Flüssigkeiten und Gasdrücke kann sowohl zur Aufzeichnung der **Windrichtung** als auch des **Winddruckes** benutzt werden. Denken wir uns wie in Fig. 6 Taf. XIII, die Windfahne mit einer horizontalen Welle durch conische Räder in Verbindung gebracht, an derselben ein Gewicht angehangen, das bis zur Hälfte in eine Flüssigkeit taucht und das in jeder Lage durch ein Gegengewicht vollständig balancirt wird, so wird die Drehung des Windes nach einer Richtung das Gewicht heben, nach der anderen Richtung senken. Dadurch ändert sich die Druckhöhe der Flüssigkeit im Gefässe und mit dieser die Ordinate eines mit der Flüssigkeit in Verbindung stehenden Wagemanometers. Jeder Windrichtung werden mehrere um gleiche Stücke abstehende Ordinaten entsprechen; es wird aber die Windrichtung aus dem entsprechenden x leicht erhalten werden können und wird namentlich

$$d\,(\text{Windrichtung}) = \text{Const}\; dx$$

sein. Die so gegebene Einrichtung hat ihre entschiedenen Vortheile; namentlich werden die Diagramme über die Veränderungen in der Richtung des Windes auf einen Blick Auskunft geben können. Aber auch die Mängel sind nicht unbedeutend. Wenn nämlieh die Drehungsrichtung längere Zeit constant bleibt, so wird bald das Instrument an der einen oder anderen Seite zu Ende kommen und wird namentlich, wenn man grosse Schärfe in der Bestimmung der Windrichtung haben und doch viele Umdrehungen nach einer Seite messbar machen will, die Röhre des Manometers und das Gewicht A sehr lang machen müssen. Bei einem Apparat, welcher beständig überwacht wird, sind diese Nachtheile nicht von Bedeutung, machen sich aber sofort geltend, wenn man einen Apparat haben will, der sich längere Zeit selbst überlassen bleiben soll.

Will man diese Uebelstände wegbringen, so muss man nolens volens den Wind eine Arbeit, wenn auch nur eine kleine, leisten lassen. Dadurch bekommt man zweifellos einen Fehler an einer Stelle der Windrose, es wird dieser aber sehr klein gemacht werden können, wenn die Fahne möglichst gross und die zu leistende Arbeit möglichst klein gemacht wird. In Fig. 6 stellt A ein Gewicht dar, welches durch einen Excenter (Archimedische Spirale) mit einer der Winddrehung proportionalen Geschwindigkeit gehoben und gesenkt wird. Es ist vielleicht das Gewicht A bei Nordwind in der tiefsten, bei Süd-

wind in der höchsten Stellung; bei Ost, aber auch bei West in der Mittellage. Durch die Bewegung ändert *A* die Druckhöhe der Flüssigkeit in *C*, welche durch ein Wagemanometer registrirt wird. Das Gewicht *B* hält stets *A* das Gleichgewicht und wird durch einen bestimmt geformten Excenter gehoben und gesenkt. Mit dem Gewicht *A* wird nun der Schreibstift des Manometers auf- und niedergehen und werden Nord- und Südwinde zweifellos angezeigt werden. Dagegen werden zwischen diesen Punkten die Windrichtungen zweifelhaft sein und wird in der Mittellage sowohl W als E stattfinden können. Um stets eindeutige Registrirung erhalten zu können, denke ich mir das Manometer mit zwei Stiften versehen, von denen aber immer nur einer schreiben kann; der eine, wenn die Windfahne auf der Ostseite, der andere, wenn sie sich auf der Westseite befindet. Es wird der eine schreiben, während der andere abgehoben ist. Das Aufsetzen und Abheben der Stifte kann geschehen durch einen Apparat, der wie ein Wagemanometer aussieht, oder wie ein Gewicht (Fig. 11), welches gehoben wird, wenn das Gewicht *D* (Fig. 6) in die Flüssigkeit *E* eintaucht. Das Gewicht *D* wird gesenkt, wenn der halbkreisförmige Wulst *F* an der Scheibe *G* den Hebel *H* zurückdrückt. *D* wird, wenn die Windfahne sich in der einen Hälfte der Windrose befindet, immer gehoben sein, in der anderen dagegen gesenkt, und wird in denselben Zeiten der eine oder der andere der Stifte die Bewegungen der Windfahne eindeutig aufschreiben.

Es kann auch hier durch ein Gewicht an einem Excenter der Zug von *D* etwas ausgeglichen werden, so dass die Arbeit, welche der Wind zu leisten hat, auf ein Minimum reducirt wird.

Um die Windstärke zu messen, kann man eine Platte wie bei dem Anemometer von Jelinek, welche zurückgedrückt wird, anwenden und diese mit einem Gewicht wie *A* in Verbindung bringen. Durch das Zurückweichen der Platte durch den Winddruck würde dieses gehoben, bis die durch den verminderten Auftrieb bewirkte Gewichtszunahme dem Winddruck gleich geworden ist. Man kann auch eine Art Windmühlenrad, wie bei dem statischen Anemometer von Recknagel, anwenden und an dessen Welle ein Gewicht wie *A* hängen. Dann wird das durch die Windfahne immer im Wind zu haltende Rad sich so lange drehen, bis die Zunahme des Zuges des Gegengewichtes durch die Verminderung des Auftriebes dem Winddruck gleich geworden ist. In beiden Fällen wird das Gewicht um so höher gehoben, je stärker der Wind

ist, und wird das durch Veränderung der Druckhöhe der Flüssigkeit, in welche das Gewicht taucht, bewegte Manometer durch seine Ordinate die Windstärke direct angeben. Ich habe aber weder zu der durch die Fahne im Wind zu haltenden Platte noch zu dem Windmühlenrad ein besonderes Zutrauen, namentlich was die Haltbarkeit dieser Einrichtungen betrifft. Vielleicht kann man am zweckmässigsten mit dem Apparat für Windrichtung, wie er in Fig. 6 angedeutet ist, ein Anemometer verbinden, welches nach dem Princip des sogenannten Lind'schen (Pitot'sche Röhre) Anemometers construirt ist. Die Windfahne befindet sich an einem Rohr, welches über einem zweiten als Achse dienenden drehbar ist. Das äussere Rohr hat einen verticalen Spalt, gegen welchen der Wind bläst. Der Wind comprimirt die Luft im Rohr, und wird diese Compression gemessen durch ein Wagemanometer für Gasdrücke, welches mit dem inneren Rohr in Verbindung steht. Dieses Rohr ist durchlöchert, und kann demnach sein Luftraum mit dem äusseren communiciren. Die Dichtung unten ist durch eine Flüssigkeit bewirkt, am besten durch Wasser im Gefäss *J*. Aller Regen fliesst nach *J* ab. Das Rohr, welches nach dem Manometer führt, muss natürlich Wassersäcke haben. Jedenfalls wird dieses Manometer sehr empfindlich sein und alle Schwankungen in der Windstärke präcis wiedergeben. Es hat nur den Nachtheil, dass es sich nicht selbst überlassen bleiben kann, namentlich im Winter, zu welcher Zeit es dann leicht zufrieren und sich verstopfen kann. An Observatorien, wo stets Aufsicht vorhanden ist, scheint mir die Einrichtung Fig. 6 nicht unzweckmässig zu sein. Wenn dagegen ein Anemometer längere Zeit ohne genügende fachkundige Aufsicht oder gar auf isolirten Punkten functioniren und stetig Richtung und Stärke des Windes aufzeichnen soll, wird die in Fig. 6 dargestellte Einrichtung sich sehr wenig bewähren können. In solchen Fällen muss ganz entschieden das Anemometer so eingerichtet werden, dass alle rotirenden und sonstigen Bewegungen in der freien Atmosphäre wegfallen, weil man sonst nie sicher ist, ob sich nicht der Bewegung ein Hinderniss irgend welcher Art entgegenstellen kann, und weil man stets fürchten muss, dass die beweglichen Theile bei aussergewöhnlichem Sturme einfach fortgeweht werden. Dann sollte man alle beweglichen Theile in das Innere geschützter Räume legen, so dass die Möglichkeit eines Versagens des Apparates auf ein Minimum reducirt ist. In Fig. 7 habe ich die Einrichtung eines solchen Anemometers angegeben. Wir

haben eine grosse Platte A, welche an einer Stange befestigt ist, auf der Rolle C auflagert und durch das Gegengewicht B balancirt ist. Die Platte soll in der Ebene der Mauerfläche des Observatoriums liegen, soll durch einen biegsamen Stoff D (Leder etc.) gedichtet sein. Hinter der Platte befindet sich eine Aushöhlung in der Mauer, so dass dieselbe sich rückwärts bewegen kann. Durch Rollen werden alle Drücke, welche eine Bewegung, die nicht senkrecht zur Platte ist, hervorbringen wollen, vernichtet. Ueber der Stange befindet sich die Rolle E, in deren Welle das Gewicht F hängt, welches in die Flüssigkeit G taucht. Die Rolle E ist durch Stahlband mit der Stange von A verbunden. Wenn der Wind gegen die Platte A drückt, wird dieselbe etwas zurückgehen und dabei das Gewicht F heben. Dieses wird durch Verminderung des Auftriebes schwerer, und wird demnach bei einem bestimmten Winddrucke die Platte, wie das Gewicht, eine bestimmte Gleichgewichtsstellung einnehmen. Mit der Bewegung von F ändert sich die Druckhöhe von G, und wird diese durch ein Wagemanometer für Flüssigkeiten registrirt. So muss zwischen den Aenderungen im Winddruck und den Bewegungen des Manometers die Relation

$$d\,(\text{Winddruck}) = \text{Const}\ dx$$

bestehen. Zu einem vollständigen Anemometer gehören natürlich vier solcher möglichst gleich gebauter Druckmesser und vier Manometer. Dieselben müssen so gestellt sein, dass jede der Normalen der Windplatten in eine der vier Hauptrichtungen N, E, S, W fällt.

Wenn dann der Wind rein N ist, so wird nur die Nordplatte und deren Manometer ansprechen, die anderen Apparate werden auf Null stehen. Steht dagegen der Wind im Quadranten NE, so spricht auch die Ostplatte mit an, während die Süd- und Westplatten in der Nulllage verharren. Bezeichnen wir den Druck, welchen der Wind gegen eine Platte von der Grösse und Gestalt der angewandten Platten bei senkrechter Incidenz ausüben würde, mit P, so lehrt die Mechanik, dass dieser Druck

$$P = C\gamma v^2 \tag{1}$$

zu setzen ist, wenn wir mit C eine Constante bezeichnen, die von der Grösse und Form der Platte und den sonstigen Verhältnissen abhängt, mit γ das Gewicht des Cubikmeters Luft und mit v die Geschwindigkeit derselben.

Wir nennen die Drücke gegen die Nord- und Ostplatte N und E, und φ den Winkel, welchen der Wind mit der Normalen auf die Nordplatte bildet. Dann ist zweifellos

$$\left.\begin{array}{l} N = C\gamma v^2 f(\varphi); \\ E = C\gamma v^2 f(90 - \varphi). \end{array}\right\} \quad (2$$

Aus den beiden Gleichungen (2) ergeben sich weiter die Relationen

$$\left.\begin{array}{l} v = f_1(N, E) \\ \varphi = f_2(N, E); \end{array}\right\} \quad (3$$

wir werden demnach, sowie $f(\varphi)$ bekannt ist, aus den Registrirungen der beiden Manometer sowohl Geschwindigkeit als auch Richtung des Windes ableiten können, eventuell auch die lebendige Kraft desselben, welche proportional γv^2 ist.

Dr. Lübeck und M. Thiesen haben aus Versuchen mit Platten, welche, um eine horizontale Achse drehbar, auf Rotationsmaschinen in ruhender Luft bewegt wurden, berechnet, dass man sehr nahe

$$f(\varphi) = \cos\varphi \quad (4$$

setzen kann. Sollte dies auch für Platten gelten, welche ruhend den Stoss der unbegrenzten bewegten Luft aufnehmen und zwar speciell in unserem Fall, so würden N und E ohne weiteres als die Componenten von P aufzufassen sein und würde aus

$$N = C\gamma v^2 \cos\varphi, \quad E = C\gamma v^2 \sin\varphi$$

sich

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{E}{N}; \quad C\gamma v^2 = \sqrt{N^2 + E^2}; \quad v = \sqrt{\frac{\sqrt{N^2 + E^2}}{C\gamma}} \quad (5$$

ergeben.

Richtung und Stärke des Windes wird man dann einfach durch zwei Zahlen anzugeben haben, durch die Componenten des Druckes auf 1^{qm} J, bezogen auf die beiden Hauptrichtungen NS und EW. Gibt man erstere stets zuerst an und unterscheidet eine Nordcomponente von einer Südcomponente dadurch, dass man die erstere mit +, die letztere mit — versieht und ebenso E mit + und W mit —, so wird

$$+\,4{,}00 - 6{,}00$$

einen Nordwestwind bezeichnen, der auf den Quadratmeter mit der Stärke $J = \sqrt{16 + 36} = 7{,}21^{\text{kgr}}$ drückt und mit der Nordrichtung über Ost gemessen, den Winkel

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{-6}{+4} = 303^\circ\,40'$$

einschliesst. Die Registrirungen würden dann etwa folgendermassen aufzuzeichnen sein:

Zeit	N	E	S	W
0^h	0	0	1	5
1^h	0	0	2	3
2^h	0	0	5	0
3^h	0	1	4	0

und würden diese Zahlen viel besser den Gang der Erscheinung erkennen lassen, als die gewöhnliche Darstellung durch Richtung und Stärke.

Die Form $f(\varphi) = \cos \varphi$ ist von Dr. Lübeck[1]) theoretisch abgeleitet worden, indem derselbe die von Dohrandt empirisch gefundene Function durch die Theorie zu erklären suchte. Die früheren theoretischen Speculationen, welche man in verschiedenen Lehrbüchern der Mechanik vertreten findet, geben aber

$$f(\varphi) = \cos^2 \varphi,$$

ja sogar

$$f(\varphi) = \cos^3 \varphi.$$

Die Versuche von Dohrandt und Thiesen haben den Cosinus als einfachste Näherungsformel ergeben; es fand Herr Thiesen jedoch, dass eine complicirtere Function von der Form

$$f(\varphi) = \cos + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi \cdots$$ [2])

den Beobachtungsresultaten sich besser anschliesst.

Man darf jedoch die Beweiskraft der Versuche von Dohrandt und Thiesen nicht zu hoch anschlagen. Mir scheint es durchaus nicht erwiesen, dass es gleichgiltig ist, ob sich ein Körper in ruhender Luft bewegt, oder die Luft gegen diesen Körper. Weiter muss von Einfluss sein die Form des Körpers, gegen welchen sich die Luft bewegt. Es wird möglicherweise eine ganz dünne Platte eine ganz andere Form der $f(\varphi)$ ergeben als meine Druckplatten. Ich denke mir einen quadratischen Thurm, in dessen Wandflächen die Platten angebracht sind und der ganz respectable Seitenlängen wird erhalten können. Ich vermuthe, dass in diesem Falle sich das Quadrat des Cosinus als die bestanschliessende Form der $f(\varphi)$ ergeben wird, dass man

1) Repertorium Bd. 10.

2) Repertorium für Meteorologie Bd. 4 S. 34.

aber von der dritten Potenz wohl in allen Fällen wird Abstand nehmen können. Sollte dies der Fall sein, so würden die Drücke N und E, welche bei einem Wind aus dem Nordostquadranten die Nord- und Ostplatte normal auszuhalten haben, die Werthe

$$\left.\begin{aligned} N &= C\gamma v^2 \cos^2 \varphi \\ E &= C\gamma v^2 \sin^2 \varphi \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

repräsentiren. Aus den Gleichungen (6) würden dann sich weiter als der Druck des Windes auf eine gleich grosse, demselben aber normal entgegengestellte Platte

$$P = C\gamma v^2 = N + E, \tag{7}$$

weiter die Geschwindigkeit des Windes und deren Componenten

$$\left.\begin{aligned} v \cos \varphi &= \sqrt{\frac{N}{C\gamma}} \\ v \sin \varphi &= \sqrt{\frac{E}{C\gamma}} \\ v &= \sqrt{\frac{N+E}{C\gamma}} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

und endlich die Richtung des Windes

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{E}{N}} \tag{9}$$

ergeben. Für die Anwendung meines Anemometers hat die Bestimmung von $f(\varphi)$ die grösste Wichtigkeit. Dieselbe wird sich aber leicht ausführen lassen, wenn man an einem Centralobservatorium nicht nur einen vollständigen Apparat, wie Fig. 7 angedeutet ist, einrichtet, sondern mit diesem auch einen Anemographen Fig. 6 verbindet. Der letztere gibt dann die Werthe von P und φ, der erstere die zugehörigen N und E, und wird man in den Registrirungen der beiden Apparate ein grosses Material zur Ableitung der $f(\varphi)$ erhalten. Würde man ausserdem noch einen Oettingen'schen Componentenintegrator hinzufügen, so würden diese drei Instrumente sicher geeignet sein, die Aërodynamik wesentlich zu fördern.

Da man jedenfalls annehmen kann, dass bei ähnlich gebauten Instrumenten die Form von $f(\varphi)$ dieselbe sein wird, so ist deren Bestimmung nur einmal auszuführen und wird für alle Orte gelten, wo der Apparat aufgestellt wird. Die Bestimmung von $f(\varphi)$ wird einen ziemlichen Aufwand von Mühe und Geld erfordern; wenn dieselbe

aber ausgeführt sein wird, dann wird man aber auch Instrumente haben, die wirklich brauchbare Resultate geben, Resultate, von denen man ganz bestimmt weiss, was sie bedeuten. Das ist bei allen den Anemometern nach Robinson nicht der Fall. Die Rotationsgeschwindigkeit eines solchen Apparates hängt zwar mit der Windgeschwindigkeit zusammen und wird bei gleichstarkem Wind auch letztere zu bestimmen gestatten; aber der Wind ist nie gleichförmig, seine Stärke ändert sich ununterbrochen, — wer will da sagen, was die Zahl der Umdrehungen des Schalenkreuzes eigentlich angibt? Hält ein starker Stoss lange an, so wird das Kreuz sich rasch drehen, und wird ein weit schwächerer Wind, wenn er nur im Stande ist, die Bewegungswiderstände zu überwinden, die Geschwindigkeit desselben längere Zeit forterhalten, und bekommt man so einen Sturm registrirt, der gar nicht da ist. So viel mir bekannt ist, sind über diese Einflüsse noch keine Versuche angestellt worden, sondern man hat sich bei Prüfung der Robinson'schen Anemometer peinlich Mühe gegeben, die Rotationsmaschinen mit möglichst gleichförmiger Geschwindigkeit zu drehen. Dass dann bei einer bestimmten Umdrehungszahl des Rotationsapparates das Anemometer auch eine solche zeigen muss und beide von einander abhängig sein werden, ist klar; aber die so ermittelte Function hat in der Praxis wenig Werth, da man auf die daselbst vorhandenen Verhältnisse entweder gar nicht, oder nur unvollkommen geachtet hat.

Die Rotationsanemometer werden nie den Schwankungen in den Luftbewegungen folgen können, sie werden daher nur zur Ableitung von mittleren Geschwindigkeiten im günstigsten Fall benutzt werden können. Anemometer, welche die Vorgänge in der Natur getreulich verkünden, jede Aenderung in der Stärke und der Richtung des Windes exact markiren, können nur Druckanemometer sein, und denke ich, werden die beiden von mir vorgeschlagenen Einrichtungen diese Aufgaben getreulich erfüllen. Dass die Ableitung von Windintegralen bei den Druckanemometern möglicherweise etwas schwierig sein wird, kann ihnen nicht entgegenstehen. Nach meiner Meinung müssen Registrirapparate die Vorgänge getreu darstellen, und dann wird man auch Integrale sich bilden können.

Sollte sich erweisen, dass die in Fig. 7 dargestellte Einrichtung, wobei das Gewicht F in eine Flüssigkeit taucht und ein Flüssigkeitsmanometer (Fig. 4) bewegt, wegen der Reibungswiderstände in der Flüssigkeit den Druckschwankungen auf A nicht rasch genug folgt,

so kann man F als eine Gasometerglocke auffassen, die mit Luft gefüllt ist; das Zuleitungsrohr in G würde dann von einem Manometer für Gasdruck kommen und in F aufzuleiten sein. Jede Druckänderung auf A würde dann die Glocke F heben oder senken und so die Spannung der eingeschlossenen Luft ändern, die dann proportional den Winddruckänderungen sein und durch das Manometer gemessen und registrirt werden würde. Eine Hauptschwierigkeit bei meinem Apparat (Fig. 7) wird wohl die Aufsuchung des Dichtungsmateriales D bieten, welches letztere bei allen Temperaturen gleich biegsam sein muss. Ich vermuthe, dass gut gefettetes Leder sich am besten eignen wird. Vielleicht hat man die Dichtung gar nicht nöthig, und wird dann meiner Einrichtung kaum etwas im Wege stehen.

D. Hygrometer.

Die Construction von bequemen Hygrometern, welche zuverlässig und genau und ohne besondere Versuche und complicirte Apparate entweder die relative oder absolute Feuchtigkeit der Luft geben, ist von jeher besonders schwierig gewesen und gehört eigentlich noch zu den ungelösten Fragen. Die Condensations- und Absorptionshygrometer werden doch nur Sachverständigen in die Hand zu geben sein. Zu autographen Instrumenten lassen sich die ersteren gar nicht verwenden, wohl aber die letzteren; es werden aber die auf der Wägung des aus einer bestimmten Luftmenge absorbirten Wassers basirten Hygrographen wohl zur Ableitung mittlerer Feuchtigkeitsverhältnisse, aber nicht zum Studium rascher Witterungswechsel zu gebrauchen sein. Man wird, um die raschen Veränderungen in der relativen Feuchtigkeit namentlich studiren zu können, immer zu den Gestalts- oder vielleicht Gewichtsänderungen hygroskopischer Körper oder zum Psychrometer greifen müssen. Ob ein Luftthermometer bei der bedeutenden Grösse seines Gefässes als feuchtes Thermometer eingerichtet werden kann, wird erst durch besondere Versuche zu ermitteln sein. Ich vermuthe, dass man ein Hygrometer, welches direct relative Feuchtigkeit registrirt, dadurch erhalten kann, dass man grössere Massen eines porösen Körpers in Schichten auf Drahtnetz der Atmosphäre exponirt und durch die Gewichtsänderungen desselben die Aenderungen in der relativen Feuchtigkeit zu ermitteln sucht. Längenänderungen sollte man für Instrumente, welche Anspruch als

wissenschaftliche machen sollen, doch nun endlich einmal zur Messung der relativen Feuchtigkeit bei Seite lassen und am allerwenigsten als Grundlage zur Construction von Hygrographen verwenden. Die Gewichtsänderung eines porösen Körpers kann man auf ein in eine Flüssigkeit tauchendes Gewicht wirken lassen und wird so auch die Aenderungen in der relativen Feuchtigkeit durch das Wagemanometer messen und registriren können. Vermuthlich eignet sich Papier- oder Holzkohle am besten, welche letztere in der Luft von mittlerer relativer Feuchtigkeit bis zu 18% Gewichtszunahme durch Absorption von Wasser erleidet.

Ueber die Veränderlichkeit des Wassergehaltes mit der relativen Feuchtigkeit der Luft habe ich keine Angaben finden können, und müssen in dieser Richtung erst Untersuchungen angestellt werden.

Einen Hygrographen, welcher das Gewicht des in der Luft befindlichen Wassers gibt, wird man sehr einfach construiren können. Man wird eine grosse Gasuhr mit constanter Geschwindigkeit durch ein Uhrwerk treiben und durch dieselbe Luft saugen. Diese Luft wird durch Absorptionsröhren geleitet und deren Gewichtszunahme durch Einsenken eines Gewichtes in eine Flüssigkeit auf ein Wagemanometer übertragen.

Recht befriedigend wird wohl kaum eine der angedeuteten Einrichtungen werden, man wird sich aber in Ermangelung etwas Besseren für die eine oder andere entschliessen müssen.

E. Manometer zur Untersuchung von Barometern, Aneroiden etc.

Wenn an einem Centralobservatorium einmal ein nach den entwickelten Principien construirter Apparat eingerichtet wird, so kann man mit demselben auch ein Manometer für Gasdrücke verbinden, das mit einem hermetisch verschliessbaren und mit Glasfenstern versehenen Raum in Verbindung steht und den relativen Druck der Luft in diesem Raum stetig registrirt. Es wird dann dieses Instrument in Verbindung mit dem Barographen für jeden Moment den absoluten Druck in dem Raume geben. Bringt man in denselben Aneroide oder Quecksilberbarometer, deren Correctionen ermittelt werden sollen, so braucht man bei den Ablesungen an diesen Instrumenten sich nur die Zeit der Beobachtung zu notiren und erhält den zu dieser Zeit herrschenden absoluten Druck im Raume nachträglich aus den Curven des Registrirapparates. Eine solche Einrichtung wird für Observa-

torien, welche, wie die Seewarte, viel Instrumente zu prüfen haben, sich als Zeit und Arbeit ersparend erweisen.

F. Pegelapparate zur Bestimmung des Wasserstandes von Flüssen, wie von Ebbe und Fluth des Meeres.

Jeden Fluss, oder das Meer, oder überhaupt jede grössere Wassermenge können wir uns als ein Gefäss HF_1 der Fig. 4 vorstellen, bei welchem wir einfach $F_1 = \infty$ setzen können. Es wird dann jede Aenderung in der Höhe des Wasserspiegels die Grösse dH darstellen, welche durch dx bestimmbar ist. Einen sehr einfachen Pegelapparat werden wir demnach dadurch erhalten können, dass wir ein Wagemanometer für Flüssigkeiten, wie es in Fig. 4 dargestellt ist, direct in Verbindung mit einem Fluss oder dem Meere etc. bringen. Man wird das Manometer so stellen, dass der tiefste Wasserstand höchstens 10^m unter das Niveau BB sinken kann, da sonst ein luftleerer Raum daselbst entstehen würde und dies Störungen hervorbringen müsste. In den meisten Fällen wird man wahrscheinlich das Instrument in das Niveau der mittleren Wasserhöhe bringen können. Sind die Schwankungen in der Wasserhöhe sehr bedeutend und ist man namentlich viel Frost ausgesetzt etc., so wird der Apparat etwas complicirter werden müssen. Man wird dann das Wasser auf Luft wirken lassen, die sich in einem dichten Gefäss befindet und deren Volumen durch das Steigen und Sinken des Wassers geändert wird. Dies verändert die Spannung der Luft, und wird man diese Druckänderung durch ein Manometer für Gase bestimmen und registriren können. Es hat das Zwischenschalten den Vortheil, dass man dann das Manometer hoch stellen und vor dem Wasser bei Ueberschwemmungen, Sturmfluthen etc. schützen kann. In Fig. 8 habe ich die Einrichtung dargestellt, welche man einem registrirenden Pegel am Meere geben kann. Zwei gut schliessende Cylinder A und B befinden sich in einem unterirdischen, gegen Temperaturwechsel und namentlich gegen Frost geschützten Gewölbe. Die ganze Einrichtung wird man etwa wie es in Fig. 8 wohl allgemein verständlich angedeutet ist ausführen können. A enthält Luft und B Oel. Von A aus geht ein Bleirohr nach dem Wagemanometer, welches wie das Manometer in Fig. 3 eingerichtet zu denken ist. Vom Meere aus kommt ein weites Rohr in das Gewölbe herein, geht durch B erst einmal in die Höhe und dann wieder nieder, damit man sicher alle Luft heraustreiben kann. Es dringt durch dieses Rohr das

Wasser beim Beginn der Fluth ein, treibt das Oel nach A, comprimirt die Luft und bewegt so das Manometer in dem Masse, in welchem das Wasser steigt. Das Zuleitungsrohr wird soweit in die Erde gegraben, dass es nicht mehr einfrieren kann und auch gegen Beschädigungen bei Stürmen durch die Brandung etc. geschützt ist. Die Hauptaufgabe wird sein, das Zuleitungsrohr vor dem Versanden zu bewahren. Es wird vielleicht ein weiter Schlauch aus Drahtspirale übernäht mit Leder etc. nach einer tiefen Stelle zu leiten sein, und werden daran aus Drahtnetz bestehende und durch Kork schwimmend gehaltene Bojen befestigt werden müssen. Diese sollen womöglich so tief liegen, dass sie von dem Wellenschlag entweder gar nicht oder nur wenig getroffen werden können, müssen aber auch weit genug vom Boden abstehen, um nicht mit Schlamm bedeckt werden zu können. Sehr ängstlich braucht man schliesslich nicht zu sein, da die Aenderung des Druckes auch schon durch die biegsame Röhre fortgepflanzt wird. Wenn ein derartiger Apparat im Meere versenkt und gut verankert und oben durch Bojen bezeichnet worden ist, so werden alle Vorgänge an der Oberfläche des Meeres, welcher Art sie auch sind, ohne störenden Einfluss bleiben können, wird auch dann, wenn das Wasser mit Eis bedeckt ist, der Apparat ruhig functioniren und jede Variation im Wasserstand anzeigen.

Die Wellenbewegungen können kaum oder wenigstens nur sehr wenig Einfluss ausüben, und wird so jede Ordinate einen mittleren Wasserstand angeben. Um das Luftquantum gegen Veränderung zu schützen, kann man A mit einem zweiten Gefäss umgeben und den Zwischenraum mit Luft füllen, die ebenfalls der Wirkung des Meeres ausgesetzt ist; es wird dann der Druck aussen und innen immer derselbe sein, und beugt man so Aenderungen im Volumen von A und Luftverlusten bei starkem Ueberdruck vor. Die Grösse der Aenderung der Spannung der Luft hat man ebenfalls in der Hand. Je höher und schmäler A gemacht wird, um so geringer wird dieselbe werden.

III. Die Vorrichtungen zum continuirlichen Aufzeichnen der Bewegungen der Manometer, selbstthätigen Integriren der Registrircurven und selbstthätigen Aufziehen der Bewegungsmechanismen durch die Aenderungen im Zustand der Atmosphäre und durch deren Bewegung.

In dem Vorhergehenden wurden die Einrichtungen erörtert, bei welchen das Wagemanometer zur Messung der sämmtlichen meteorologischen Elemente Verwendung finden kann. Um nun einen Registrir-

apparat aus den besprochenen einzelnen Instrumenten zu erhalten, der allen den Anforderungen entspricht, die man an ein solches, nicht billiges Instrument stellen darf, ist es auch nöthig, dass wir uns nach Vorrichtungen umsehen, welche es möglich machen, dass der Apparat monatelang sich selbst überlassen bleiben kann. Wenn man Markirungen haben will, welche für einen ganz bestimmten Zeitpunkt, auf die Minute genau, möglichst genaue Werthe der betreffenden meteorologischen Elemente geben, so wird nichts Anderes übrig bleiben, als die Aufzeichnungen durch Nadeln zu bewirken, welche in das Papier eingedrückt werden. Derart ist die Einrichtung bei meinem in Hamburg befindlichen Barothermographen. Dort werden Nadeln durch Hämmer in den Cylinder eingedrückt, und entstehen dadurch Marken, deren Schärfe nichts zu wünschen übrig lässt. Wir haben bei diesem Instrument auch Vorrichtungen zum Erschüttern der beweglichen Röhren, ein kräftiges, genau gehendes Uhrwerk; es sind also alle die Bedingungen erfüllt, welche einen subjectiven Beobachter vollständig ersetzt erscheinen lassen. Ein solcher Apparat wird aber naturgemäss sehr complicirt und verbraucht eine ziemliche Menge mechanischer Arbeit.

Denken wir uns nun einen Apparat, der auf dem Gipfel eines Berges, oder auf einer einsamen Insel aufgestellt ist und monatelang selbständig thätig, uns über die Witterungsvorgänge an diesen Orten ein möglichst getreues aber auch vollständiges Bild geben soll, so erscheint es mir höchst gleichgiltig, ob die Marke auf dem Papier als für eine halbe Stunde früher oder später geltend angesehen wird; es wird demnach hier ohne Nachtheil die Nadelspitze, welche nur eine Punktreihe liefert, durch einen continuirlich schreibenden Stift ersetzt werden können, und werden nur einfache Vorrichtungen, um Stunden oder auch nur Tage abzutheilen, an dem Stift, welcher die Nulllinie zeichnet, angebracht werden müssen.

Ein solcher Stift wird nun weiter ein Bewegungshinderniss geben und wird die Verwendung einer Erschütterungsvorrichtung unmöglich machen. Die Striche werden wahrscheinlich auch etwas breit werden und werden nicht immer genau centrisch entstehen, so dass zweifellos die Aufzeichnungen dieser Instrumente nicht den Grad von Genauigkeit haben werden, deren sie fähig sind, wenn man Nadeln anwendet. Was schadet dies aber? Im Mittel eliminiren diese Ungenauigkeiten sich entschieden vollständig, und ob ein Barometerstand um $^1/_2{}^{mm}$ höher

oder tiefer gefunden wird, als er war, das wird bei der grossen Veränderlichkeit in den meteorologischen Elementen, namentlich dann, wenn meilenweit herum kein anderer Apparat aufgestellt ist, wohl kaum irgendwie von Einfluss sein. Man hat es auch in der Hand, bei den Wagemanometern die bewegende Kraft und die ganzen Bewegungen so gross zu machen, dass Reibungswiderstände beim Gleiten des Stiftes über das Papier und Fehler in den Ordinaten durch zu starke Striche vollständig vernachlässigt werden können. Die Hauptsache ist und bleibt es doch, dass der Registrirapparat innerhalb gewisser Grenzen zuverlässige Resultate gibt und nie versagt, und das glaube ich mit Bestimmtheit behaupten zu können, werden nur Registrirapparate leisten, welche nach den vorliegenden Principien construirt sind.

In Fig. 9 habe ich angedeutet, wie die Schreibvorrichtung bei den Manometern etwa anzuordnen ist. Es wird auf die Achse der Rolle des Manometers eine Scheibe A gesteckt, die so gewählt wird, dass die Bewegungsweite der Stifte bei allen Instrumenten dieselbe ist. Dann kann man für alle Instrumente gleiche Papierbreite und überhaupt vollständig gleich gebaute Schreibapparate anwenden. Von A geht ein Stahldraht nach einer der Rollen B und setzt dieselbe in Bewegung, wenn das Manometer sich bewegt, und zwar wird die Umfangsgeschwindigkeit von B der Geschwindigkeit des Manometers proportional sein. Auf den beiden äusserst leicht beweglichen Rollen B liegt die Schiene C, welche die Führung des Stiftes D bewirkt, der nun durch seine, durch Gewichte D_1 regulirbare Schwere auf dem Papier aufliegt. Das Papier wird durch die Walze E, deren Achse FF ist, gleichmässig bewegt. G und H geben die Nulllinie und Zeitmarken. G denke ich mir während einer Stunde gehoben, die darauffolgende schreibend und so fort. H wird während eines ganzen Tages vielleicht schreiben, jedoch dann einen Tag gehoben sein etc. Dieses Heben und Senken der Stifte G und H wird durch Daumenscheiben auf einer FF parallelen Achse leicht erzielt werden können, und werden diese Bewegungen wenig Arbeit verbrauchen, namentlich dann, wenn man G bei dem einen Apparat sich senken lässt, während es bei einem anderen gehoben wird. Ist dann die Anzahl der Apparate eine gerade Zahl, so wird ein Gewicht nur die Reibungen zu überwinden haben. Wenn Alles gut construirt und ausgeführt ist, so werden die treibenden Kräfte nicht allzugross werden. Als Papier wird entsprechend breit geschnittenes Rollenpapier verwendet, das man leicht

in den Papierfabriken haben kann; je grösser eine solche Rolle ist und je langsamer man das Papier laufen lässt, um so länger wird natürlich der Apparat in Function bleiben können. Von der Qualität dieses Papieres wird der ungestörte Gang des Apparates abhängig sein; es muss dasselbe durchaus gleichmässig dick und gut cylindrisch gerollt sein, sonst wird eine Tendenz schief zu laufen eintreten, und wird dies die ganze Function stören. Ich glaube, dass dies die einzige Möglichkeit sein dürfte, welche das vollständig ohne Ueberwachung lassen des Registrirapparates bedenklich erscheinen lässt. Sollte sich, wie ich hoffe, diese Befürchtung durch die Erfahrung als unbegründet erweisen, so glaube ich, wird sich ein Registrirapparat erzielen lassen, welcher jahrelang sich vollständig überlassen bleiben kann, wenn man noch selbstthätige Aufziehvorrichtungen anbringt, bei welchen der Arbeitsinhalt der atmosphärischen Zustandsänderungen ausgebeutet wird.

In der neueren Zeit hat man sich viel damit beschäftigt, die enorme Arbeitsfähigkeit, welche in den Luftströmungen und der Sonnenwärme, den grossen Wasserfällen, den Gezeiten des Meeres etc. enthalten ist, nutzbar zu verwenden. Mir scheint es zweifellos, dass diese Bestrebungen zum Ziele führen werden. Manche derartige Einrichtungen haben sich schon bewährt und führen sich in der Praxis immer mehr ein. Ich erinnere nur an die neuen amerikanischen Windräder, welche sich durch Windfahne selbst in den Wind stellen und die Angriffsfläche des Winddruckes je nach der Stärke desselben selbstthätig reguliren. Hier in Chemnitz sind gegenwärtig drei derartige Apparate zur Wasserhebung von Privatpersonen in Anwendung gebracht worden. Der auf der Pariser Ausstellung befindliche Apparat, bei welchem durch einen grossen Hohlspiegel Wasser zum Kochen gebracht und durch den Dampf eine Maschine getrieben wird, dürfte zur Zeit wohl noch als ein interessantes physikalisches Instrument zu betrachten sein, hat aber vielleicht mehr Chancen als der Vorschlag, die Gezeiten des Meeres oder die Kraft der Wasserfälle (Niagarafall, Telemachon) zur Betreibung grosser Magnetinductionsmaschinen zu verwenden, den Strom fortzuleiten und auf geeigneten Stellen eine ähnliche Maschine als Arbeitsmaschine zu bewegen. Der letztere Vorschlag wird wohl, wie dies auch schon von anderen Seiten hervorgehoben wurde, an der Kostspieligkeit der Leitungsdrähte und deren Isolation scheitern, wenn auch auf kurze Entfernungen in

gewissen Fällen eine ähnliche Einrichtung nicht unzweckmässig sein dürfte.

Ganz neuerdings ist eine Einrichtung, um Uhren durch die Ausdehnung fester Körper durch Temperaturänderungen aufzuziehen, patentirt worden. Es sind derartige Ideen aber durchaus nicht neu, lesen wir doch[1]), dass schon vor 1770 zu London von Coxe ein Wagebarometer gezeigt wurde, dessen Trog an Ketten hing und durch seine durch die Luftdruckänderungen hervorgebrachten Bewegungen eine Uhr aufzog.

Ich glaube, dass man das Wagemanometer sehr leicht und vielleicht sogar mit gewissen Vortheilen, den erwähnten Vorschlägen gegenüber, zum selbstthätigen Aufziehen der Bewegungsmechanismen eines Registrirapparates wird verwenden können.

In Fig. 10 haben wir dargestellt, wie ein Manometer für Gasdrücke als Arbeitsmaschine eingerichtet werden kann. Die bewegliche Röhre A hängt durch das Gegengewicht B balancirt an der Rolle C, welche fest auf der Achse DD sitzt. Auf DD sitzen fest zwei Sperrräder E und E_1, dagegen nur lose die conischen Räder F und F_1, welche in das horizontale conische Rad H eingreifen. Durch die Sperrklinken G und G_1 wird die Bewegung von DD auf H übertragen, derart, dass H immer in ein und derselben Richtung sich dreht, mag die Achse DD nach vorn oder nach hinten sich bewegen. Die Sperrklinken G und G_1 sitzen an den conischen Rädern, und greift G ein, wenn sich die Achse DD nach vorn dreht, treibt also H in der Richtung des Uhrzeichens. Dreht sich dagegen DD nach hinten, so schnappt G, es greift G_1 in E_1 und treibt H in derselben Richtung wie vorher.

Wenn demnach die Röhre A durch die Aenderung des Luftdruckes oder durch Aenderung der Spannung der eingeschlossenen Luft bewegt wird, so tritt bei jeder dieser Bewegungen, mag sie aufsteigend oder absteigend sein, eine Drehung von H in der Richtung des Uhrzeigers ein. Auf der Achse von H sitzt die Rolle J, um welche die Kette geschlungen ist, welche das Uhrwerk M treibt. K ist das zur Bewegung des Uhrwerkes und der sonstigen Mechanismen nöthige Gewicht, L ein Gegengewicht, welches die nöthige Reibung geben soll, damit die Kette auf der Rolle J und M nicht gleitet.

1) Repertorium Bd. 3 S. 239.



Sind J und M sogenannte Kettenräder, so kann L wegfallen. Durch Drehung von H wird das Gewicht K beständig gehoben und sinkt ebenso beständig durch Treibung des Uhrwerkes M. Es muss natürlich die Hebung durch den Aufziehmechanismus mindestens ebenso rasch erfolgen, als das Gewicht bei der Arbeitsleistung sinkt, und würde in diesem Falle K in constanter Höhe bleiben. Die Rollen N und R dienen nur zur Führung der Kette.

Was die Leistungsfähigkeit des Apparates betrifft, so können wir hier einige Ueberschlagsrechnungen anstellen.

Behalten wir die in Fig. 3 eingeführten Bezeichnungen bei, so waren die die Bedingungen des Gleichgewichtes ausdrückenden Hauptgleichungen (Seite 231 ff.)

$$P = G + Cy - (B - C)u$$
$$S = M + (C - D)y - (B - C)u + Ez.$$

Wir differenziren diese Gleichungen und setzen ein

$du = dx + dz$,

$(B - C) = Q =$ ringförmiger Querschnitt des Rohres aus Glas,

$(C - D) = R =$ ringförmiger Raum in der Röhre mit Quecksilber gefüllt,

$(E - Q) = F =$ wirklicher mit Quecksilber ausgefüllter Querschnitt des Troges,

wodurch wir bekommen

$$0 = dG + Cdy - Qdx - Qdz$$
$$0 = Rdy - Qdx + Fdz$$

und woraus wir folgende Gleichungen herleiten können:

$$M = \frac{dx_1}{dy} = \frac{CF + RQ}{EQ} \text{ für } dG = 0$$

$$N = \frac{dx_2}{dG} = \frac{F}{EQ} \text{ für } dy = 0$$

$$O = -\frac{dG}{dy} = +\frac{CF + RQ}{F} \text{ für } dx = 0.$$

Wir bekommen so drei Constante M, N und O.

M bedeutet die Bewegung der Röhre, hervorgebracht durch die Aenderung des relativen Manometerstandes y um 1^{cm} bei frei beweglichem, also nicht arbeitendem Instrumente.

N ist die Grösse der Bewegung, welche das A u f l e g e n von 1^{gr} auf das Rohr bei constantem relativen Manometerstand bewirkt.

O bedeutet die bewegende Kraft der Aenderung des relativen Manometerstandes um 1^{cm}, das ist die Gewichtszunahme des Rohres bei Vermehrung des Minderdruckes um 1^{cm}, wenn das Rohr in constanter Stellung erhalten wird.

Wenn wir nun den Widerstand, den das Rohr bei der Bewegung nach beiden Seiten hin zu überwinden hat, wenn es arbeiten soll, mit Π bezeichnen und mit Δy die bewegende Ursache, das ist die Aenderung im relativen Manometerstand, so bewegt sich das Rohr um die Strecke

$$M \Delta y - 2 N \Pi.$$

und wird die dabei geleistete Arbeit sein

$$A = (M \Delta y - 2 N \Pi) \Pi.$$

Es folgt daraus, dass gar keine Arbeit geleistet wird, weil das Instrument einfach still stehen bleibt, solange

$$\Delta y < 2 \frac{N}{M} \Pi$$

ist, wenn der Widerstand Π als durch die ganzen Constructionsverhältnisse gegeben aufgefasst wird. Wie gross man Π nehmen darf, lässt sich im Allgemeinen nicht angeben, es wird dies ganz von der Natur der bewegenden Ursache abhängen. Hat man eine treibende Kraft, welche etwa wie Aenderungen im Barometerstand und der Temperatur der Atmosphäre tägliche Perioden, aber ausserdem noch jährliche Periode und unregelmässige Aenderungen zeigen, so wird man wohl die mittlere tägliche Schwankung bei der Berechnung von Π zu Grunde legen müssen. Bezeichnen wir dann mit η die mittlere tägliche Schwankung im relativen Manometerstand und setzen Π gleich einem bestimmten Bruchtheil der η entsprechenden bewegenden Kraft, also vielleicht

$$\Pi = \varrho O \eta,$$

worin ϱ einen echten Bruch bedeuten soll, so wird die durch den Apparat geleistete mittlere tägliche Arbeit L den Werth

$$L = 2 \varrho (1 - 2 \varrho) M O \eta^2$$

annehmen. Das Maximum der mittleren täglichen Arbeit ergibt sich für

$$\varrho = \frac{1}{4}$$

und liefert, wenn dieser Werth angenommen wird:

$$L = \frac{1}{4} M O \eta^2.$$

Unter dieser Annahme wird gar keine Arbeit geleistet, wenn an einem Tage

$$\Delta y < \frac{1}{2}\eta$$

geblieben war. Wir sehen, dass die Leistungsfähigkeit des Instrumentes proportional ist der bewegenden Kraft O, der Bewegungsgrösse M und proportional dem Quadrate der mittleren täglichen Schwankung des relativen Manometerstandes. Denken wir uns, um nur ein Beispiel anzuführen, den in Hamburg befindlichen Thermographen als Motor angewandt, bei welchem die lichte Weite des beweglichen Rohres circa 30^{mm}, die Wandstärke 1,5 und die Weite des Troges oben 100^{mm} beträgt, so bekommen wir

$$M = 4{,}17^{cm}; \quad N = 0{,}05^{cm}; \quad O = 82^{gr}.$$

Demnach wird die von dem Apparat geleistete Arbeit im Allgemeinen den Werth

$$A = (4{,}17\Delta y - 0{,}1\Pi)\Pi$$

heben, und wird die mittlere tägliche Arbeit

$$L = 85{,}4\eta^2 \text{ Centimeter-Gramm } (^{cmgr})$$

betragen.

Es gibt dies

für $\eta =$		$L =$
	1^{cm};	$85{,}4^{cmgr}$
	10	8540
	20	34160
	30	76860

Das Gewicht eines sogenannten Regulators ohne Schlagwerk beträgt 1250^{gr} und fällt pro Tag um 5^{cm}, wonach der Arbeitsbedarf eines gewöhnlichen Regulatorwerkes pro Tag $= 6250^{cmgr}$ sich ergibt. Um ein solches Werk zu treiben, wird demnach bei den vorliegenden Dimensionen eine mittlere tägliche Schwankung in dem relativen Manometerstand von circa 10^{cm} Quecksilbersäule nöthig sein. Denken wir uns als Bewegungsursache die Ebbe und Fluth des Meeres und vielleicht in dem Raume (Fig. 8), in welchem die Gefässe A und B stehen, noch ein drittes Gefäss angebracht, welches mit Luft gefüllt ist, deren Spannung ebenfalls durch das Steigen und Fallen des Wassers geändert wird, und denken wir uns dieses Gefäss durch ein Rohr mit einem als Arbeitsmaschine eingerichteten Wagemanometer, wie in Fig. 10 dargestellt ist, verbunden, so wird ein vollständiger Registrirapparat für die Gezeiten eingerichtet sein, der so lange in Thätigkeit bleibt, als das Papier reicht. Schon die Fluthhöhe in Ham-

burg, welche 1,86 m im Mittel beträgt, wird im Stande sein, die Spannung der Luft im Gefässe um mindestens 10 cm Quecksilbersäule zu ändern und liefert demnach über 17000 cmgr[1]) mittlere Arbeit pro Tag. In Cuxhaven beträgt die mittlere Fluthhöhe 2,82 m, es würde demnach hier ein Apparat von den oben angegebenen Dimensionen aber 60000 cmgr Arbeit pro Tag im Mittel liefern und so nahezu 10 gewöhnliche Regulatorwerke treiben können. An der Westküste Frankreichs und an der Themse haben wir 6 m Differenz zwischen dem mittleren Hochwasser und Niedrigwasser, es würden hier demnach schon über 24 Regulatorwerke getrieben werden können, da hier $\eta = 30^{cm}$ beträgt. Hier wird $H = 616^{gr}$ genommen werden können und wird die mittlere Bewegung der Röhre circa 62 cm betragen.

Im grossen Ocean ist die Fluthhöhe im Allgemeinen zu klein, sie beträgt etwa nur 1 m, und müssen hier andere Dimensionen des Motors gewählt werden. Ebenso werden wir bei den vorliegenden Dimensionen kaum durch Aenderungen im Druck und der Temperatur der Atmosphäre hinreichende Arbeit zur Betreibung der Registrirapparate bekommen können. Wir können die durch diese Ursachen hervorgebrachte mittlere Aenderung im relativen Manometerstand höchstens zu 2 cm Quecksilbersäule annehmen, was $L = 340^{cmgr}$ gibt. Es würde zur Betreibung eines gewöhnlichen Regulatorwerkes eine tägliche Temperaturschwankung von 40° nöthig sein.

Denken wir uns die Zuleitungsröhre D in Fig. 3 möglichst eng und den Querschnitt Q sehr klein gegenüber E, so bekommen wir

$$D = 0 \text{ und } Q : E = 0;$$

dann wird der Ausdruck für die mittlere tägliche Arbeit einfach

$$L = \frac{1}{4} \cdot \frac{C^2}{Q} \eta^2,$$

woraus wir sehen, dass die Arbeitsfähigkeit proportional der vierten Potenz der lichten Weite der Röhre wächst. Würden wir die bewegliche Röhre etwa 100 mm weit nehmen, Q constant lassen, aber E sehr gross machen, so würde die Arbeit des Apparates für $\eta = 2^{cm}$ den Werth $L = 41820^{cmgr}$ haben und würden wir dann in unseren Gegenden bloss durch die täglichen Schwankungen der Lufttemperatur und des Barometerstandes ein sehr kräftiges Werk treiben können.

Um dann nicht zu viel Quecksilber anwenden zu müssen, kann man sowohl in der Röhre A (Fig. 10) als auch im oberen Theil des

1) Die Ebbe und Fluth tritt zweimal in jedem Tag ein.



Troges die Eisengewichte O und P im Quecksilber schwimmen lassen und wird deren untere Flächen nur so weit vom Trogboden abstehen lassen, als die Verminderungen von y und z (Fig. 3) betragen können.

Benutzt man anstatt Quecksilbers eine andere Flüssigkeit zum Absperren der Luft, vielleicht Wasser, so bekommt man wesentlich grössere Arbeitsleistungen, wegen der grösseren Bewegungen, muss aber auch das Gefäss, in welchem die Luft comprimirt wird, um ebensoviel grösser machen. Es würde dann $C = 6{,}1^{gr}$ und $B = 1{,}5^{gr}$ zu setzen sein, was

$$L = 9{,}2\,\eta^{2\,\text{cmgr}}$$

gibt. Die Aenderungen in der Temperatur und dem Druck der Atmosphäre würden dann $\eta = 25^{cm}$ (Wassersäule) ergeben, und würde dies

$$L = 5700^{\text{cmgr}}$$

liefern, während bei denselben Röhrenweiten, aber der Absperrung der Luft durch Quecksilber, L nur 340^{cmgr} war. Die Leistung bei Wasser ist theoretisch die 13,6fache, wenn das Luftvolumen das 13,6fache ist; sonst geht durch die grosse Aenderung im Volumen bei der Bewegung des Manometers viel Druckhöhe verloren.

Man sieht, dass man hier durch grosse Dimensionen ganz respectable Arbeitsmengen bekommen kann und dass der Betrieb der Registrirmechanismen durch die täglichen Schwankungen in dem Druck und der Temperatur der Atmosphäre durchaus nicht unmöglich sein dürfte, dass aber die Verwendbarkeit der Gezeiten des Meeres auf diese Weise ausser allem Zweifel steht.

Sowie man aber wegen des zu hohen Preises von der Verwendung von Quecksilber absieht und eine andere Flüssigkeit anwendet, wird man wohl am besten eine ganz andere Einrichtung anwenden können. In Fig. 11 stellt A ein Gewicht dar, welches zum Theil in eine Flüssigkeit eingetaucht ist. Diese Flüssigkeit befindet sich in den communicirenden Gefässen B und C, von denen wir uns C offen oder geschlossen denken können. Wir nehmen hier nur an, dass auf der Oberfläche der Flüssigkeit ein Druck lastet, der einer Flüssigkeitssäule s entspricht. Auf der Oberfläche von B lastet natürlich der Luftdruck, dessen Grösse wir uns durch eine Flüssigkeitssäule gemessen denken müssen, deren Höhe wir mit b bezeichnen wollen. Das Gewicht A soll an einer ähnlichen Vorrichtung wie die Röhre A in Fig. 10 hängen und an der Rolle C (Fig. 10) den Zug P ausüben.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes werden dann ausgedrückt durch die Gleichungen

$$P = G - D\sigma$$
$$W = Ey + M + Fz - D\sigma$$
$$s + y = b + z$$
$$x = z - \sigma,$$

woraus wir die Differentialgleichungen der Bewegung

$$0 = dG - Dd\sigma$$
$$0 = Edy + Fdz - Dd\sigma$$
$$ds + dy = db + dz$$
$$dx = dz - d\sigma$$

ableiten können. Sehen wir von der Veränderlichkeit des Barometerstandes ab, so können wir $db = 0$ setzen. Aus den Differentialgleichungen der Bewegung bekommen wir folgende drei Coëfficienten:

$$M = \frac{dx}{ds} = \frac{E}{E+F} \quad \text{für } dG = d\sigma = 0$$
$$N = \frac{dG}{ds} = \frac{ED}{E+F-D} \quad \text{für } dx = 0$$
$$O = -\frac{dx}{dG} = \frac{(E+F-D)}{D(E+F)} \quad \text{für } ds = 0.$$

Es bedeuten hierin:

M die Bewegung, welche die Aenderung des Druckes s um 1^{cm} Flüssigkeitssäule dem Gewichte A ertheilt, wenn der Zug P constant bleibt;

N die bewegende Kraft, welche dieselbe Aenderung des Druckes besitzt;

O die Bewegung, welche bei constantem s und P die Gewichtsänderung von A um 1^{gr} dem Gewichte A ertheilt.

Wenn sich das Gewicht A nicht frei bewegen kann, sondern beim Steigen sowie beim Fallen einen Widerstand Π zu überwinden hat, so tritt bei der Aenderung des Druckes s um Δs nur die Bewegung

$$M\Delta s - 2\,O\Pi$$

ein und wird dabei eine Arbeit

$$A = (M\Delta s - 2\,O\Pi)\,\Pi$$

geleistet. Bezeichnen wir die mittlere tägliche Schwankung von s

mit Σ, so erhalten wir, wenn $\Pi = \frac{1}{4}$ der Σ entsprechenden bewegenden Kraft genommen wird, die mittlere tägliche Arbeit

$$L = \frac{1}{4} M N \Sigma^2.$$

Das Maximum der Leistungsfähigkeit erhalten wir, wenn wir $D = F$ und $F : E = O$ machen, und zwar wird dann

$$L = \frac{1}{4} D \Sigma^2.$$

Nehmen wir den Durchmesser von A und B etwa 11^{cm} und den des Gefässes C zehnmal so gross, so bekommen wir für Wasser:

$$F = D = 100^{gr} \text{ und } E = 10000^{gr},$$

also

$$M = 0{,}99^{cm}; \quad N = 99^{gr}; \quad O = 0{,}01^{cm}.$$

Es wird demnach

$$L = 24{,}5\,\Sigma^{2\,cmgr}.$$

Die Leistungsfähigkeit wird nun ganz von Σ und dieses wieder von der Natur der treibenden Kraft abhängen.

Denken wir uns das Gefäss C mit einem Gefäss, ähnlich wie beim Heronsbrunnen, in Verbindung gebracht, in welches das Meerwasser bei der Fluth eindringt und die Luft nach C treibt, so werden wir mit Leichtigkeit Werthe von Σ bis zu 100^{cm} und noch mehr bekommen können. Bei $\Sigma = 100^{cm}$ würde eine mittlere tägliche Arbeit von 245000^{cmgr} erhalten werden können, die bei grösseren Dimensionen noch wesentlich vermehrt werden könnte. Denken wir uns in die Flüssigkeit in C ein Gewicht gebracht und dieses etwa wie in Fig. 6 durch eine Windfahne gehoben und gesenkt, so werden wir die Aenderungen in der Windrichtung als treibende Kraft benutzen können. Bei grosser Fläche der Windfahne und an Orten, wo der Wind häufig schwankt, kann man schon ziemliche Kraft erhalten. An Orten, wo die Windrichtung mehr constant bleibt, kann auch der Druck gegen Platten wie in Fig. 7 zum Betreiben der Bewegungs- und Registrirmechanismen verwendet werden. Das Gefäss C können wir uns auch im Freien aufgestellt und mit Luft gefüllt denken. Da diese Luft dann feucht ist, werden wir die durch Aenderungen der Temperatur und des Druckes der Atmosphäre hervorgebrachten mittleren täglichen Schwankungen in s ungefähr zu 25^{cm} annehmen können und werden bei den beispielsweise vorausgesetzten Dimensionen circa 15000^{cmgr} mittlere tägliche

Arbeit erhalten können. Es könnte hier auch versucht werden, in C Aether zu bringen, welches zwischen 0 und + 30° pro 1°C. circa 15^{mm} Quecksilbersäule Spannungsänderung gibt. Hier würde dann 1° C. tägliche mittlere Schwankung in der Lufttemperatur $\Sigma = 20^{cm}$ geben, und würden bei 4° C. Temperaturänderung pro Tag wir eine tägliche mittlere Arbeit von 160000^{cmgr} erhalten können.

Die Vorrichtung Fig. 11 wird man auch in Anwendung bringen können bei dem Anemographen Fig. 6. Es war hier nöthig, zwei Schreibstifte anzuwenden, von denen der eine in der einen Hälfte der Windrose schreibt, während der andere sich zwar mitbewegt, aber von der Papierfläche abgehoben ist. Es wird dann vom Gefäss E (Fig. 6) aus das Rohr nach einem Gefäss B (Fig. 11) gehen und wird durch D (Fig. 6) das Gewicht A (Fig. 11) gehoben und gesenkt werden. Man kann dann die Einrichtung so treffen, dass das Anemometer mit zwei Schreibapparaten (Fig. 9) parallel neben einander versehen ist, dass diese ganzen Vorrichtungen mit den Lagern der Rollen B gehoben und gesenkt werden können und dass diese beiden Apparate sich an den beiden Seiten eines gleicharmigen Hebels angehängt befinden. Wenn dann der eine Schreibapparat niedergelassen ist, bis der Stift das Papier berührt, wird der andere in der Höhe schweben; es wird aber die Bewegung der Stifte in keiner Weise gehindert werden. Das Auslösewerk hat nur den Hebel zu drehen und wird, da die Gewichte auf beiden Seiten des Hebels ausgeglichen sind, bis auf das Eigengewicht des nur wenige Gramm wiegenden schreibenden Stiftes, fast nur die Reibungswiderstände zu überwinden haben, die man so klein als möglich zu machen hat, um dem Winde möglichst wenig Arbeit abzuverlangen, da diese stets auf Kosten der Genauigkeit in der Richtung erhalten wird.

Aus den vorhergehenden Rechnungen, welche eben nur als Ueberschlagserörterungen anzusehen sind, wird man erkennen, dass der Gedanke, die Aenderungen im Zustande der Atmosphäre zum Betrieb von Arbeitsmaschinen zu verwenden, nicht auf so ganz unsicheren Füssen ruht, als dies auf den ersten Blick vielleicht erscheint. Allerdings weiss ich, dass die Anlagen nicht billig werden und dass man zur Anbringung einer selbstthätigen Aufziehvorrichtung nur dann sich entschliessen wird, wenn es sich um Aufstellung eines Registrirapparates an unbewohnten Orten handelt. Namentlich wenn man die Schwankungen im Druck und der Temperatur der Atmosphäre zum

Betrieb der Uhrwerke verwenden will, werden sehr grosse Luftgefässe in Anwendung gebracht werden müssen, und wird sich deren Grösse ganz nach der erforderlichen täglichen Arbeit und nach den Temperaturschwankungen am Orte richten. Die Verwendung von Aether wird die Dimensionen etwas kleiner zu machen gestatten.

Für 3000 Mark wird sich aber hier schon etwas erreichen lassen; sollte selbst diese Einrichtung das Doppelte kosten, so wird man doch immer noch billiger wegkommen, als wenn man einen Mann zur Besorgung des Aufziehens gebrauchen wollte. Vollständig überzeugt bin ich aber davon, dass an den Ufern des Meeres die Verwendung der Gezeiten desselben nicht nur möglich, sondern vortheilhaft sich erweisen wird. Mir scheint das Problem, auf einer einsam gelegenen unbewohnten kleinen Insel einen Registrirapparat aufstellen zu können, der jahrelang arbeiten kann, ohne dass ein Mensch sich um denselben zu kümmern hat, und der über alle meteorologischen Vorgänge genauen und stetigen Aufschluss gibt, als vollständig und zufriedenstellend gelöst.

Zwar ist diese Lösung vorläufig nur eine auf dem Papier stehende theoretische, es kann aber an der praktischen Ausführbarkeit kaum gezweifelt werden.

Mechanische Ableitung der Mittel.

Ich habe schon in der Einleitung hervorgehoben, dass die Curvenregistrirung dem automatischen Typendruck vorzuziehen ist, weil sie eine leichtere Uebersicht über den Gang der Erscheinungen gestattet und namentlich die mechanische Ableitung der Mittelwerthe wesentlich erleichtert. Bei der in Fig. 9 dargestellten Einrichtung des Registrirmechanismus wird das Instrument auf dem mit gleichförmiger Geschwindigkeit sich bewegenden Papierstreifen eine continuirliche Curve aufzeichnen, deren Ordinaten y, welche wir von einer am Rand gelegenen Nullinie an uns gemessen denken können, den Gang des Phänomens darstellen, für welches das Instrument eingerichtet ist. Wir denken uns ein Stück der Curve abgegrenzt durch zwei Ordinaten y_1 und y_2, welche zu den Abscissen x_1 und x_2 gehören. Dann werden diese Ordinaten, die Curve und die Nullinie eine Fläche einschliessen, deren Grösse J sich folgendermassen ausdrücken lässt:

$$J = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx. \qquad (1$$

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Fortrückens des Streifens mit b, mit t_1 die Zeit der Markirung bei x_1 und mit t_2 die bei x_2, so ist auch

$$J = b\int_{t_1}^{t_2} y\,dt. \tag{2}$$

Würden die Ordinaten bekannte Functionen der Zeit sein, so würden wir J berechnen können; dies ist jedoch nicht der Fall. Wir können aber die Grösse J mechanisch mit Hilfe der Planimeter finden, und scheint mir zu diesen Zwecken namentlich das von dem Civilingenieur F. H. Reitz in der Zeitschrift für Vermessungswesen (Band 7 Heft 5, 1878) vorgeschlagene Planimeter, welches nur aus dem mit der Rolle versehenen Fahrarm besteht, dessen eines Ende den Stift trägt, während das andere an einer geraden Linie geführt wird, die parallel der Abscissenachse liegt, besonders geeignet. Bezeichnen wir mit p_1 die Ablesung am Planimeter vor der Umfahrung der Fläche, mit p_2 die Endablesung und mit a eine Constante, so ist

$$J = a\,(p_2 - p_1). \tag{3}$$

Dividirt man die Fläche J durch ihre Länge $(x_2 - x_1)$, so bekommt man die Höhe eines Parallelogrammes von derselben Länge und demselben Flächeninhalt, und ist dieser Werth identisch mit dem arithmetischen Mittel aus den y, also gleich der mittleren Ordinate M.

Wir erhalten[1]

$$M = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} y\,dt = \frac{a}{b}\cdot\frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1} = c\,\frac{p_2 - p_1}{t_2 - t_1}. \tag{4}$$

Das Resultat wird demnach sein, dass wir den mittleren Werth der Ordinaten y in der Zeit von t_1 bis t_2 dadurch erhalten, dass wir die Differenz der Ablesungen am Planimeter vor und nach der Umfahrung der Fläche dividiren durch $(t_2 - t_1)$ und multipliciren mit einer empirisch oder auch theoretisch zu bestimmenden Constanten.

Der Civilingenieur F. H. Reitz in Hamburg hat nun an dem von ihm construirten Fluthmesser eine Vorrichtung angebracht, welche die Ableitung der Mittelwerthe selbstthätig vornimmt. Ich kann diese Vorrichtung auch leicht bei meinen Registrirapparaten anbringen und habe dieselbe in Fig. 9 angedeutet. J ist eine ebene horizontale Scheibe, welche durch die Achse L um eine verticale Achse mit gleichförmiger Geschwindigkeit gedreht wird, vermittelst desselben Uhrwerkes, das auch die

Achse F dreht. CC trägt nicht nur den Stift D, welcher durch seine Schwere auf das Papier drückt, sondern auch eine Säule, in welcher die Rolle K leicht drehbar gelagert ist. Die Achse von K ist radial zur Scheibe J. Die Säule, an welcher K sicht befindet, kann sich leicht auf und nieder bewegen, so dass K durch die Schwere auf die Platte drückt und die Umfangsgeschwindigkeit von K stets gleich der tangentialen Geschwindigkeit des darunter befindlichen Punktes der Platte ist. Ein Gleiten von K über die Platte hin darf keine Bewegung desselben hervorbringen, und darf auch die Scheibe nie unter K hingleiten, sondern es muss stets K auf der Scheibe rollen. Wir denken uns den Apparat so justirt, dass wenn der Stift D auf der Nullinie steht, sich K über dem Drehpunkt der Scheibe befindet und demnach trotz der Drehung derselben in Ruhe ist. Dann wird jederzeit der Abstand der Rolle vom Mittelpunkt der Scheibe gleich y sein und wird, wenn wir mit b_1 die Geschwindigkeit der Scheibendrehung bezeichnen, in der Zeit dt sich ein Punkt der Rolle um die Strecke dw bewegen, welche gegeben ist durch

$$dw = b_1 y dt.$$

Wir bezeichnen den Umfang der Rolle K mit u, die Ablesung an derselben zur Zeit t_1 mit π_1 und zur Zeit t_2 mit π_2 und erhalten

$$u(\pi_2 - \pi_1) = b_1 \int_{t_1}^{t_2} y\, dt, \tag{5}$$

woraus sich

$$\int_{t_1}^{t_2} y\, dt = \frac{u}{b_1}(\pi_2 - \pi_1) \tag{6}$$

ergibt. Aus Gleichung (2) und (6) folgt dann

$$J = \frac{bu}{b_1}(\pi_2 - \pi_1) \tag{7}$$

und daraus endlich

$$M = \frac{u}{b_1} \cdot \frac{\pi_2 - \pi_1}{t_2 - t_1} = c_1 \frac{\pi_2 - \pi_1}{t_2 - t_1'}. \tag{8}$$

Die Ablesungen der Umdrehungszahlen der Rolle K, π_1 und π_2 zu den Zeiten t_1 und t_2, werden uns demnach den mittleren Werth der Ordinaten y innerhalb dieser Zeiten ganz ähnlich wie das Planimeter ergeben und werden sich beide Angaben controliren.

Für uns nun haben die Ordinaten y und deren Mittelwerth M in der Zeit $t_2 - t_1$ wenig Interesse, sondern wir messen die y, um daraus gewisse Werthe u, v, w, etc. herzuleiten, welche in unserem Falle die meteorologischen Elemente, als Druck und Temperatur der Atmospäre, Windrichtung und Windstärke etc. sein werden. Wenn wir dann die Mittel M aus den Registrirungen ableiten, so thun wir dies, um die mittleren Werthe der Elemente $u, v, w \ldots : U, V, W \ldots$ erhalten zu können.

Ich habe nun in der Einleitung gefordert, dass die Bewegungen der Manometerröhren stets proportional den bewegenden Ursachen sein müssen.

In den meisten Fällen können wir dies erreichen, so beim Barographen und bei den Thermographen sicher; dass es auch bei den neuen, noch nicht ausgeführten Instrumenten möglich sein wird, scheint mir zweifellos zu sein. Demnach werden wir die Ordinaten der einzelnen Registrircurven bei den meisten Instrumenten darstellen können durch lineare Functionen von den Formen

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 w + \ldots \\ y_2 = a_2 + b_2 u + c_2 v + d_2 w + \ldots \\ \vdots \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \tag{9}$$

Wenn wir Mittelwerthe bilden, so bekommen wir nach den Gleichungen (4)

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} (a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 w + \ldots)\, dt \\ M_2 = \dfrac{1}{t_2 - t_1}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} (a_2 + b_2 u + c_2 v + d_2 w + \ldots)\, dt \\ \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \tag{10}$$

und daraus, da die Mittelwerthe der Elemente $u, v, w \ldots$ durch folgende Gleichungen auszudrücken sind

$$U = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u\,dt; \quad V = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v\,dt; \quad W = \frac{1}{t_2 - t_2}\int_{t_1}^{t_2} w\,dt, \text{ etc.,} \tag{11}$$

endlich die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} M_1 = a_1 + b_1 U + c_1 V + d_1 W + \ldots \\ M_2 = a_2 + b_2 U + c_2 V + d_2 W + \ldots \\ \qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \tag{12}$$

Setzen wir voraus, dass wir so viel Registririnstrumente mindestens haben, als Elemente in den Reductionsgleichungen vorkommen, so wird das System (12), aus den durch mechanische Integration erhaltenen mittleren Ordinaten der Registrircurven M, die Mittelwerthe der einzelnen Elemente abzuleiten gestatten.

Bei meinem Barothermographen haben wir so drei Instrumente, den Barographen, den Thermographen für die Manometer und den Thermographen für die Temperatur der Atmosphäre. Bezeichnen wir die gleichzeitigen Ordinaten mit y_1, y_2 und y_3 und mit β, τ und t die Elemente, so bekommen wir die Reductionsgleichungen, wie schon früher abgeleitet wurde:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1 + b_1\beta + c_1\tau \\ y_2 &= a_2 + b_2\beta + c_2\tau \\ y_3 &= a_3 + b_3\beta + c_3\tau + d_3 t \end{aligned}\right\} \quad (13$$

und daraus die Gleichungen zur Bestimmung der Mittel

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= a_1 + b_1 B + c_1 T_1 \\ M_2 &= a_2 + b_2 B + c_2 T_1 \\ M_3 &= a_3 + b_3 B + c_3 T_1 + d_3 T. \end{aligned}\right\} \quad (14$$

Man hat also nicht nöthig, die Registrircurven abzulesen und zu reduciren. Wenn man jede derselben mit dem Planimeter integrirt und daraus die M bestimmt, erhält man aus denselben Gleichungen, welche im einzelnen Falle die Elemente aus den Ordinaten geben, die Mittel der Elemente aus den Ordinatenmitteln.

Der Registrirapparat für Ebbe und Fluth des Meeres wird wahrscheinlich von der Temperatur des Manometers und auch von der Lufttemperatur beeinflusst werden und wird etwa nach der Form

$$y_4 = a_4 + c_4\tau + d_4 t + e_4 h \quad (15$$

zu reduciren sein, woraus sich

$$M_4 = a_4 + c_4 T_1 + d_4 T + e_4 H \quad (16$$

ergibt. Da T_1 und T bekannt sind aus den Gleichungen (14), wird die Herleitung von H keine Schwierigkeiten bieten.

Bei den angeführten Apparaten wird die Ableitung der Mittelwerthe, sei es durch Integration der Registrircurven durch ein Planimeter oder sei es durch die selbstthätige Integrirung durch eine Rolle auf einer rotirenden Scheibe, stets einen Sinn haben. Anders ist es aber bei den in Fig. 5 bis 7 dargestellten Regen- und Verdunstungs-

messern und Anemometern. Wir bekommen hier zwar ebenfalls durch Integration mittlere Ordinaten der Registrircurven, aber diese geben hier nicht so einfache mittlere Werthe der Elemente, da die Elemente vielfach nicht lineare Functionen der Ordinaten sind.

Würden wir den Apparat, welcher die Verdunstung und die Regenmenge misst, mit einem Integralapparat versehen, so würden wir aus der mittleren Ordinate M die mittlere Wassermenge in den Gefässen B und C bekommen, und würde diese Zahl deshalb nicht viel nützen, weil der Regen auf die Fläche AA fällt, während die Verdunstungsoberfläche nur die Grösse BB hat. Würden diese Flächen gleich gross sein, so könnte der Werth M eher eine gewisse Bedeutung haben.

Bei dem Manometer, welches den Winddruck (Fig. 6) angibt, ist

$$y = \text{Const}\, p,$$

wenn p den Druck auf die Flächeneinheit bedeutet. Der Mittelwerth von M würde hier den mittleren Winddruck auf die Flächeneinheit, ohne Rücksicht auf die Richtung, geben.

Die beiden anderen Curven geben durch ihre Ordinaten die Richtung des Windes nach der Formel $y = \text{Const}\,\varphi$, und werden wir aus den Mittelwerthen der Ordinaten die mittlere Windrichtung, ohne Rücksicht auf die Stärke, bekommen, was namentlich da sehr bedenklich erscheint, wo häufig Calmen auftreten. Wo selten oder gar keine Calmen vorkommen, werden diese Mittelzahlen eine gewisse Bedeutung haben.

Wenn aber die vier Manometer, welche die Einrichtung eines Anemographen nach dem in Fig. 7 dargestellten Principe erfordert, mit selbstthätigen Integralapparaten versehen werden, dann wird die Bedeutung der mittleren Ordinaten erst recht bedenklich und hängt ganz von der Form von $f(\varphi)$ ab. Zweifellos stellen dann die vier Werthe von M die mittleren Winddrücke in den vier Hauptrichtungen dar. Sollte $f(\varphi) = \cos\varphi$ gesetzt werden können, so würde die Sache am einfachsten sein. Dann würden die Werthe

$$X = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} N\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P\cos\varphi\,dt$$

$$Y = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} E\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P\sin\varphi\,dt$$

die mittleren Componenten der Kräfte P, bezogen auf ein rechtwinkliges Achsenkreuz, in den Hauptrichtungen der Windrose darstellen. Der Werth

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X} \tag{17}$$

würde dann die Richtung der Resultante dieser Kräfte und endlich der Druck

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} \tag{18}$$

den n^{ten} Theil der Resultante aus den n Drücken P darstellen, würde also als ein mittlerer Winddruck zu betrachten sein.

Der Windcomponentenintegrator des Herrn v. Oettingen gibt die mittleren Werthe der Geschwindigkeitscomponenten, wenn man voraussetzt, dass die Geschwindigkeit eines Robinsonkreuzes jederzeit proportional der Windgeschwindigkeit ist, was ich stark bezweifle. Es bildet dieser Apparat die Werthe

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} n\,dt &= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} v\cos\varphi\,dt = x \\ \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} e\,dt &= \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t} v\sin\varphi\,dt = y. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Die daraus hergeleiteten Grössen

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} \text{ und } \chi = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{20}$$

geben die Richtung der Resultante aus den einzelnen Geschwindigkeiten und die mittlere Geschwindigkeit, genauer ebenfalls den n^{ten} Theil aus der Resultante von n Geschwindigkeiten.

Der Werth φ, wie er aus Gleichung (17) folgt, wird mit dem aus Gleichung (20) erhaltenen im Allgemeinen nicht identisch sein können, es werden diese beiden Werthe aber wahrscheinlich unter sich mehr übereinstimmen, als mit der mittleren Richtung, wie sie die Integration der Registrircurven des Apparates Fig. 6 ergeben würde.

Dagegen muss die etwa aus R (Gleichung 18) unter der Annahme

$$R = C\gamma v^2$$

hergeleitete mittlere Geschwindigkeit wesentlich von χ (Gleichung 20) verschieden sein. Es wird auch R nicht mit dem durch den Apparat Fig. 6 erhaltenen mittleren Werth von P übereinstimmen können.

Würde dagegen für das Anemometer mit vier Druckplatten, normal zu den Hauptrichtungen, die Form $f(\varphi) = \cos^2 \varphi$ gelten, so würden die mittleren Drücke auf jede der Platten mittleren Werthen der Quadrate der Geschwindigkeitscomponenten proportional sein. Es würde

$$\frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} N dt + \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} E dt = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} P dt$$

sein und würde die algebraische Summe der vier mittleren Drücke gleich dem einfachen mittleren Druck des Windes sein, also mit dem Werthe aus Fig. 6 übereinstimmen. So verschiedenartige Werthe die einzelnen Systeme von Anemometern auch geben, so hat jedes Resultat doch seine Bedeutung und kann man vorläufig noch nicht behaupten, welche von den Mittelzahlen für die Wissenschaft die vortheilhaftere sein wird. Jedenfalls wird man sehen, dass wenn die drei Apparate: der Geschwindigkeitscomponentenintegrator von Oettingen und meine beiden Anemometer mit selbstthätigen Integralwerken auf einem Observatorium gemeinsam aufgestellt würden, sie wesentlich zur Erweiterung unserer aërodynamischen Kenntnisse beitragen könnten.

Ueber das Kalibriren von Thermometern.

Von

Dr. **M. Thiesen.**

Im Anschluss an den von Herrn Dr. Pernet dem permanenten Comité des internationalen Congresses für Meteorologie erstatteten Bericht über die Behandlung von Normalthermometern will ich im Folgenden die Beschreibung einer Kalibrirungsmethode geben, welche sich bereits seit zwei Jahren in vielfacher Anwendung bewährt hat, und daran eine kurze Besprechung der älteren bekannt gewordenen Kalibrirungsmethoden und der technischen Ausführung der Kalibrirung knüpfen.

1. Auf der mit der Thermometerröhre fest verbundenen Scala, welche zunächst als durchaus gleichmässig getheilt vorausgesetzt werden soll, wähle man gleich weit von einander entfernte Punkte — etwa die 5^0 oder 10^0 Striche — für welche die Kaliberfehler direct bestimmt werden sollen. Diese Punkte mögen die Hauptpunkte genannt und mit $0, 1, \ldots, n$ bezeichnet werden. Für die dazwischen liegenden Punkte wird es im Allgemeinen genügen, die Fehler durch Interpolation aus den Fehlern der Hauptpunkte abzuleiten, da nach der Herstellungsweise der Glasröhren eine meistens stetige Aenderung ihres Kalibers anzunehmen ist und auch erfahrungsgemäss stattfindet. Die durch zwei benachbarte Hauptpunkte abgegrenzten Volumina der Röhre werden nun einander nicht genau gleich sein; sie mögen die Werthe $v_1, \ldots, v_n$ besitzen, so dass v_i das zwischen den Punkten $i-1$ und i liegende Volumen bezeichnet. Doch werden die Unterschiede dieser Volumina bei Röhren, wie sie zu Thermometern, zumal Normalthermo-

metern, gebraucht werden, nur geringe sein. Nennt man daher δ_i die Abweichung des Volumens v_i von einem Normalvolumen v, so dass

$$v_i = v + \delta_i$$

ist, so werden die δ als kleine Grössen anzusehen sein, deren höhere Potenzen mit grosser, meist genügender Annäherung vernachlässigt werden können. Bezeichne ferner V_i das Volumen zwischen den Hauptpunkten 0 und i, so dass also

$$V_i = v_1 + v_2 + \cdots + v_i$$

ist, und seien die Grössen $\varDelta$ durch die Beziehung definirt

$$\varDelta_i = \varDelta_{i-1} + \delta_i,$$

so wird

$$V_i = iv + \varDelta_i - \varDelta_0.$$

Die Grössen $\varDelta$ sind also die durch die Kalibrirung zu bestimmenden Fehler der Hauptpunkte; d. h. wenn die Scala so getheilt wäre, dass gleichen Ablesungsdifferenzen gleiche Röhrenvolumina entsprächen, so müssten die Hauptpunkte die Bezeichnung $0 + \varDelta_0$, $1 + \varDelta_1, \ldots,$ $n + \varDelta_n$ tragen.

Die Kalibrirung denken wir uns in der Weise ausgeführt, dass die abgetrennten Fäden möglichst genau eine ganze Anzahl mal das Normalvolumen v enthalten. Stellt man dann den Faden mit seinem oberen Ende in der Nähe eines der Hauptpunkte i ein, so wird sich auch das untere Ende in der Nähe eines Hauptpunktes k befinden, falls der Faden nahe das Volumen $(i-k)v$ umfasst. Das Volumen, um welches der Faden grösser ist als das zwischen i und k liegende Volumen, möge mit (i,k) bezeichnet werden; ein negativer Werth der Grösse bezeichne ein entsprechend zu kleines Volumen des Fadens. Nennt man nun $f_{(i-k)}$ das Volumen des Faden selbst, so ist nach den eingeführten Bezeichnungen

$$f(i-k) = V_i - V_k + (i,k),$$

oder auch, falls man $[i-k] = f_{(i-k)} - (i-k)v$ einführt,

$$[i-k] = \varDelta_i - \varDelta_k + (i,k). \tag{1}$$

Das Volumen (i,k) kann in grosser Annäherung als beobachtet angesehen werden, indem man für dasselbe die ihm entsprechende auf der Scala abgelesene Länge einführt; es ist also gleich der Differenz der Ablesungen der beiden Fadenenden nach Weglassung der zwischen k und i liegenden Scalentheile. Denn da die Längen auf der Scala bis auf Grössen von der Ordnung der δ dem Röhrenvolumen proportional sind, (i,k) selbst aber als kleine Grösse dieser Ordnung gelten

kann, so begeht man unter der gemachten Annahme erst einen Fehler zweiter Ordnung.

Stellt man nun den Faden mit seinen Enden in der Nähe anderer Hauptpunkte ein, so gewinnt man neue der Gleichung (1) analoge Gleichungen, in denen die Grösse $[i-k]$ dieselbe geblieben ist. Aehnliche Gleichungen, aber mit einem anderen Werthe von $[i-k]$, liefert jeder neue Faden. Aus dem ganzen System dieser beiden linearen Gleichungen, in denen, wie schon erwähnt, die (i, k) als beobachtete Grössen anzusehen sind, wird man die $[i-k]$ eliminiren, die Δ bestimmen können. Doch bleiben zwei der Δ nothwendigerweise unbestimmt, da noch nichts über den Nullpunkt, von dem aus die Zählung erfolgen soll, und über die Grösse des Normalvolumens festgesetzt ist. Setzt man in der That für jedes Δ_i die Grösse $\Delta_i + a + bi$, wo a und b beliebige Constanten sind, so ändert sich in den Gleichungen (1) nichts weiter, als dass $[i-k]-(i-k)b$ an Stelle von $[i-k]$ tritt; die nach Elimination der $[i-k]$ resultirenden Gleichungen bleiben also völlig ungeändert. Man wird hienach für zwei der Δ willkührliche Werthe annehmen können; am passendsten wird man in den meisten Fällen die Fehler des Null- und des Siedepunktes gleich Null setzen.

2. Die aus den Gleichungen (1) folgenden wahrscheinlichsten Werthe der Grössen Δ müssten mittelst der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet werden, und die Form dieser Gleichungen gestattet auch eine bequeme Aufstellung der Endgleichungen und die Elimination der Fadenlängen $[i-k]$. Allein die dann noch verbleibende Aufgabe, eine grössere Anzahl linearer Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten — bei einem 100^0 umfassenden Thermometer, das von 5^0 zu 5^0 kalibrirt werden soll, 19 — zu lösen, ist eine solche, dass man sie gerne vermeiden wird, wenn damit auch ein geringer Verlust an Genauigkeit verknüpft sein sollte[1]). Nun verdanken wir F. E. Neumann eine Methode, bei welcher die Beobachtungen in sehr symmetrischer Weise mit einander verknüpft werden und welche nur eine kurze einfache Rechnung erfordert[2]). Diese Methode, wie sie Neumann seinen

1) Bessel glaubt sogar, dass die strenge Behandlung einer Kalibrirung nach der Methode der kleinsten Quadrate die Kräfte eines jeden Rechners überschreiten würde.

2) Beschrieben von Dorn: „Die Station zur Messung von Erdtemperaturen zu Königsberg in Preussen" in den Schriften der physikal.-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg, 1872; auch von Wild: „Bericht über die Arbeiten zur Reform der schweizerischen Urmaasse", Zürich 1868.



Schülern mitzutheilen pflegte, erfordert, dass man alle Fäden benutzt, welche das Normalvolumen v resp. nahezu $1, 2, \ldots, n-1$ mal enthalten, mit diesen aber ganz bestimmte Einstellungen macht, deren Anzahl etwa gleich der Hälfte der überhaupt möglichen Einstellungen ist. Wie hier gezeigt werden soll, lässt sich die Methode zunächst, ohne die Rechnung zu vermehren, dahin erweitern, dass man alle Einstellungen benutzen kann, welche zu machen nicht der im unteren Theil der Röhre zurückbleibende Quecksilberfaden hindert. Aber auch in dem Falle, dass man nicht alle Fäden gewinnt oder dass man einzelne Einstellungen zu machen verhindert ist, führt die Methode auf Gleichungen, welche sich mittelst einer leichten, schnell convergirenden Annäherungsrechnung bequem lösen lassen.

Diese Methode beruht auf Folgendem. Schreibt man die Gleichungen (1), wie sie sich aus den Einstellungen desselben Fadens auf aufeinander folgende Hauptpunkte ergeben, hinter einander:

$$\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ [i-k] = \Delta_i - \Delta_k + (i,k) \\ [i-k] = \Delta_{i-1} - \Delta_{k-1} + (i-1, k-1) \\ [i-k] = \Delta_{i-2} - \Delta_{k-2} + (i-2, k-2) \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

und zieht man jede Gleichung von der vorhergehenden ab, so ergibt sich

$$\left.\begin{array}{l} \cdots\cdots\cdots \\ \delta_i - \delta_k = (i-1, k-1) - (i,k) \\ \delta_{i-1} - \delta_{k-1} = (i-2, k-2) - (i-1, k-1) \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (2$$

Ein ähnliches System von Gleichungen ergibt sich für jeden Faden. Alle diese Gleichungen verbinde man analog der Methode der kleinsten Quadrate so, dass man alle Gleichungen, welche ein bestimmtes δ mit dem Factor $+1$ enthalten, addirt und davon diejenigen subtrahirt, welche dasselbe δ mit dem Factor -1 enthalten. Wie nun diese Endgleichungen in dem ersten oben angeführten Falle, wenn alle Einstellungen erhalten sind — soweit das unten im Rohre noch vorhandene Quecksilber dieselben erlaubte —, ohne weiteres die δ und durch diese die Δ ergeben, möge das folgende Beispiel zeigen.

Tabelle I.

Kalibrirung durch Schätzen mittelst der Lupe des Thermometers *Th* I, auf der Röhre in ganze Grade getheilt

(mein Eigenthum, verfertigt von R. Fuess vorm. J. G. Greiner jun. & Geissler, Berlin).

Werthe der (i,k) in 0,01°

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k = 0$		− 42	− 4	−116	− 37	− 91	− 73	−130	−222	
1		+ 3	− 14	+ 27	− 72	+ 17	− 40	− 10	− 65	−151
2			+ 14	+ 13	+ 67	− 29	+ 53	+ 8	+ 45	− 16
3				+ 35	+ 26	+ 90	− 5	+ 89	+ 43	+ 87
4					+ 39	+ 39	+ 98	+ 20	+114	+ 81
5						+ 45	+ 51	+120	+ 35	+145
6							+ 52	+ 70	+130	+ 55
7								+ 62	+ 84	+156
8									+ 65	+ 90
9										+ 64

Werthe der $\delta_i - \delta_k$ und der übrig bleibenden Fehler in 0,01°

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$k = 1$			− 28 − 1	− 31 + 8	− 44 0	− 54 − 4	− 51 0	− 63 0	− 65 − 1	− 71 − 1
2			− 11 + 3	− 27 − 1	− 40 − 9	− 43 − 5	− 36 + 3	− 48 + 3	− 55 − 3	− 49 + 9
3	+ 28 + 1	+ 11 − 3	00	− 21 − 9	− 13 + 4	− 23 + 1	− 24 0	− 36 + 1	− 35 + 3	− 42 + 2
4	+ 31 − 8	+ 27 + 1	+ 21 + 9	00	− 04 + 1	− 13 − 1	− 08 + 4	− 25 0	− 25 + 1	− 38 − 6
5	+ 44 0	+ 40 + 9	+ 13 − 4	+ 04 − 1	00	− 06 + 1	− 12 + 5	− 22 − 2	− 15 + 6	− 31 − 4
6	+ 54 + 4	+ 43 + 5	+ 23 − 1	+ 13 + 1	+ 06 − 1	00	− 07 − 6	− 19 − 6	− 10 + 4	− 20 0
7	+ 51 0	+ 36 − 3	+ 24 0	+ 08 − 4	+ 12 + 5	+ 07 + 6	00	− 10 + 3	− 14 − 1	− 26 − 7
8	+ 63 0	+ 48 − 3	+ 36 − 1	+ 25 0	+ 22 + 2	+ 19 + 6	+ 10 − 3	00	− 03 − 2	− 06 + 1
9	+ 65 + 1	+ 55 + 3	+ 35 − 3	+ 25 − 1	+ 15 − 6	+ 10 − 4	+ 14 + 1	+ 03 + 2	00	+ 01 + 7
10	+ 71 + 1	+ 49 − 9	+ 42 − 2	+ 38 + 6	+ 31 + 4	+ 20 0	+ 26 + 7	+ 06 − 1	− 01 − 7	00
$S_i =$	+407	+309	+155	+ 34	− 15	− 83	− 88	−214	−223	−282
$\delta_i =$	+41,9	+29,7	+15,5	+ 3,4	− 1,5	− 8,3	− 8,8	−21,4	−22,3	−28,2
$\Delta_i =$	+41,9	+71,6	+87,1	+90,5	+89,0	+80,7	+71,9	+50,5	+28,2	0

Die Werthe (i,k) sind Mittel aus zwei Beobachtungen, die so angeordnet wurden, dass eine etwaige der Zeit proportionale Aenderung der Fadentemperatur eliminirt wurde. Eine solche doppelte Einstellung empfiehlt sich sehr zur Vermeidung gröberer Beobachtungsfehler. Die Zahlen i, k entsprechen den einzelnen 10^0 Strichen. Beispielsweise mögen hier explicite die Einstellungen mit dem Faden von 70^0 Länge folgen.

untere	obere	(i, k)	(i, k)
Ablesung			Mittel
29,56	100,44	+ 88	+ 87
19,74	90,17	+ 43	+ 45
10,03	79,94	— 9	— 10
0,35	69,62	— 73	— 73
0,02	69,28	— 74	
10,06	79,95	— 11	
19,68	90,15	+ 47	
29,30	100,15	+ 85	

Aus den Werthen (i, k) gewinnt man dann nach Formel (2) durch successive Subtraction die Werthe der $\delta_i - \delta_k$, welche in die Tafel mit doppeltem Eingang zweimal mit verschiedenen Zeichen eingetragen werden. Die Addition der Verticalcolumnen dieser Tafel ergibt dann die Endgleichungen, deren Summe identisch verschwinden muss:

$$8\delta_1 = \Delta_{10} - \Delta_2 + 407$$
$$8\delta_2 = \Delta_{10} - \Delta_2 + 309$$
$$10\delta_3 = \Delta_{10} - \Delta_0 + 155$$
$$\cdots\cdots$$
$$10\delta_{10} = \Delta_{10} - \Delta_0 - 282.$$

Setzt man nun, was ja erlaubt ist,

$$\Delta_0 = 0; \quad \Delta_{10} = 0,$$

so geben die letzten Gleichungen unmittelbar die Werthe $\delta_3, \ldots, \delta_{10}$; aus den ersten beiden folgt durch Addition

$$10\Delta_2 = 716,$$

und demnach

$$8\delta_1 = 407 - 71{,}6; \; \delta_1 = 41{,}9. \quad 8\delta_2 = 309 - 71{,}6; \; \delta_2 = 29{,}7.$$

Durch Addition der δ ergeben sich dann die Δ. Das vorliegende Thermometer hat also folgende Kalibercorrectionen:



Ablesung (i)	Correction (Δ_i)	Differenz (δ_i)	Zweite Differenz
0°	0,00°		
10	+ 0,42	+ 0,42	
20	+ 0,72	+ 0,30	— 0,12
30	+ 0,87	+ 0,17	— 0,13
40	+ 0,91	+ 0,04	— 0,13
50	+ 0,89	— 0,02	— 0,06
60	+ 0,81	— 0,08	— 0,06
70	+ 0,72	— 0,09	— 0,01
80	+ 0,50	— 0,22	— 0,13
90	+ 0,28	— 0,22	— 0,00
100	0,00	— 0,28	— 0,06

Zur Beurtheilung der Genauigkeit der Bestimmung sind aus den berechneten δ die Grössen $\delta_i - \delta_k$ bestimmt und die Differenzen gegen die aus der Beobachtung unmittelbar abgeleiteten Grössen im Sinne Beobachtung — Rechnung mit kleinen Ziffern angegeben. Es möge hier noch, als auf ein Mittel, gröbere Beobachtungsfehler vor der Rechnung zu entdecken, darauf hingewiesen werden, dass in der Tabelle der $\delta_i - \delta_k$ die Differenzen je zweier Colonnen dieselbe Grösse darstellen, also bis auf Beobachtungsfehler einander gleich sein müssen.

3. Lässt sich die Tabelle der $\delta_i - \delta_k$ nicht wie im obigen Beispiele in zwei Rechtecke zerfällen, so muss zur Lösung der Endgleichungen eine Annäherungsrechnung eintreten. Diese Endgleichungen, wie sie durch Addition der einzelnen Colonnen der Tabelle da $\delta_i - \delta_k$ resultiren, haben die Form

$$p\,\delta_i = \delta_{k_1} + \delta_{k_2} + \cdots + \delta_{k_p} + S_i,$$

wenn S_i die numerische Summe der i^{ten} Colonne, $k_1, \ldots, k_p$ die Indices derjenigen Horizontalreihen bezeichnen, in welchen in der i^{ten} Colonne Zahlen stehen — i selbst kann dabei mitgerechnet werden oder nicht. Da nun die δ noch eine willkürliche Constante enthalten, so kann man noch die Summe von einer Anzahl δ gleich 0 annehmen und dadurch die rechten Seiten der Endgleichungon vereinfachen. Von der passenden Annahme dieser willkürlichen Beziehung und von der Reihenfolge, in welcher man die so vereinfachten Endgleichungen löst, hängt hauptsächlich der rasche Erfolg der Annäherungsrechnung ab. Diese Annäherungsrechnung selbst geschieht in der Weise, dass man in die rechten Seiten der Endgleichungen für die δ die zuletzt gefundenen angenäherten Werthe, oder, falls solche noch nicht vorhanden

sind, Null setzt und dadurch einen genäherten Werth des links stehenden δ gewinnt. Je zahlreicher die vorhandenen Beobachtungen sind, desto schneller führt die Rechnung zum Ziel. Gleichungen, in denen die rechten Seiten bis auf die numerische Grösse gleich sind, kann man bei der Rechnung zu einer Summe zusammenfassen und erst zum Schlusse die einzelnen δ berechnen.

Zur Erläuterung diene das folgende Beispiel, in welchem die willkürlichen Annahmen $\Delta_0 = 0$ und $\Delta_{12} = 0$ sind; die Indices entsprechen den Vielfachen von 100^{σ}.

Tabelle II.

Kalibrirung mittelst der Lupe des Thermometers *Th* VII

mit Milchglasscala, $1^{\sigma} = 0{,}4^{mm}$ (nahe $= 0{,}1^{0}$), Fuess Patent

(mein Eigenthum, verfertigt von R. Fuess, vorm. J. G. Greiner jun. & Geissler, Berlin).

Werthe der $\delta_i - \delta_k$ und der übrig bleibenden Fehler in $0{,}01^{\sigma}$

$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$k = 1$					+16 +5	+20 0	+26 −6	+46 +6				−43 −5
2					−09 −1	+03 +3	+06 −7	+24 +3	+03 +1			
3					−10 −8	+07 0	+18 −1	+34 +6	+12 +4	+09 −1		
4					−03 −13	+27 +9	+38 +7	+36 −3	+18 −2	+25 +4	+15 −4	
5	−16 −5	+09 +1	+10 +8	+03 +13	00	+14 +5	+19 −2	+20 −9	+01 −9	+14 +3	+04 −5	−48 +1
6	−20 0	−03 −3	−07 0	−27 −9	−14 −5	00	+12 0	+23 +2	+05 +3	+12 +9	−03 −4	−51 +7
7	−26 +6	−06 +7	−18 +1	−38 −7	−19 +2	−12 0	00	+10 +2	−09 +2	−17 −7	−16 −5	−70 0
8	−46 −6	−24 −3	−34 −6	−36 +3	−20 +9	−23 −2	−10 −2	00	−15 +4	−31 −13	−11 +9	−72 +7
9		−03 −1	−12 −4	−18 +2	−01 +9	−05 −3	+09 −2	+15 −4	00	+03 +2	−01 0	−58 +1
10			−09 +1	−25 −4	−14 −3	−12 −9	+17 +7	+31 +13	−03 −2	00	+01 +3	−66 −5
11				−15 +4	−04 +5	+03 +4	+16 +5	+11 −9	+01 0	−01 −3	00	−65 −6
12	+43 +5				+48 −1	+51 −7	+70 0	+72 −7	+58 −1	+66 +5	+65 +6	00
$S_i =$	−65	−27	−70	−156	−30	+73	+221	+322	+71	+80	+54	−473

Endgleichungen

$\Delta_0 = 0; \quad \Delta_{12} = 0$

$12\,(\Delta_8 - \Delta_4) = 586$

$11\,\delta_9 = 71 - \delta_1$

$10\,\delta_{10} = 80 - \delta_1 - \delta_2$

$9\,\delta_{11} = 54 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3$

$9\,\delta_{12} = -473 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4$

$5\,\delta_1 = -65 - \Delta_4 - \delta_9 - \delta_{10} - \delta_{11}$

$5\,\delta_2 = -27 - \Delta_4 - \delta_{10} - \delta_{11} - \delta_{12}$

$6\,\delta_3 = -70 - \Delta_4 - \delta_{11} - \delta_{12}$

$7\,\delta_4 = -156 - \Delta_4 - \delta_{12}$

	1.	2.	3.
	Annäherung		
$\Delta_8 - \Delta_4 =$	48,83	48,83	48,83
$\delta_9 =$	6,45	7,70	7,69
$\delta_{10} =$	8,00	8,81	8,77
$\delta_{11} =$	6,00	7,02	6,94
$\delta_{12} =$	−52,56	−51,67	−51,80
$-\Delta_4 =$	16,72	20,69	20,43
$\delta_1 =$	−13,75	−13,57	−13,59
$\delta_2 =$	5,66	5,91	5,90
$\delta_3 =$	−1,12	−0,78	−0,78
$\delta_4 =$	−12,39	−11,95	−11,97
$\Delta_4 =$	−21,60	−20,39	−20,44

Resultate

$\Delta_0 = 00$		$\Delta_7 = +2$	
	$\delta_1 = -14$		$\delta_8 = +26$
$\Delta_1 = -14$		$\Delta_8 = +28$	
	$\delta_2 = +6$		$\delta_9 = +8$
$\Delta_2 = -8$		$\Delta_9 = +36$	
	$\delta_3 = 0$		$\delta_{10} = +9$
$\Delta_3 = -8$		$\Delta_{10} = 45$	
	$\delta_4 = -12$		$\delta_{11} = +7$
$\Delta_4 = -20$		$\Delta_{11} = +52$	
	$\delta_5 = -3$		$\delta_{12} = -52$
$\Delta_5 = -23$		$\Delta_{12} = 00$	
	$\delta_6 = +6$		
$\Delta_6 = -17$			
	$\delta_7 = +19$		

Sind verhältnissmässig wenige und zerstreut liegende Beobachtungen vorhanden, so wird die Annäherungsrechnung nur langsam zum Ziele führen; es ist in diesem Falle angebracht, sich zuerst durch Herausgreifen von einzelnen Werthen der $\delta_i - \delta_k$ angenäherte Werthe zu verschaffen, mit denen man dann in die Endgleichungen eingeht.

4. Es bleibt noch übrig, die gemachten Voraussetzungen, soweit sie der Wirklichkeit nicht vollständig entsprechen, fallen zu lassen und die Modificationen anzugeben, welche sich dabei ergeben.

Die erhaltenen Fehler Δ sind nur insofern den aus den Beobachtungen zu folgernden gleich, als die den Grössen (i, k) entsprechenden Volumina den abgelesenen Scalentheilen proportional zu setzen sind; die Grösse der Abweichung hängt von der Kalibrität der Röhre, aber auch von der Genauigkeit ab, mit der die abgetrennten Fäden ihrem Sollwerthe entsprechen. Sollten nun diese Abweichungen gegenüber den Beobachtungsfehlern einen merklichen Werth haben,

so darf man die gewonnenen Kaliberfehler nur als erste Annäherungen ansehen; bringt man diese gehörig interpolirten Fehler an die ursprünglichen Ablesungen der Fadenenden an und wiederholt die Rechnung, so gewinnt man Verbesserungen der in erster Annäherung erhaltenen Fehler, die, mit jenen vereinigt, Kaliberfehler ergeben werden, die jetzt jedenfalls genügend genau sind. In extremen Fällen[1]) kann man diese doppelte Rechnung auch dadurch umgehen, dass man die Hauptpunkte nicht äquidistant wählt, sondern mittelst eines kurzen Fadens so bestimmt, dass dieselben nahe gleiche Volumina begrenzen. Häufig ist schon durch den Verfertiger die Theilung dem Volumen in dieser Weise angepasst[2]).

Die ungleichmässige Theilung der Thermometerscalen übt einen doppelten Einfluss. Geschieht die Bestimmung der (i, k) durch Schätzen in Bruchtheilen der Intervalle der Scala, nicht etwa auf einem Comparator in absolutem Maasse, dessen Verhältniss zur ganzen Scalenlänge bekannt ist, so wird namentlich durch eine ungleichmässige Theilung zwischen den Hauptpunkten die Grösse der (i, k) fehlerhaft. Ebenso verfälschen diese inneren Theilungsfehler unter allen Umständen bei der Anwendung des Thermometers dessen Ablesungen. Man wird diese Fehler daher stets bestimmen müssen, wenn sie die Genauigkeitsgrenze überschreiten, welche man erreichen will. Minder schädlich wirkt dagegen eine fehlerhafte Lage der Hauptpunkte selbst auf der Scala, welche, wie schon erwähnt, von den Fabrikanten oft absichtlich herbeigeführt wird. In diesem Falle geben die ohne Berücksichtigung dieser Theilungsfehler gefundenen Δ_i ebenfalls die Grössen an, welche zur Ablesung der betreffenden Hauptpunkte hinzugefügt werden müssen, um das entsprechende wahre Volumen zu erhalten; doch tritt der Uebelstand ein, dass, da diese Δ_i jetzt nicht mehr die reinen Kaliberfehler, sondern die Summe dieser und der Theilungsfehler bezeichnen, ein stetiger Verlauf derselben und damit die Möglichkeit einer genauen Interpolation nicht mehr vorhanden sein wird. Man muss sich in diesem Falle mit einer linearen Interpolation zwischen

1) Ein in der Sammlung der Berliner Universität aufbewahrtes Thermometer einer Berliner Firma zeigte z. B. eine Verringerung des Volumens um fast $^1/_5$ von einem zum anderen Ende.

2) Ein der kaiserl. Normal-Eichungscommission gehöriges, in 0,1° getheiltes Geissler'sches Thermometer (Nr. 101) würde bei gleichmässiger Theilung Fehler von 0,5° haben, während dieselben durch die Theilung so corrigirt sind, dass sie nur etwa 0,05° erreichen.



den benachbarten Δ_i begnügen. Dass bei regelmässig getheilten Scalen oder auch nach Elimination der Theilungsfehler die Kaliberfehler — abgesehen von einzelnen Punkten, deren Lage meist schon äusserlich durch eine Verunreinigung des inneren Kalibers oder durch die Zeichen einer nachträglichen Erwärmung der Röhre erkennbar ist — regelmässig verlaufen, zeigen 12 mir vorliegende Kalibrirungen solcher Thermometer.

Aus den angegebenen Gründen sollte man, da die Bestimmung der Theilungsfehler mehr Zeit und grössere Hilfsmittel erfordert als die Kalibrirung selbst, an Normalthermometer, deren Fehler fundamental bestimmt werden sollen, die Forderung einer bis auf einige Tausendstel Millimeter gleichmässigen Theilung, jedenfalls aber einer solchen Gleichheit benachbarter Intervalle stellen, dass das Auge mittelst einer Lupe keine Verschiedenheit zu erkennen vermag. Dieser Forderung genügten bisher selbst die so bekannten Geissler'schen Normalthermometer (Bonner wie Berliner) nicht; dass ihr aber genügt werden kann, zeigen die aus der Werkstatt von Herrn Fuess hervorgehenden Thermometer — wohl überhaupt das Vollkommenste, was jetzt von Einschlussthermometern geliefert wird.

Hat das Thermometer keine gleichmässige Theilung und kann man die Theilungsfehler der Scala bestimmen, so wird man dieselben an den abgelesenen Fadenenden anbringen. Die jetzt gewonnenen Δ sind dann reine Kaliberfehler, zu welchen, nachdem sie gehörig interpolirt sind, die benutzten Theilungsfehler zu addiren sind, um die Gesammtcorrection der einzelnen Striche zu erhalten.

5. Die Ausführung der Kalibrirung selbst erfordert zunächst das Abtrennen von Fäden. Dies geschah früher bei Thermometern mit Metallscala durch vorsichtiges Erhitzen der Röhre an der Stelle, wo die Lostrennung erfolgen sollte, über einer sehr kleinen Flamme. Dasselbe Verfahren habe ich auch bei einem Thermometer mit auf die Röhre geätzter Theilung und selbst bei einem Einschlussthermometer mit Milchglasscala mit Erfolg anwenden können. Doch führt meist das von A. v. Oettingen und Dorn beschriebene Verfahren gefahrloser und genauer zum Ziele. Man kehrt hienach das Thermometer um, so dass das Quecksilber herunterläuft, richtet es auf, bringt dadurch — nöthigenfalls unter leichtem Aufstossen, indem man das Gefäss in die geballte Hand einschliesst — die entstandene Blase in den oberen Theil des Gefässes und kehrt dann das Thermometer

schnell wieder um. Den erhaltenen Faden verkürzt oder verlängert man mit grosser Genauigkeit auf eine bestimmte Länge, indem man den Umstand benutzt, dass die Lostrennung an derselben Stelle der Röhre erfolgt, an der die Vereinigung der Fäden stattfand, selbst wenn keine sichtbare Luftblase übrig bleibt. Doch ist bei diesen Operationen oft nicht ohne Umsicht zu verfahren. Beim Lostrennen langer Fäden muss man mehr das Gewicht der Säule wirken lassen, bei kurzen, zumal wenn die Lostrennungstelle höher über dem Gefässe liegt, das horizontal gehaltene Thermometer (oder vielmehr die dasselbe umfassende Hand) gegen eine verticale Wand stossen. Ist die Luftblase sehr klein und reisst ein zweiter Faden los, so muss man die beiden (unsichtbaren) Blasen zu vereinigen suchen und sich hüten, dieselben über das Quecksilber zu schaffen. Bei zu grossen Blasen erfolgt dagegen die Wiedervereinigung sehr schwer, oft nur im Gefässe selbst, oder es tritt bei zu schneller Abkühlung eine zu frühe, oft unbemerkt bleibende Trennung ein.

Die Beobachtungen dürfen nicht sofort nach dem Lostrennen des Fadens beginnen, da anderenfalls die Temperatur des Fadens zu schnellen Aenderungen unterliegen würde. Für je 1° Temperaturdifferenz und je 10° Länge des Fadens ändert sich seine scheinbare Länge um etwa 0,0015°. Aus demselben Grunde muss man sich auch während der Beobachtung, namentlich beim Verschieben der Fäden hüten, Veranlassungen zu einer Temperaturänderung herbeizuführen.

Für die Beobachtung selbst möchte ich die, wie ich glaube, durch A. v. Oettingen eingeführte Anwendung eines Comparators der einfachen Schätzung mittelst der Lupe im Allgemeinen nicht vorziehen. Der Genauigkeit der Ablesung wird beim Comparator bald durch die unregelmässige Form der Kuppen, durch Temperaturvariationen und durch unregelmässige Brechung ein Ziel gesetzt. Die Schätzung mit der Lupe nimmt dagegen weit kürzere Zeit in Anspruch und erlaubt daher die nicht genug zu empfehlende Wiederholung der Beobachtung, wodurch zugleich gröbere Ablesungsfehler vermieden und die Temperaturschwankungen zum Theil eliminirt werden. Es kommt dazu, dass, wenn das Thermometer später mit der Lupe abgelesen werden soll, die Art, die Parallaxe zu vermeiden, bei der Kalibrirung dieselbe sein muss wie bei der Beobachtung selbst. Der mittlere Fehler einer Ablesung beträgt bei der Schätzung mit der Lupe bei guten Theilungen meiner Erfahrung nach nur 0,02 des Intervalls.

6. Die im Vorstehenden gegebene Erweiterung der Neumannschen Kalibrirungsmethode wird andere Methoden nicht durchaus überflüssig machen. Die einfachste dieser Methoden, welche namentlich auch dazu verwandt wurde, eine dem Röhrenkaliber entsprechende Theilung herzustellen, und welche in dem wiederholten Aneinandersetzen eines kürzeren Fadens besteht, wird gewöhnlich nach Gay-Lussac benannt, war aber schon Lambert[1]) und noch früher bekannt. Ist das Volumen, das der Faden ausfüllt, nahe $= v$, so geben die Gleichungen (1)

$$[1] = \Delta_1 - \Delta_0 + (1,0)$$
$$[1] = \Delta_2 - \Delta_1 + (2,1)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$[1] = \Delta_n - \Delta_{n-1} + (n, n-1)$$

und demnach

$$[1] = \frac{\Delta_n - \Delta_0 + (1,0) + (2,1) + \cdots + (n, n-1)}{n};$$

$$\Delta_i = \frac{n-i}{n}\Big(\Delta_0 - (1,0) - (2,1) - \cdots - (i, i-1)\Big) + \frac{i}{n}\Big(\Delta_n + (i+1, i) + \cdots + (n, n-1)\Big).$$

Sind also Δ_0 und Δ_n gegeben, z. B. gleich Null gesetzt, so kann man sowohl die Länge der Fäden als die Kaliberfehler der einzelnen Striche bestimmen[2]).

Die hier gegebene Anwendung der Gay-Lussac'schen Methode rührt eigentlich von Hällström[3]) her. Hällström bestimmt aber

---

1) Pyrometrie (1779) S. 31, 43.

2) Aus diesen Formeln, von denen jedoch diejenige für Δ_i weniger brauchbar ist als die successive Auflösung der ursprünglichen Gleichungen mittelst des Werthes von [1], ergibt sich als Gewicht der Bestimmung von Δ_i

$$g_i = \frac{n^2}{\frac{(n-i)^2}{g_0} + \frac{i^2}{g_n} + \frac{i(n-i)n}{g}},$$

falls g_0 das Gewicht der Bestimmung von Δ_0, g_n das von Δ_n, g das Gewicht einer der Grössen (i,k) bezeichnet.

Ist $g_0 = \infty$, $g_n = \infty$ (indem man $\Delta_0 = 0$, $\Delta_n = 0$ gesetzt hat), so wird

$$g_i = \frac{n}{(n-i)i} g.$$

3) Anmerkningar angående thermometrars förfärdigande och bruk. Åbo 1823. Akad. Diss.; Pogg. Ann. Bd. 9 S. 535.

nun noch mit Fäden, die ebenfalls in dem Intervalle 0 bis n, oder einem anderen Intervalle, dessen Endpunkte schon bekannte Fehler haben, eine ganze Zahl mal enthalten sind, neue Correctionen. Sind z. B. durch eiuen Faden von 20° Länge die Fehler von 20°, 40°, 60°, 80° bestimmt, indem man die Fehler von 0° und 100° gleich Null annimmt, so kann man jetzt die Länge eines Fadens von 30° bestimmen, der zweimal aneinandergesetzt von 0° bis 60°, 20° bis 80°, 40° bis 100° reicht, und demnach auch die Fehler von 30°, 50°, 70°. Hat man die Fäden auch auf die anderen 10° Striche eingestellt, so kann man auch deren Fehler bestimmen, z. B. den Fehler von 10° mittelst der Gleichungen

$$[20] = \varDelta_{30} - \varDelta_{10} + (30,10),$$
$$\text{oder } [30] = \varDelta_{40} - \varDelta_{30} + (40,10).$$

Vereinigt man die verschiedenen so erhaltenen Fehler stets zu Mittelwerthen, ehe man sie weiter benutzt, so gewinnt man, namentlich bei angenäherter Berücksichtigung der Gewichte, recht brauchbare Resultate, allerdings durch etwas mühsame Rechnung. Nach diesem Verfahren sind auf der Berliner kaiserl. Normal-Eichungscommission eine Anzahl von Thermometern mit Fäden von 20°, 25° und 30° Länge kalibrirt worden. Dasselbe Verfahren kann auch benutzt werden, um für ein Thermometer, das nach einem strengen Verfahren z. B. von 10° zu 10° kalibrirt ist, die Fehler der 5° Striche zu finden.

Das Rudberg'sche[1]) Verfahren ist nur ein specieller Fall des Hällström'schen; es hat den Nachtheil, sich schlecht der Theilung anzuschliessen.

Das einzige Verfahren, welches neben dem Neumann'schen sämmtliche Beobachtungen zusammenfassend behandelt, ist das Bessel-sche[2]) und seine Modification durch v. Oettingen[3]). Doch dürfte dasselbe der hier gegebenen Erweiterung der Neumann'schen Methode in jeder Hinsicht nachstehen. Die Annäherungsrechnung ist umständlicher und setzt oft schon angenäherte Werthe voraus. Oettingen bedarf sogar noch einer Hilfs-Kalibrirung und Rechnung, da das Hauptschema die Fehler einiger Punkte mit zu geringem Gewichte

1) Pogg. Ann. Bd. 40 S. 563.

2) Pogg. Ann. Bd. 6 S. 287. Königsberger astronom. Beob. 7. Abth. S. 9.

3) Ueber die Correction der Thermometer, insbesondere über Bessel's Kalibrirmethode. Dorpat 1865; Inaug.-Diss.



liefert. Es kommt dazu eine gewisse Unsicherheit, inwieweit die Kalibercurve den Einzelbeobachtungen anzupassen sei, die allerdings vermieden werden könnte, wenn man auch hier die Fadenlängen möglichst sorgfältig als Vielfache desselben Volumens wählen würde.

Einen so grossen Fortschritt daher auch seiner Zeit die Bessel-sche Methode enthielt, so ist dieselbe doch oft gepriesen, aber ihrer Unbequemlichkeit halber wenig, wenn auch nicht, wie v. Oettingen meint, niemals, angewandt worden. Ein ähnliches Loos dürfte aber auch der v. Oettingen'schen Modification widerfahren sein. Diese Methoden für genauere Kalibrirungen mit Vortheil zu ersetzen, dürfte die hier gegebene geeignet sein, während für viele Zwecke und hilfsweise zur Interpolation das Hällström'sche Verfahren hinreichende Genauigkeit gewähren wird.

Ueber die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Kalibrirung der Thermometer.

Von

W. J. Marek.

1.

Jede mit irgend einer Messung verbundene Beobachtung führt zur Kenntniss des numerischen Werthes einer Function einer oder mehrerer unbekannten Grössen. Werden die Bedingungen der Beobachtung geändert und mehrere dieser Functionswerthe bestimmt, so bietet ihre Gesammtheit ein Mittel dar, die numerischen Werthe dieser Unbekannten herzuleiten. Ist die Zahl der unter verschiedenen Umständen gemachten Beobachtungen jener der Unbekannten gleich, so ist diese Herleitung ein einfaches Eliminationsproblem; ist diese Zahl jedoch grösser, so hat man zur Bestimmung der Unbekannten zu viel Bedingungen, und kein System derselben, deren man durch verschiedene Verbindung der Beobachtungen nun mehrere entwickeln kann, wird, der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wegen, die gemachten Beobachtungen streng darstellen können. Das Problem geht nun in ein anderes über, in jenes nämlich: die, laut Zeugniss der gemachten Beobachtungen, wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten herzuleiten, eine Aufgabe, die gelöst wird durch die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate.

In beinahe allen Zweigen der messenden Physik hat diese Methode Eingang gefunden, nur auf die Reduction der Kalibrirung der Thermometer scheint sie mit Ernst noch nicht versucht worden zu sein. Die Ursache davon ist wohl darin zu suchen, dass, wie auch Bessel bemerkt, die Anwendung derselben auf dieses Problem zu einer sehr

weitläufigen Rechnung führt, die mit der mit dem Quecksilberthermometer zu erreichenden Genauigkeit in keinem Verhältniss zu stehen scheint; ausserdem wohl auch darin, dass man in der Oettingenschen Methode ein so handliches Mittel besitzt, die Beobachtungen zu reduciren, dass man sich kaum veranlasst fühlt, nach einer anderen zu suchen. Der ausserordentliche Fortschritt, der in den letzten Jahren in der Thermometrie, besonders durch die Arbeiten des Herrn Dr. Pernet, erzielt worden ist, erheischt es aber, auf das erste Element der Reduction der Angaben des Quecksilberthermometers — die Kalibercorrection — die grösstmöglichste Sorgfalt zu verwenden. Wenn es möglich gemacht wird, die Sicherheit der Temperaturangaben innerhalb des ganzen Fundamentalabstandes auf $+0{,}001^\circ$C. zu bringen, so muss für Thermometer erster Ordnung eine Genauigkeit der Kalibrirung von mindestens $0{,}002^\circ$C. angestrebt werden. Diese Genauigkeit kann ohne Anwendung mikrometrischer Hilfsmittel oder hinreichender Vervielfältigung der Beobachtung mit der Lupe schwierig erreicht werden, und hat man auf die Beobachtungen eine solche Arbeit aufgewendet, so kann ein kleiner Mehraufwand von Arbeit auf die Reduction derselben nicht in Betracht kommen. Es wäre allerdings schwer anzurathen, das gesammte Material einer Kalibrirung als einen einzigen Complex nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnen zu wollen, denn die Elimination eines Systems von Normalgleichungen von 50 und mehr Unbekannten ist nicht Jedermanns Sache; allein dies ist auch für den vorliegenden Zweck gar nicht nothwendig. Man erinnere sich nur, dass, obwohl diese Methode für Zwecke der höheren Geodäsie geradezu geschaffen wurde, noch Niemand den Gedanken hatte das gesammte, Europa bedeckende Dreiecksnetz als ein Ganzes ausgleichen zu wollen. Eine Theilung in Gruppen ist auch in unserem Falle geboten. Man bestimme zwischen den zu Ausgangspunkten der Kalibrirung gewählten zwei Punkten eine Reihe von Fixpunkten ersten Ranges und schliesse an diese in gesonderten Gruppen — Partialsystemen — die übrigen dazwischenliegenden Punkte an. In welcher Weise dies am zweckmässigsten geschehen kann, wird aus dem weiter unten Folgenden ersichtlich werden. Die durch das eingeschlagene Verfahren erzielten Vortheile sind zunächst die folgenden:

Man leitet aus den gemachten Beobachtungen die laut deren Zeugniss wahrscheinlichsten Werthe der Kalibercorrectionen her;

man kann den grössten Theil der aufgewandten Arbeit auf jenes

Intervall verwenden, innerhalb dessen mit dem Thermometer später Beobachtungen angestellt werden sollen;

man kann für jede der errechneten Correctionen das Maass der Genauigkeit ihrer Bestimmung herleiten.

2. Aufstellung der Bedingungsgleichungen.

Sei *ab* das zu untersuchende Thermometer und nehmen wir an, dass die Kalibercorrectionen von m zu m Graden bestimmt werden sollen,

a ——— i ——— $i+m$ ——— $i+2m$ ——— $i+3m$ ——— $i+(u-1)m$ ——— $i+um$ ——— b

d. h. für die Punkte der Theilung i, $i+m$, $i+2m$ u. s. w. Sei allgemein x_n die Kalibercorrection des Punktes n (d. h. jene Zahl, die an der Lesung n angebracht werden muss, um sie in jene zu verwandeln, die man erhalten haben würde, wenn die Röhre bei gleicher Temperatur in ihrer ganzen Ausdehnung in ihrem ganzen Verlaufe gleichen inneren Querschnitt hätte), die zu suchenden Correctionen sind dann x_i, x_{i+m}, x_{i+2m} u. s. w.

Trennt man einen Faden ab und verschiebt denselben in der Röhre, so wird man im Allgemeinen nicht erwarten können, dass seine Enden genau mit zweien der oberwähnten Striche zusammenfallen werden; da jedoch nur die Correctionen x_i, x_{i+m}, x_{i+2m} u. s. w. in die Rechnung eingeführt werden können, so muss an die direct erhaltenen Lesungen im Allgemeinen eine Correction angebracht werden, die sie auf diesen Fall reducirt.

Gesetzt, es ständen die Enden des Quecksilberfadens bei $i+km+\varDelta k$ und $i+lm+\varDelta l$, die Länge des Fadens reducirt auf das gewählte mittlere Kaliber sei $\lambda_{(l-k)m}$, so führt die Ablesung der beiden Fadenenden zu der Gleichung

$$(i+lm+\varDelta l+x_{i+lm+\varDelta l})-(i+km+\varDelta k+x_{i+km+\varDelta k})=\lambda_{(l-k)m}. \quad (1$$

Nun ist ganz allgemein x_n eine Function φ von n, somit

$$x_{i+lm+\varDelta l}=\varphi\,(i+lm+\varDelta l), \quad (2$$

und nach der Taylor'schen Reihe entwickelt:

$$x_{i+lm+\varDelta l}=\varphi\,(i+lm)+\varDelta l\left(\frac{dx_n}{dn}\right)_{i+lm}+\cdots, \quad \text{oder weil}$$

$$\varphi\,(i+lm)=x_{i+lm}: \quad (3$$

$$x_{i+lm+\varDelta l}=x_{i+lm}+\varDelta l\left(\frac{dx_n}{dn}\right)_{i+lm}+\cdots,$$

worin $\left(\frac{dx_n}{dn}\right)_{i+lm}$ den ersten Differentialquotienten von x_n in Bezug auf n für den Punkt $i+lm$ darstellt. Die höheren Glieder der Entwickelung können unbedingt vernachlässigt werden.

Auf dieselbe Art würde man erhalten

$$x_{i+km+\varDelta k} = x_{i+km} + \varDelta k\left(\frac{dx_n}{dn}\right)_{i+km} + \cdots \tag{4}$$

Die Substitution dieser Werthe in die Gleichung (1) liefert

$$x_{i+lm} - x_{i+km} = \lambda_{(l-k)m} - \left[\left(i+lm+\varDelta l+\varDelta l\left(\frac{dx_n}{dn}\right)_{i+lm}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(i+km+\varDelta k+\varDelta k\left(\frac{dx_n}{dn}\right)_{i+km}\right)\right],$$

oder wenn man die um die Grössen $\varDelta l\left(\frac{dx_n}{dn}\right)_{i+lm}$ und $\varDelta k\left(\frac{dx_n}{dn}\right)_{i+km}$ verbesserten directen Lesungen $i+lm+\varDelta l$ und $i+km+\varDelta k$ mit L und K bezeichnet und die Differenz $K-L=a$ bildet:

$$x_{i+lm} - x_{i+km} - \lambda_{(l-k)m} = a. \tag{5}$$

Jede Beobachtung der Stellung des Fadens führt zu einer ähnlichen Gleichung und ihre Gesammtheit bildet die Grundlage der weiteren Rechnungen.

Wenn die Erreichung der grössten Genauigkeit angestrebt wird, muss die oberwähnte Correction $\varDelta\left(\frac{dx_n}{dn}\right)$ an allen gemachten Lesungen in der That angebracht werden. Ist dies nicht der Fall, arbeitet man ferner an einem Thermometer von sehr gleichförmigem Kaliber und macht man die Längen der Fäden sehr nahe einem Vielfachen von m gleich, so kann dieselbe wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werden. Zu ihrer Berechnung sind die Werthe von $\left(\frac{dx_n}{dn}\right)$ zu kennen nöthig. In den meisten Fällen genügt hier schon eine ganz rohe Annäherung, da die ganze Correction immer sehr klein bleibt. Man kann zur Kenntniss dieser Coëfficienten auf verschiedene Art gelangen; jeder mit dem Gegenstande vertraute Rechner wird sich dieselben leicht zu verschaffen wissen. Das angehängte Beispiel wird eine solche Art dem Leser zur Anschauung bringen.

3. Auswerthung der Unbekannten.

Ich gehe nun zu der Berechnung der Kalibercorrectionen selbst über und werde dabei von dem einfachsten Falle ausgehend bis zu dem allgemeinen fortschreiten.

1. Theilung eines Intervalls in zwei Theile.

Nehmen wir an, dass für zwei Punkte i und $i+2um$ die entsprechenden Correctionen bekannt sind, die Correction des Punktes $i+um$ gesucht wird, während die anderen Theilungspunkte als nicht vorhanden betrachtet werden. Man kann in diesem Falle nur mit einem Faden, dessen beiläufige Länge um ist, operiren und denselben in zwei Lagen bringen, die dem vorigen Capitel nach zu folgenden Gleichungen führen werden:

$$\left.\begin{array}{l} x_{i+2um} - x_{i+um} \qquad\quad - \lambda_{um} = a_1 \\ \qquad\qquad + x_{i+um} - x_i - \lambda_{um} = a_2 \end{array}\right\} \qquad (6$$

wenn mit a_1 und a_2 die numerischen aus den Beobachtungen der Gleichung (5) gemäss gezogenen Werthe bedeuten. Diese zwei Gleichungen reichen zur Bestimmung der Unbekannten x_{i+um} und λ_{um} eben nur aus und geben zur Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate weiter keine Veranlassung. Man zieht aus ihnen die Werthe

$$\begin{aligned} 2x_{i+um} &= -a_1 + a_2 + 2x_i + (x_{i+2um} - x_i) \\ 2\lambda_{um} &= -a_1 - a_2 - x_i \ + x_{i+2um}, \end{aligned}$$

welche Gleichungen ich folgendermassen schreiben will:

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha &= -a_1 + a_2 \\ x_{i+um} &= \alpha + x_i + \frac{1}{2}\,(x_{i+2um} - x_i) \\ 2\lambda_{um} &= -a_1 - a_2 + \ (x_{i+2um} - x_i) \end{aligned}\right\} \qquad (7$$

Ich werde in dem Folgenden stets annehmen, dass man auf die Bildung der Bedingungsgleichungen gleich viel Arbeit aufgewendet habe, dass sie somit von gleicher Genauigkeit seien. Den wahrscheinlichen Fehler einer Bedingungsgleichung werde ich mit r, den wahrscheinlichen Fehler irgend einer Grösse y mit r_y bezeichnen.

Dies vorausgesetzt, wird man nach den Gleichungen (7) schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} r^2_{x_{i+um}} &= r^2_\alpha + r^2_{x_i + \frac{1}{2}(x_{i+2um} - x_i)} \\ 4r^2_\alpha &= 2r^2. \end{aligned}\right\} \qquad (8$$

Sind i und $i+2um$ Ausgangspunkte der Kalibrirung, deren Correctionen gleich Null angenommen werden sollen, so gehen die Gleichungen (7) und (8) über in

$$\left.\begin{aligned} 2\alpha &= -a_1 + a_2 \\ x_{i+um} &= \alpha \\ 2\lambda_{um} &= -a_1 - a_2 \\ 4r_\alpha^2 &= 2r^2 \\ r_{x_{i+um}} &= r_\alpha^2 \end{aligned}\right\} \qquad (9$$

2. Theilung eines Intervalls in drei Theile.

Seien x_i, x_{i+3um} die bekannten und x_{i+2um}, x_{i+um} die gesuchten Correctionen. Man kann mit zwei Fäden von den Längen um und $2um$ operiren, und die Ergebnisse der Beobachtungen werden nach dem oben Gesagten zu folgenden Gleichungen führen:

$$\left.\begin{aligned} x_{i+3um} - x_{i+2um} \qquad\qquad\qquad - \lambda_{um} \qquad &= a_1 \\ x_{i+2um} - x_{i+um} \qquad - \lambda_{um} \qquad &= a_2 \\ x_{i+um} - x_i - \lambda_{um} \qquad &= a_3 \\ x_{i+3um} \qquad - x_{i+um} \qquad\qquad - \lambda_{2um} &= a_4 \\ x_{i+2um} \qquad\qquad - x_i \qquad - \lambda_{2um} &= a_5 \end{aligned}\right\} \qquad (10$$

Behandelt man diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so kann man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten unter folgender Form erhalten:

$$\left.\begin{aligned} 12\alpha_2 &= -5a_1 + 4a_2 + a_3 - 3a_4 + 3a_5 \\ 12\alpha_1 &= -a_1 - 4a_2 + 5a_3 - 3a_4 + 3a_5 \\ x_{i+2um} &= \alpha_2 + x_i + \frac{2}{3}(x_{i+3um} - x_i) \\ x_{i+um} &= \alpha_1 + x_i + \frac{1}{3}(x_{i+3um} - x_i) \\ 3\lambda_{um} &= -a_1 - a_2 - a_3 + (x_{i+3um} - x_i) \\ 2\lambda_{2um} &= -a_4 - a_5 + \alpha_2 - \alpha_1 + \frac{4}{3}(x_{i+3um} - x_i) \end{aligned}\right\} \qquad (11$$

und diesen Gleichungen gemäss die wahrscheinlichen Fehler:

$$\left.\begin{aligned} 144r_{\alpha_2}^2 &= 144r_{\alpha_1}^2 = 60r^2 \\ r_{x_{i+2um}}^2 &= r_{\alpha_2}^2 + r^2_{x_i + \frac{2}{3}(x_{i+3um} - x_i)} \\ r_{x_{i+um}}^2 &= r_{\alpha_1}^2 + r^2_{x_i + \frac{1}{3}(x_{i+3um} - x_i)} \end{aligned}\right\} \qquad (12$$

Sind wieder i und $i + 3um$ Ausgangspunkte der Kalibrirung, so gehen diese Formeln über in:

$$\left.\begin{aligned}
x_{i+2um} &= \alpha_2 \\
x_{i+um} &= \alpha_1 \\
3\lambda_{um} &= -a_1 - a_2 - a_3 \\
2\lambda_{2um} &= \qquad\qquad -a_4 - a_5 + \alpha_2 - \alpha_1 \\
r_{x_{i+2um}} &= r_{x_{i+um}} = r_{\alpha_1} = r_{\alpha_2}
\end{aligned}\right\} \quad (13$$

3. Theilung eines Intervalls in vier Theile.

Seien x_i und x_{i+4um} die bekannten, x_{i+3um}, x_{i+2um}, x_{i+um} die gesuchten Correctionen. Man operire mit drei Fäden von den Längen um, $2um$ und $3um$. Die erforderlichen Einstellungen werden zu folgenden Gleichungen führen:

$$\left.\begin{aligned}
x_{i+4um} - x_{i+3um} - \lambda_{um} &= a_1 \\
x_{i+3um} - x_{i+2um} - \lambda_{um} &= a_2 \\
x_{i+2um} - x_{i+um} - \lambda_{um} &= a_3 \\
x_{i+um} - x_i - \lambda_{um} &= a_4 \\
x_{i+4um} - x_{i+2um} - \lambda_{2um} &= a_5 \\
x_{i+3um} - x_{i+um} - \lambda_{2um} &= a_6 \\
x_{i+2um} - x_i - \lambda_{2um} &= a_7 \\
x_{i+4um} - x_{i+um} - \lambda_{3um} &= a_8 \\
x_{i+3um} - x_i - \lambda_{3um} &= a_9
\end{aligned}\right\} \quad (14$$

Behandelt man diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so kann man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten unter folgender Form erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
20\alpha_3 &= -7a_1 + 5a_2 + a_3 + a_4 - 4a_5 + 4a_6 - 4a_8 + 4a_9 \\
20\alpha_2 &= -2a_1 - 4a_2 + 4a_3 + 2a_4 - 6a_5 + 6a_7 - 2a_8 + 2a_9 \\
20\alpha_1 &= -a_1 - a_2 - 5a_3 + 7a_4 - 4a_6 + 4a_7 - 4a_8 + 4a_9 \\
x_{i+3um} &= \alpha_3 + x_i + \frac{3}{4}(x_{i+4um} - x_i) \quad 4\lambda_{um} = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 + (x_{i+4um} - x_i) \\
x_{i+2um} &= \alpha_2 + x_i + \frac{2}{4}(x_{i+4um} - x_i) \quad 3\lambda_{2um} = -a_5 - a_6 - a_7 + \alpha_3 - \alpha_1 + \frac{3}{2}(x_{i+4um} - x_i) \\
x_{i+um} &= \alpha_1 + x_i + \frac{1}{4}(x_{i+4um} - x_i) \quad 2\lambda_{3um} = -a_8 - a_9 + \alpha_3 - \alpha_1 + \frac{3}{2}(x_{i+4um} - x_i)
\end{aligned}\right\} \quad (15$$

und diesen Gleichungen gemäss die wahrscheinlichen Fehler:

$$\left.\begin{aligned}
&400 r^2_{\alpha_3} = 400 r^2_{\alpha_1} = 140 r^2 \qquad 400 r^2_{\alpha_2} = 120 r^2 \\
&r^2_{x_{i+3um}} = r^2_{\alpha_3} + r^2_{x_i + \frac{3}{4}(x_{i+4um} - x_i)} \\
&r^2_{x_{i+2um}} = r^2_{\alpha_2} + r^2_{x_i + \frac{2}{4}(x_{i+4um} - x_i)} \\
&r^2_{x_{i+um}} = r^2_{\alpha_1} + r^2_{x_i + \frac{1}{4}(x_{i+4um} - x_i)}
\end{aligned}\right\} \quad (16$$

Sind i und $i + 4um$ Ausgangspunkte der Kalibrirung, so gehen diese Gleichungen über in:

$$\left.\begin{aligned}
&x_{i+3um} = \alpha_3, \quad x_{i+2um} = \alpha_2, \quad x_{i+um} = \alpha_1 \\
&4\lambda_{um} = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4,\ 3\lambda_{2um} = -a_5 - a_6 - a_7 + \alpha_3 - \alpha_1,\ 2\lambda_{3um} = -a_8 - a_9 + \alpha_3 - \alpha_1 \\
&r_{x_{i+3um}} = r_{x_{i+um}} = r_{\alpha_3} = r_{\alpha_1}, \quad r_{x_{i+2um}} = r_{\alpha_2}
\end{aligned}\right\} \quad (17$$

4. Theilung eines Intervalls in fünf Theile.

Die Correctionen x_i und x_{i+5um} sind als bekannt vorausgesetzt, die Correctionen x_{i+4um}, x_{i+3um} x_{i+2um} und x_{i+um} werden gesucht. Man operirt mit vier Fäden von den Längen um, $2um$, $3um$ und $4um$. Die Beobachtungen werden zu folgenden Gleichungen führen:

$$\left.\begin{array}{lllllllllll}
x_{i+5um} & - x_{i+4um} & & & & & -\lambda_{um} & & & & = a_1 \\
& x_{i+4um} & - x_{i+3um} & & & & -\lambda_{um} & & & & = a_2 \\
& & x_{i+3um} & - x_{i+2um} & & & -\lambda_{um} & & & & = a_3 \\
& & & x_{i+2um} & - x_{i+um} & & -\lambda_{um} & & & & = a_4 \\
& & & & x_{i+um} & - x_i & -\lambda_{um} & & & & = a_5 \\
x_{i+5um} & & - x_{i+3um} & & & & & -\lambda_{2um} & & & = a_6 \\
& x_{i+4um} & & - x_{i+2um} & & & & -\lambda_{2um} & & & = a_7 \\
& & x_{i+3um} & & - x_{i+um} & & & -\lambda_{2um} & & & = a_8 \\
& & & x_{i+2um} & & - x_i & & -\lambda_{2um} & & & = a_9 \\
x_{i+5um} & & & - x_{i+2um} & & & & & -\lambda_{3um} & & = a_{10} \\
& x_{i+4um} & & & - x_{i+um} & & & & -\lambda_{3um} & & = a_{11} \\
& & x_{i+3um} & & & - x_i & & & -\lambda_{3um} & & = a_{12} \\
x_{i+5um} & & & & - x_{i+um} & & & & & -\lambda_{4um} & = a_{13} \\
& x_{i+4um} & & & & - x_i & & & & -\lambda_{4um} & = a_{14}
\end{array}\right\} \quad (18$$

Behandelt man diese Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate, so erhält man die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten unter folgender Form:

$$\left.\begin{aligned}
30\alpha_4 &= -9a_1 + 6a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 5a_6 + 5a_7 - 5a_{10} + 5a_{11} - 5a_{13} + 5a_{14}\\
240\alpha_3 &= -24a_1 - 39a_2 + 46a_3 + a_4 + 16a_5 - 65a_6 + 5a_7 + 45a_8 + 15a_9 - 35a_{10} - 10a_{11} + 45a_{12} - 20a_{13} + 20a_{14}\\
240\alpha_2 &= -16a_1 - a_2 - 46a_3 + 39a_4 + 24a_5 - 15a_6 - 45a_7 - 5a_8 + 65a_9 - 45a_{10} + 10a_{11} + 35a_{12} - 20a_{13} + 20a_{14}\\
30\alpha_1 &= -a_1 - a_2 - a_3 - 6a_4 + 9a_5 - 5a_8 + 5a_9 - 5a_{11} + 5a_{12} - 5a_{13} + 5a_{14}\\
x_{i+4um} &= \alpha_4 + x_i + \frac{4}{5}(x_{i+5um} - x_i) \qquad 5\lambda_{um} = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 + (x_{i+5um} - x_i)\\
x_{i+3um} &= \alpha_3 + x_i + \frac{3}{5}(x_{i+5um} - x_i) \qquad 4\lambda_{2um} = -a_6 - a_7 - a_8 - a_9 + \alpha_4 - \alpha_1 + \frac{8}{5}(x_{i+5um} - x_i)\\
x_{i+2um} &= \alpha_2 + x_i + \frac{2}{5}(x_{i+5um} - x_i) \qquad 3\lambda_{3um} = -a_{10} - a_{11} - a_{12} + \alpha_4 + \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1 + \frac{9}{5}(x_{i+5um} - x_i)\\
x_{i+um} &= \alpha_1 + x_i + \frac{1}{5}(x_{i+5um} - x_i) \qquad 2\lambda_{4um} = -a_{13} - a_{14} - \alpha_4 - \alpha_1 + \frac{8}{5}(x_{i+5um} - x_i)
\end{aligned}\right\} \quad 19)$$

und diesen Gleichungen gemäss die wahrscheinlichen Fehler:

$$\left.\begin{aligned}
900\,r^2_{\alpha_4} &= 900\,r^2_{\alpha_1} = 270\,r^2\\
57600\,r^2_{\alpha_3} &= 57600\,r^2_{\alpha_2} = 15120\,r^2\\
r^2_{x_{i+4um}} &= r^2_{\alpha_4} + r^2_{x_i + \frac{4}{5}(x_{i+5um} - x_i)} \qquad r^2_{x_{i+2um}} = r^2_{\alpha_2} + r^2_{x_i + \frac{2}{5}(x_{i+5um} - x_i)}\\
r^2_{x_{i+3um}} &= r^2_{\alpha_3} + r^2_{x_i + \frac{3}{5}(x_{i+5um} - x_i)} \qquad r^2_{x_{i+um}} = r^2_{\alpha_1} + r^2_{x_i + \frac{1}{5}(x_{i+5um} - x_i)}
\end{aligned}\right\} \quad (20$$

Sind i und $i + 5um$ Ausgangspunkte der Kalibrirung, so gehen diese Gleichungen über in die einfacheren:

$$\left.\begin{aligned}
& x_{i+4um} = \alpha_4, \quad x_{i+3um} = \alpha_3, \quad x_{i+2um} = \alpha_2, \quad x_{i+um} = \alpha_1\\
& 5\lambda_{um} = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5, \quad 4\lambda_{2um} = -a_6 - a_7 - a_8 - a_9 + \alpha_4 - \alpha_1\\
& 3\lambda_{3um} = -a_{10} - a_{11} - a_{12} + \alpha_4 + \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_1, \quad 2\lambda_{4um} = -a_{13} - a_{14} + \alpha_4 - \alpha_1\\
& r^2_{x_{i+4um}} = r^2_{x_{i+um}} = r^2_{\alpha_4} = r^2_{\alpha_1}, \quad r^2_{x_{i+3um}} = r^2_{x_{i+2um}} = r^2_{\alpha_3} = r^2_{\alpha_2}
\end{aligned}\right\} \quad (21$$

5. Theilung eines Intervalls in sechs Theile.

Es seien x_i und x_{i+6um} die bekannten, x_{i+5um}, x_{i+4um}, x_{i+3um}, x_{i+2um} und x_{i+um} die gesuchten Correctionen. Man operire mit fünf Fäden von den resp. Längen um, $2um$, $3um$, $4um$, $5um$. Die Ergebnisse der Beobachtungen werden zu folgenden Gleichungen führen:

$$\left.\begin{aligned}
x_{i+6um} - x_{i+5um} - \lambda_{um} &= a_1\\
x_{i+5um} - x_{i+4um} - \lambda_{um} &= a_2\\
x_{i+4um} - x_{i+3um} - \lambda_{um} &= a_3\\
x_{i+3um} - x_{i+2um} - \lambda_{um} &= a_4\\
x_{i+2um} - x_{i+um} - \lambda_{um} &= a_5\\
x_{i+um} - x_i - \lambda_{um} &= a_6\\
x_{i+6um} - x_{i+4um} - \lambda_{2um} &= a_7\\
x_{i+5um} - x_{i+3um} - \lambda_{2um} &= a_8\\
x_{i+4um} - x_{i+2um} - \lambda_{2um} &= a_9\\
x_{i+3um} - x_{i+um} - \lambda_{2um} &= a_{10}\\
x_{i+2um} - x_i - \lambda_{2um} &= a_{11}\\
x_{i+6um} - x_{i+3um} - \lambda_{3um} &= a_{12}\\
x_{i+5um} - x_{i+2um} - \lambda_{3um} &= a_{13}\\
x_{i+4um} - x_{i+um} - \lambda_{3um} &= a_{14}\\
x_{i+3um} - x_i - \lambda_{3um} &= a_{15}\\
x_{i+6um} - x_{i+2um} - \lambda_{4um} &= a_{16}\\
x_{i+5um} - x_{i+um} - \lambda_{4um} &= a_{17}\\
x_{i+4um} - x_i - \lambda_{4um} &= a_{18}\\
x_{i+6um} - x_{i+um} - \lambda_{5um} &= a_{19}\\
x_{i+5um} - x_i - \lambda_{5um} &= a_{20}
\end{aligned}\right\} \quad (22$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich die wahrscheinlichsten Werthe der Unbekannten unter folgender Form ziehen:

$$
\left.\begin{aligned}
42\alpha_5 &= -11a_1 + 7a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 - 6a_7 + 6a_8 \\
&\quad - 6a_{12} + 6a_{13} - 6a_{16} \\
&\quad + 6a_{17} - 6a_{19} + 6a_{20} \\
420\alpha_4 &= -40a_1 - 58a_2 + 68a_3 + 8a_4 + 2a_5 + 20a_6 - 102a_7 + 6a_8 \\
&\quad + 72a_9 + 6a_{10} + 18a_{11} - 54a_{12} - 6a_{13} + 54a_{14} + 6a_{15} - 54a_{16} \\
&\quad - 12a_{17} + 66a_{18} - 30a_{19} + 30a_{20} \\
504\alpha_3 &= -36a_1 - 72a_3 + 72a_4 + 36a_6 - 36a_7 - 72a_8 \\
&\quad + 72a_{10} + 36a_{11} - 108a_{13} + 108a_{15} - 36a_{16} \\
&\quad + 36a_{18} - 36a_{19} + 36a_{20} \\
420\alpha_2 &= -20a_1 - 2a_2 - 8a_3 - 68a_4 + 58a_5 + 40a_6 - 18a_7 - 6a_8 \\
&\quad - 72a_9 - 6a_{10} + 102a_{11} - 6a_{12} - 54a_{13} + 6a_{14} + 54a_{15} - 66a_{16} \\
&\quad + 12a_{17} + 54a_{18} - 30a_{19} + 30a_{20} \\
42\alpha_1 &= - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - 7a_5 + 11a_6 \\
&\quad - 6a_{10} + 6a_{11} - 6a_{14} + 6a_{15} \\
&\quad - 6a_{17} + 6a_{18} - 6a_{19} + 6a_{20} \\
x_{i+5um} &= \alpha_5 + x_i + \frac{5}{6}(x_{i+6um} - x_i) \qquad x_{i+2um} = \alpha_2 + x_i + \frac{2}{6}(x_{i+6um} - x_i) \\
x_{i+4um} &= \alpha_4 + x_i + \frac{4}{6}(x_{i+6um} - x_i) \qquad x_{i+um} = \alpha_1 + x_i + \frac{1}{6}(x_{i+6um} - x_i) \\
x_{i+3um} &= \alpha_3 + x_i + \frac{3}{6}(x_{i+6um} - x_i) \\
6\lambda_{um} &= -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 + (x_{i+6um} - x_i) \\
5\lambda_{2um} &= -a_7 - a_8 - a_9 - a_{10} - a_{11} + \alpha_5 - \alpha_1 + \frac{5}{3}(x_{i+6um} - x_i) \\
4\lambda_{3um} &= -a_{12} - a_{13} - a_{14} - a_{15} + \alpha_5 + \alpha_4 - \alpha_2 - a_1 + 2(x_{i+6um} - x_i) \\
3\lambda_{4um} &= -a_{16} - a_{17} - a_{18} + \alpha_5 + \alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_1 + 2(x_{i+6um} - x_i) \\
2\lambda_{5um} &= -a_{19} - a_{20} + \alpha_5 - \alpha_1 + \frac{5}{3}(x_{i+6um} - x_i)
\end{aligned}\right\} \quad (23
$$

und diesen Gleichungen gemäss die wahrscheinlichen Fehler:

$$
\left.\begin{aligned}
1764 r_{\alpha_5}^2 &= 462 r^2 = 1764 r_{\alpha_1}^2 \\
176400 r_{\alpha_4}^2 &= 41160 r^2 = 176400 r_{\alpha_2}^2 \\
254016 r_{\alpha_3}^2 &= 54432 r^2 \\
r_{x_{i+5um}}^2 &= r_{\alpha_5}^2 + r_{x_i}^2 + \tfrac{5}{6}(x_{i+6um} - x_i) \qquad r_{x_{i+2um}}^2 = r_{\alpha_2}^2 + r_{x_i}^2 + \tfrac{2}{6}(x_{i+6um} - x_i) \\
r_{x_{i+4um}}^2 &= r_{\alpha_4}^2 + r_{x_i}^2 + \tfrac{4}{6}(x_{i+6um} - x_i) \qquad r_{x_{i+um}}^2 = r_{\alpha_1}^2 + r_{x_i}^2 + \tfrac{1}{6}(x_{i+6um} - x_i) \\
r_{x_{i+3um}}^2 &= r_{\alpha_3}^2 + r_{x_i}^2 + \tfrac{3}{6}(x_{i+6um} - x_i)
\end{aligned}\right\} \quad (24
$$

Sind i und $i + 6um$ Ausgangspunkte der Kalibrirung, so vereinfachen sich die Formeln wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l}
x_{i+5um} = \alpha_5,\ x_{i+4um} = \alpha_4,\ x_{i+3um} = \alpha_3,\ x_{i+2um} = \alpha_2,\ x_{i+um} = \alpha_1 \\
6\lambda_{um} \ = -a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 \\
5\lambda_{2um} = -a_7 - a_8 - a_9 - a_{10} - a_{11} + \alpha_5 - \alpha_1 \\
4\lambda_{3um} = -a_{12} - a_{13} - a_{14} - a_{15} + \alpha_5 + \alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_1 \\
3\lambda_{4um} = -a_{16} - a_{17} - a_{18} + \alpha_5 + \alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_1 \\
2\lambda_{5um} = -a_{19} - a_{20} + \alpha_5 - \alpha_1 \\
r^2_{x_{i+5um}} = r^2_{x_{i+um}} = r^2_{\alpha_5} = r^2_{\alpha_1},\ r^2_{x_{i+4um}} = r^2_{x_{i+2um}} = r^2_{\alpha_4} = r^2_{\alpha_2},\ r^2_{x_{i+3um}} = r^2_{\alpha_3}
\end{array}\right\} \quad (25$$

6. Allgemeiner Fall.

Soll das zu kalibrirende Intervall in mehr als 6 Theile getheilt werden, so werden die directen Formeln unhandlich und unbequem. Man theile in diesem Falle das ganze Intervall in Partialsysteme, bestimme nach den vorgetragenen Regeln zunächst die Correctionen für deren Endpunkte und leite auf deren Grundlage die Correctionen der dazwischenliegenden Punkte auf analoge Weise ab. Ist die Länge des ganzen Intervalles $l = mk$, so kann man im Allgemeinen s Partialsysteme von der Länge mt bilden, wenn $st = k$ gemacht wird.

Man erhält dabei, wenn auf alle einschlägigen Beobachtungen gleiche Sorgfalt verwendet wird, die grösste Genauigkeit, wenn s möglichst nahe gleich t gemacht wird, wie man sich durch eine aufmerksame Betrachtung der vorangehenden Entwickelungen überzeugen kann. Wenn z. B. das Intervall von -15 bis 105 von 5 zu 5 Graden zu kalibriren wäre, so wäre die zweckmässigste Theilung: 6 Partialsysteme von je 4×5 Graden oder 4 Partialsysteme von je 6×5 Graden. Welche von diesen Theilungen zu wählen ist, wird der späteren Bestimmung des Instrumentes gemäss zu entscheiden sein.

Es möge hier nur noch bemerkt werden, dass die Theilung in zwei Theile womöglich vermieden werden soll, einerseits weil sie nur einmal ausgeführt in sich selbst keine Controle liefert, andererseits auch bei Vermehrung der Zahl der Einzelnbestimmungen leicht durch constante Fehler beeinflusst wird.

4. Beispiel.

Ein Normalthermometer sollte zwischen 0 und 100° von 5 zu 5 Graden kalibrirt werden. Das ganze Intervall wird in 4 Partialsysteme von je 5×5 Graden getheilt. Die Operation sollte mit aller

möglichen Schärfe ausgeführt werden, es waren daher zunächst Näherungswerthe für die Coëfficienten $\frac{dx_n}{dn}$ herzuleiten. Zu diesem Zwecke verschob ich in der Röhre einen beiläufig 10 Grade langen Faden und leitete aus den gemachten Beobachtungen Näherungswerthe für die Correction x_{10}, x_{20}, x_{30} u. s. w. her. Die Beobachtungen waren:

Lesung		Lesung	
erstes	zweites	erstes	zweites
Fadenende		Fadenende	
90,124	100,185	40,008	50,042
80,018	90,074	30,102	40,138
70,212	80,268	20,126	30,150
60,101	70,154	10,084	20,105
50,003	60,044	0,049	10,064

Dieselben führen (vorläufig ohne Rücksicht auf die Correction $\Delta\left(\frac{dx_n}{dn}\right)$) zu folgenden Gleichungen, wenn, wie wir es nun annehmen wollen, x_0 und x_{100} gleich 0 gesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
-x_{90} \qquad\qquad &- \lambda_{10} = -10{,}061\\
+x_{90} - x_{80} \qquad &- \lambda_{10} = -10{,}056\\
x_{80} - x_{70} \qquad &- \lambda_{10} = -10{,}056\\
x_{70} - x_{60} \qquad &- \lambda_{10} = -10{,}053\\
x_{60} - x_{50} \qquad &- \lambda_{10} = -10{,}041\\
x_{50} - x_{40} \qquad &- \lambda_{10} = -10{,}034\\
x_{40} - x_{30} \qquad &- \lambda_{10} = -10{,}036\\
x_{30} - x_{20} \qquad &- \lambda_{10} = -10{,}024\\
x_{20} - x_{10} &- \lambda_{10} = -10{,}017\\
x_{10} &- \lambda_{10} = -10{,}015
\end{aligned}
$$

Deren Auflösung liefert:

$$
\begin{aligned}
x_{90} &= +0{,}022 & x_{40} &= +0{,}065 & \lambda_{10} &= 10{,}0393\\
x_{80} &= 0{,}038 & x_{30} &= 0{,}062\\
x_{70} &= 0{,}055 & x_{20} &= 0{,}047\\
x_{60} &= 0{,}069 & x_{10} &= +0{,}024\\
x_{50} &= +0{,}070
\end{aligned}
$$

Trägt man diese Werthe in der üblichen Weise graphisch auf, so kann man aus der die einzelnen Punkte verbindenden Curve mit hinreichender Annäherung die Coëfficienten $\frac{dx_n}{dn}$ in folgender Weise

erhalten. Um z. B. $\frac{dx_n}{dn}$ für $n = 20$ zu finden, entnehme man der Curve x_{19} und x_{21}; es ist dann für unseren Zweck hinreichend genau

$$\left(\frac{dx_n}{dn}\right)_{20} = \frac{1}{2}(x_{21} - x_{19}) \text{ u. s. w.}$$

Auf unsere Beobachtungen angewendet ergab dieses Verfahren für die Punkte 0, 25, 50, 75 und 100:

n	$\frac{dx_n}{dn}$
0	+ 0,0024
25	+ 0,0015
50	+ 0,0002
75	— 0,0015
100	— 0,0023

In dem vorliegenden Falle genügt die obige Bestimmung der Differentialquotienten vollkommen. Wäre jedoch das Kaliber des Thermometers bedeutend unregelmässiger gewesen, so hätte man zu deren Herleitung Beobachtungen an mehr als einem Faden heranziehen müssen. Ein solches Thermometer wäre jedoch als Normalthermometer aus dem Grunde nicht empfehlenswerth, weil aus den von 5 zu 5 oder von 4 zu 4 Graden bestimmten Kalibercorrectionen kein sicherer Schluss auf die den dazwischenliegenden Punkten entsprechenden gezogen werden kann.

Theilung des Intervalls 0—100 in vier Theile.

Faden λ_{25} von der beiläufigen Länge von 25°.

Fadenende		Correction $\Delta \frac{dx}{dn}$	
unteres	oberes	unt. F. E.	ob. F. E.
75,014	100,258	— 0,0000	— 0,0006
50,244	75,469	+ 0,0000	— 0,0007
25,119	50,307	+ 0,0002	+ 0,0001
0,064	25,207	+ 0,0001	+ 0,0003

Corr. Lesungen		a
75,0140	100,2574	— 25,2434
50,2440	75,4683	2243
25,1192	50,3071	1879
0,0621	25,2073	— 25,1432

Um den Einfluss der zufälligen Beobachtungsfehler und den Einfluss der Temperaturveränderuug des Fadens herabzumindern, wurden die Beobachtungen sofort noch in umgekehrter Reihenfolge gemacht und folgende Zahlen erhalten:

Fadenende		Correction $\Delta \frac{dx_n}{dn}$	
unteres	oberes	unt. F. E.	ob. F. E.
— 0,019	25,127	— 0,0000	+ 0,0002
24,884	50,066	— 0,0002	+ 0,0000
49,964	75,190	— 0,0000	— 0,0003
74,990	100,238	+ 0,0000	— 0,0006

Corr. Lesungen		a
— 0,0190	25,1272	— 25,1462
24,8838	50,0660	1822
49,9640	75,1897	2257
74,9900	100,2374	— 25,2474

Corrigirt man die directen Lesungen für das Glied $\Delta \frac{dx_n}{dn}$, wie dies oben angezeigt ist, und bildet die Ausdrücke a ($a = K - L$ gemäss der Gleichung 5), zieht dann deren correspondirende Werthe zu einem Mittel zusammen, so kann man die ersten der in dem Schema der Theilung in vier Theile gegebenen Ausdrücke (14) wie folgt formiren:

$$\left.\begin{array}{l}
x_{100} - x_{75} - \lambda_{25} = -25,2454 \\
x_{75} - x_{50} - \lambda_{25} = 25,2250 \\
x_{50} - x_{25} - \lambda_{25} = 25,1850 \\
x_{25} - x_0 - \lambda_{25} = -25,1447
\end{array}\right.$$

Denselben Vorgang befolgend erhielt ich aus den Fäden λ_{50} und λ_{75} die übrigen Gleichungen dieses Schemas: (26

$$\left.\begin{array}{l}
x_{100} - x_{50} - \lambda_{50} = -50,1726 \\
x_{75} - x_{25} - \lambda_{50} = 50,1050 \\
x_{50} - x_0 - \lambda_{50} = -50,0325 \\
x_{100} - x_{25} - \lambda_{75} = -75,1062 \\
x_{75} - x_0 - \lambda_{75} = -75,0046
\end{array}\right\}$$

Aus diesen Gleichungen folgen die wahrscheinlichsten Werthe der Correctionen x_{75}, x_{50} und x_{25}, wenn 0 und 100 zu Ausgangspunkten gewählt sind nach den Formeln (15) und (17). Es berechnet sich

$$\left.\begin{array}{ll}
x_{75} = +0,0470 & \lambda_{25} = 25,2000 \\
x_{50} = +0,0703 & \lambda_{50} — 50,1011 \\
x_{25} = +0,0539 & \lambda_{75} = 75,0520
\end{array}\right\} \quad (27$$

Substituirt man diese Werthe in die Bedingungsgleichungen (26), so erhält man folgende übrigbleibende Fehler:

Beob. — Rechn.	
+ 0,0016	+ 0,0030
— 0,0017	— 0,0017
— 0,0014	— 0,0003
+ 0,0014	+ 0,0004
— 0,0012	

Aus den 9 Gleichungen (26) sind 6 unbekannte Grössen bestimmt worden; bezeichnet man also mit $[vv]$ die Summe der Quadrate der übrigbleibenden Fehler, so berechnet sich der wahrscheinliche Fehler einer Gleichung mit:

$$r = \pm\, 0{,}674 \sqrt{\frac{[vv]}{9-6}} \quad \text{hier mit}$$

$$r = \pm\, 0{,}0019. \tag{28}$$

Nach den Gleichungen (16) und (17) findet man damit:

$$\left.\begin{aligned} r_{x_{75}} &= \pm\, 0{,}0011 \\ r_{x_{50}} &= \quad 0{,}0010 \\ r_{x_{25}} &= \pm\, 0{,}0011 \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Als Beispiel der Kalibrirung eines Partialsystems nehme ich die Kalibrirung des Intervalls $25^0 - 50^0$. Die Beobachtungen an den vier Fäden von resp. 5, 10, 15 und 20^0 Länge geben auf die oben gezeigte Weise behandelt folgende Resultate:

$$\left.\begin{aligned}
x_{50} - x_{45} - \lambda_5 &= - 5{,}1640 \\
x_{45} - x_{40} - \lambda_5 &= - 5{,}1562 \\
x_{40} - x_{35} - \lambda_5 &= - 5{,}1595 \\
x_{35} - x_{30} - \lambda_5 &= - 5{,}1537 \\
x_{30} - x_{25} - \lambda_5 &= - 5{,}1572 \\
x_{50} - x_{40} - \lambda_{10} &= -10{,}0817 \\
x_{45} - x_{35} - \lambda_{10} &= -10{,}0724 \\
x_{40} - x_{30} - \lambda_{10} &= -10{,}0735 \\
x_{35} - x_{25} - \lambda_{10} &= -10{,}0670 \\
x_{50} - x_{35} - \lambda_{15} &= -15{,}0481 \\
x_{45} - x_{30} - \lambda_{15} &= -15{,}0372 \\
x_{40} - x_{25} - \lambda_{15} &= -15{,}0381 \\
x_{50} - x_{30} - \lambda_{20} &= -20{,}0092 \\
x_{45} - x_{25} - \lambda_{20} &= -20{,}0078
\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Nach den Gleichungen (19) folgen daraus die wahrscheinlichsten Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
x_{45} &= +0{,}0059 + x_{25} + \frac{4}{5}(x_{50} - x_{25}) & \lambda_5 &= 5{,}1581 + \frac{1}{5}(x_{50} - x_{25})\\
x_{40} &= +0{,}0043 + x_{25} + \frac{3}{5}(x_{50} - x_{25}) & \lambda_{10} &= 10{,}0750 + \frac{2}{5}(x_{50} - x_{25})\\
x_{35} &= +0{,}0055 + x_{25} + \frac{2}{5}(x_{50} - x_{25}) & \lambda_{15} &= 15{,}0424 + \frac{3}{5}(x_{50} - x_{25})\\
x_{30} &= +0{,}0007 + x_{25} + \frac{1}{5}(x_{50} - x_{25}) & \lambda_{20} &= 20{,}0110 + \frac{4}{5}(x_{50} - x_{25})
\end{aligned}\right\} \quad (31$$

und mit Rücksicht auf die früher gefundenen Werthe von x_{25} und x_{50}:

$$\left.\begin{aligned}
x_{45} &= +\,0{,}0729\\
x_{40} &= +\,0{,}0680\\
x_{35} &= +\,0{,}0660\\
x_{30} &= +\,0{,}0579
\end{aligned}\right\} \quad (32$$

Substituirt man die Werthe der Unbekannten aus den Gleichungen (31) in die Bedingungsgleichungen (30), so erhält man die übrigbleibenden Fehler wie folgt:

Beob. — Rechn.	
— 0,0000	— 0,0021
+ 0,0003	+ 0,0025
— 0,0002	— 0,0002
— 0,0004	+ 0,0000
+ 0,0002	— 0,0000
— 0,0024	+ 0,0026
+ 0,0022	— 0,0026

woraus der wahrscheinliche Fehler einer Gleichung folgt:

$$r = \pm\, 0{,}674 \sqrt{\frac{[vv]}{15-8}}$$

$$r = \pm\, 0{,}0016. \quad (33$$

Um die wahrscheinlichen Fehler der Correctionen $x_{45}, x_{40} \,..\, x_{30}$ nach den Formeln (20) berechnen zu können, muss man zunächst die wahrscheinlichen Fehler der Functionen $x_{25} + \frac{4}{5}(x_{50} - x_{25})$, $x_{25} + \frac{3}{5}(x_{50} - x_{25})$ u. s. w. herleiten. Zu diesem Behufe gehe man auf jene Gleichungen, aus denen die Grössen x_{50} und x_{25} berechnet wurden

[hier auf die Gleichungen (15) und (17)] zurück und stelle die obigen Functionen als lineare Functionen der Grössen a dar, also in unserem Falle unter der Form

$$x_{25} + \frac{w}{5}(x_{50} - x_{25}) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \cdots + \alpha_8 a_8 + \alpha_9 a_9;$$

es ist dann der wahrscheinliche Fehler der Grösse $x_{25} + \frac{w}{5}(x_{50} - x_{25})$ gegeben durch die Gleichung

$$r^2_{x_{25} + \frac{w}{5}(x_{50} - x_{25})} = [\alpha\alpha] r^2,$$

wenn mit r wieder der wahrscheinliche Fehler einer Bedingungsgleichung bezeichnet wird, aus denen die Grössen x_{25} und x_{50} hervorgingen. In unserem Falle erhält man aus den Gleichungen (15) und (17):

$$\left.\begin{aligned}
x_{25} + \frac{4}{5}(x_{50} - x_{25}) &= \frac{1}{100}(-9a_1 - 17a_2 + 11a_3 + 15a_4 - 24a_5 - 4a_6 + 28a_7 - 12a_8 + 12a_9) \\
x_{25} + \frac{3}{5}(x_{50} - x_{25}) &= \frac{1}{100}(-8a_1 - 14a_2 + 2a_3 + 20a_4 - 18a_5 - 8a_6 + 26a_7 - 14a_8 + 14a_9) \\
x_{25} + \frac{2}{5}(x_{50} - x_{25}) &= \frac{1}{100}(-7a_1 - 11a_2 - 7a_3 + 25a_4 - 12a_5 - 12a_6 + 24a_7 - 16a_8 + 16a_9) \\
x_{25} + \frac{1}{5}(x_{50} - x_{25}) &= \frac{1}{100}(-6a_1 - 8a_2 - 16a_3 + 30a_4 - 6a_5 - 16a_6 + 22a_7 - 18a_8 + 18a_9)
\end{aligned}\right\} \quad (34$$

somit:

$$\left.\begin{aligned}
r^2_{x_{25} + \frac{4}{5}(x_{50} - x_{25})} &= 0{,}238 r^2 \\
r^2_{x_{25} + \frac{3}{5}(x_{50} - x_{25})} &= 0{,}212 r^2 \\
r^2_{x_{25} + \frac{2}{5}(x_{50} + x_{25})} &= 0{,}202 r^2 \\
r^2_{x_{25} + \frac{1}{5}(x_{50} + x_{52})} &= 0{,}268 r^2
\end{aligned}\right\} \quad (35$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (28):

$$\left.\begin{aligned}
r_{x_{25} + \frac{4}{5}(x_{50} - x_{25})} &= \pm\ 0{,}0009 \\
r_{x_{25} + \frac{3}{5}(x_{50} - x_{25})} &= \pm\ 0{,}0009 \\
r_{x_{25} + \frac{2}{5}(x_{50} - x_{25})} &= \pm\ 0{,}0008 \\
r_{x_{25} + \frac{1}{5}(x_{05} + x_{25})} &= \pm\ 0{,}0010
\end{aligned}\right\} \quad (36$$

Mit diesen Werthen berechnen sich schliesslich die gesuchten wahrscheinlichen Fehler nach den Gleichungen (20):

$$\begin{aligned}
r_{x_{45}} &= \pm\ 0{,}0013 \\
r_{x_{40}} &= \pm\ 0{,}0012 \\
r_{x_{35}} &= \pm\ 0{,}0011 \\
r_{x_{30}} &= \pm\ 0{,}0014
\end{aligned}$$

5. Transformation der Kalibercorrectionen.

Durch das vorstehende Verfahren wurden die Correctionen für die Punkte $i,\ i+m,\ i+2m \ldots i+um$ entwickelt und dabei die Correctionen der Punkte i und $i+um$ gleich Null gesetzt. In vielen praktischen Fällen erscheint es wünschenswerth, diese Werthe so umzuändern, dass entweder die Correction eines oder die Correctionen zweier zwischen i und $i+um$ liegenden Punkte gleich Null werden. Die erste Transformation ändert an dem ursprünglichen Resultate der Kalibrirung gar nichts, die letztere reducirt die ursprünglichen Werthe auf ein neues mittleres Kaliber.

1. Die Correction des Punktes R soll gleich Null gemacht werden. Die Transformation wird einfach dadurch bewerkstelligt, dass man von den ursprünglichen Correctionswerthen x_R abzieht. Die Kalibrirung eines Thermometers zwischen -5 und $+35$ hat mir ergeben:

$$\begin{aligned}
x_{-5} &= +0{,}000 \\
x_0 &= 0{,}042 \\
x_{+5} &= 0{,}079 \\
x_{10} &= 0{,}069 \\
x_{15} &= 0{,}046 \\
x_{20} &= 0{,}024 \\
x_{25} &= 0{,}013 \\
x_{30} &= +0{,}000
\end{aligned}$$

Diese Werthe gehen, wenn man wünscht, dass $x_0 = 0$ werde, dem Vorigen gemäss in folgende über:

$$\begin{aligned}
x_{-5} &= -0{,}042 \\
x_0 &= \mp 0{,}000 \\
x_5 &= +0{,}037 \\
x_{10} &= +0{,}027 \\
x_{15} &= +0{,}004 \\
x_{20} &= -0{,}018 \\
x_{25} &= -0{,}029 \\
x_{30} &= -0{,}042
\end{aligned}$$

2. Die Correctionen der Punkte k_1 und k_2 sollen gleich Null werden. Die Transformation wird dadurch bewerkstelligt, dass man zu jeder ursprünglichen Correction x_q des Punktes q die Grösse

$$-\left[x_{k_1} + \frac{x_{k_2} - x_{k_1}}{k_2 - k_1}(q - k_1)\right]$$

addirt. Wenn in dem obigen Beispiele verlangt wäre, die Correctionen x_0 und x_{30} gleich Null zu machen, so hätte man an den ursprünglichen Zahlen die Werthe

$$-\left[+0{,}042+\frac{-0{,}042}{30}\,q\right]$$

also für den Punkt

− 5	− 0,049
0	0,042
+ 5	0,035
10	0,028
15	0,021
20	0,014
25	0,007
+ 30	− 0,000

anzubringen, wodurch dieselben in folgende übergehen würden:

$$x_{-5} = -\,0{,}049$$
$$x_0 = -\,0{,}000$$
$$x_5 = +\,0{,}044$$
$$x_{10} = +\,0{,}041$$
$$x_{15} = +\,0{,}025$$
$$x_{20} = +\,0{,}010$$
$$x_{25} = +\,0{,}006$$
$$x_{30} = -\,0{,}000.$$

Kleinere Mittheilungen.

Apparat zur Liquefaction der Gase.

Von

L. Cailletet.

(Aus den Annales de Chimie et de Physique, Septembre 1878, im Auszuge mitgetheilt.)

(Hiezu Tafel XIV.)

„Vor einiger Zeit habe ich mich mit der Condensation der Gase beschäftigt und dazu einen Apparat angewendet, der es ermöglicht, die Gase in einem Gefässe aus Glas ohne jede Gefahr zu comprimiren. Der ganze Apparat besteht 1) aus einer Compressionsmaschine und 2) aus einem stählernen Recipienten, in welchem sich das die Gase enthaltende Glasgefäss befindet.

Die Compressionsmaschine, welche ich zu meinen ersten Versuchen gebraucht habe, besteht aus einem Hohlcylinder *A* (Fig. 1) von weichem Stahle, der auf einem gusseisernen Gestelle mittelst der Lager *BB* horizontal befestigt ist. Ein massiver Kolben geht durch eine Lederdichtung hindurch in das Innere des Cylinders hinein. Am anderen Ende des Kolbens ist ein Schraubengewinde mit quadratischen Gängen angebracht, das durch die in der Mitte des Schwungrades *M* befestigte Mutter hindurchgeschraubt werden kann. Ein auf Schienen ruhendes Eisenstück hindert, dass der Kolben in eine drehende Bewegung versetzt werde, so dass sich derselbe in dem Cylinder bloss vorwärts oder rückwärts bewegen lässt, je nachdem man das Schwungrad mittelst der daran befestigten Handhaben in dem einen oder anderen Sinne dreht.

Will man Wasser in den Cylinder einführen, so giesst man es in das Glasgefäss *G*, das mit dem Innern des Apparates durch eine gerade Bohrung in Verbindung steht, die mittelst der eine conische Spitze tragenden Schraube, welche am Schwungrade *O* befestigt ist

hermetisch verschlossen werden kann. Zieht man den Kolben zurück, so dringt das Wasser in den Cylinder ein.

Der Recipient (Fig. 2) ist ein stählerner Hohlcylinder B, dessen Wände hinreichend stark sind, um Drucke von mehr als 1000 Atmosphären aushalten zu können. Der Recipient ist mit der Compressionsmaschine durch eine enge Metallröhre TU verbunden, deren Biegsamkeit die leichte Bewegung der Apparate zulässt. Das obere Ende des Recipienten trägt ein Schraubengewinde, um mittelst der Mutter E' das Glasgefäss einfügen zu können, in welchem sich das zu untersuchende Gas befindet. Dieses Glasgefäss besteht aus einer dicken, engen Röhre, die an ein weiteres Glasrohr T (Fig. 3) angeschmolzen ist, welches in das Quecksilber eintaucht, womit der Hohlcylinder gefüllt ist. Das Glasrohr ist also innen und aussen gleichen Drucken ausgesetzt, wodurch es möglich wird, dass dasselbe trotz der hohen Drucke, die es auszuhalten hat, verhältnissmässig gross genommen werden kann. Was die Röhre anbelangt, die über den Hohlcylinder hervorragt, so ist sie im Innern Drucken unterworfen, welche zur Liquefaction nothwendig sind, während ihre Aussenwand bloss den gewöhnlichen Luftdruck auszuhalten hat. Eine Glasumhüllung M (Fig. 2), die auf einer passenden Unterlage ruht, umgibt die Röhre; in diese Umhüllung kann entweder eine Kältemischung oder eine Flüssigkeit zum Wiedererwärmen der abgeschlossenen Gase gebracht werden.

Um das Gefäss TT (Fig. 3) mit dem zu untersuchenden Gase zu füllen, bringt man in dasselbe zunächst einen Quecksilbertropfen G und lässt dann durch den unteren gekrümmten Theil mittelst eines Kautschukschlauches das reine und trockene Gas in das horizontal gehaltene Gefäss eintreten, während die ausgezogene Spitze P offen ist. Hat das Gas alle Luft aus dem Apparate verdrängt, so unterbricht man den Gaszufluss und schmilzt die Spitze P über der Lampe zu. Das Stück A wird sodann an dem metallenen Hohlcylinder befestigt, nachdem derselbe zuvor mit gut ausgetrocknetem Quecksilber gefüllt wurde. Lässt man die Compressionsmaschine wirken, so drückt das Wasser auf das Quecksilber im Hohlcylinder; dasselbe steigt in die Röhre TT, und das comprimirte Gas verdichtet sich in der vorstehenden Capillarröhre, was alle Phasen des Versuches leicht zu beobachten ermöglicht.

Bei den zahlreichen Brüchen der Glasröhren, womit ich experimentirte, wurden die Glasstücke nur auf ganz geringe Distanz vom

Apparate weggeschleudert, trotz der sehr hohen Drucke, welche die Explosion veranlassten; es erklärt sich dies dadurch, dass die Gasmasse gegen die Masse der Röhre und des Quecksilbers nur eine ganz geringe ist. Um absolute Sicherheit zu erzielen, habe ich noch eine Glasglocke *C* (Fig. 2) angebracht, welche es ermöglicht, den Verlauf der Versuche gleichfalls zu verfolgen, und dabei den Vortheil gewährt, dass, wenn *M* eine Kältemischung enthält, sich an den äusseren Wänden kein Niederschlag bildet. Bei meinen ersten Versuchen wurden die Drucke mittelst verschiedener Manometer und besonders mittelst zweier Manometer nach dem System von Thomasset[1]) gemessen.

Solange die Drucke 35 Atmosphären nicht überschritten, habe ich sie mittelst eines Manometers mit freier Luft gemessen, das an der benachbarten Wand meines Laboratoriums angebracht war. Die Herren Ducretet & Comp.[2]) haben übrigens nach meinen Angaben einen kleinen Apparat für Laboratorien construirt, der in Fig. 2 dargestellt ist. Der Recipient wurde dabei unverändert gelassen; dagegen wurde bei der Compressionsmaschine die Druckschraube durch eine Pumpe mit massivem Kolben ersetzt, die mittelst des Hebels *L* manipulirt wird. Dieser Apparat gestattet leicht Drucke bis zu 300 Atmosphären herzustellen; muss man noch höher gehen, so setzt man das Schwungrad *V* in Thätigkeit, welches eine Schraube auf einen massiven Kolben einwirken lässt, wodurch man den Druck bis 500 Atmosphären erhöhen kann. Das zweite Schwungrad *V'* dient dazu, schnell den ausgeübten Druck zu vermindern."

Nachschrift des Herausgebers. Herr Cailletet hat unter anderen Gasen den Sauerstoff (gleichzeitig mit Herrn Pictet), Stickstoff, Wasserstoff, atmosphärische Luft mit seinem Apparate in den flüssigen Zustand übergeführt. Es wurde dabei noch die bereits bekannte Thatsache verwerthet, dass ein Gas, wenn man den auf dasselbe ausgeübten Druck vermindert, erkaltet. Herr Cailletet übte deshalb zuerst auf das zu untersuchende Gas einen hohen Druck aus, verminderte dann denselben rasch und bedeutend, und erreichte so eine Temperaturerniedrigung, die hinreichend war, um das Gas in den flüssigen Zustand zu verwandeln.

1) Comptes rendus T. 78 p. 411.

2) Paris, Rue de Feulliantines 39. Der Apparat kostet ohne Zubehör 600 Frcs.

Carl.

Notiz über einen einfachen Apparat zur Erhaltung eines constanten Gasdruckes.

Von

Prof. Dr. Alois Handl.

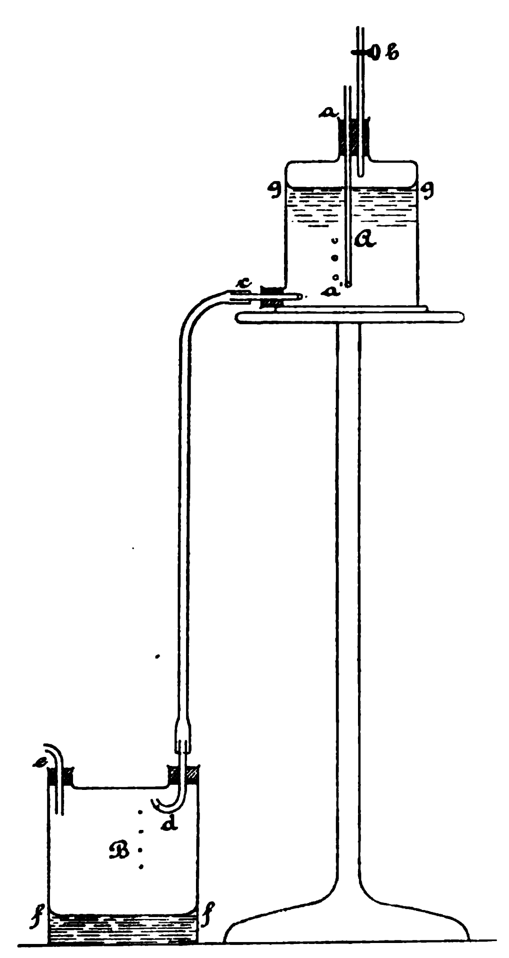
(Aus den Wiener Sitzungsberichten vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Bei den Versuchen über die specifische Zähigkeit verschiedener Flüssigkeiten, welche ich gemeinschaftlich mit meinem Collegen Prof. Dr. R. Přibram ausführte und deren bisher gewonnene Resultate demnächst im Repertorium erscheinen werden, bedienten wir uns zur Herstellung des erforderlichen Druckes einer Wassersäule, deren Höhe zwar auf eine ziemlich einfache Weise constant erhalten werden konnte, aber dennoch die stete Aufmerksamkeit eines Beobachters und dessen fortwährende Nachhilfe in Anspruch nahm. Bei Gelegenheit der neuerlichen Zusammenstellung des Apparates in mehrfach abgeänderter Form zeigte sich die Möglichkeit, die Höhe der drückenden Wassersäule während der ganzen Versuchsdauer ohne Nachhilfe von Seite des Beobachters constant zu erhalten. Da die diesem Zweck entsprechende Anordnung meines Wissens nirgends beschrieben, wohl aber bei vielerlei Arbeiten brauchbar ist, so mag es gestattet sein, hier eine kurze Nachricht darüber zu geben.

Die Figur auf folgender Seite zeigt die ganze Vorrichtung in schematischer Darstellung: *A* ist eine constante Mariotte'sche Flasche mit seitlichem, nahe am Boden stehendem Tubulus (*c*), durch welchen das Wasser mittelst der aus Glas- oder Kautschukröhren gebildeten Leitung in die zweite Flasche (*B*) abfliessen kann. In den Hals der Flasche *A* sind zwei Glasröhren, (*a*) und (*b*), luftdicht eingesetzt. *aa'* ist das sogenannte Mariotte'sche Rohr, welches bekanntlich bewirkt, dass der Abfluss des Wassers bei *c* stets so erfolgt, als wenn die freie Oberfläche desselben im Niveau des unteren Endes (*a'*) dieses Rohres gelegen wäre. Das zweite Rohr (*b*) ist mit einem Hahne versehen, welcher je nach Bedarf die Luft im Innern der Flasche *A* mit der äusseren Atmosphäre in Verbindung zu setzen oder von ihr abzuschliessen gestattet.

Am unteren Ende der Leitung *cd* befindet sich wieder ein Glasrohr (*d*), welches mittelst eines Korkstöpsels luftdicht in den Hals der zweiten Flasche (*B*) eingesetzt ist. Dieses Rohr ist nahe unter dem Korke in eine feine Spitze ausgezogen und etwas umgebogen, so dass

das Wasser in einem feinen Strahle oder tropfenweise in die Flasche *B* fällt, ohne dass Luftblasen durch die Leitung *dc* aufsteigen können. Ein zweites, luftdicht in den Flaschenhals eingesetztes Rohr (*e*) dient dann zur Fortleitung der im oberen Theile von *B* comprimirten Luft an den Ort, wo sie den beabsichtigten Druck ausüben soll.



Offenbar ist nun die Höhe der drückenden Wassersäule constant gleich dem Verticalabstande der Oeffnung *d* von der Oeffnung *a'* und ganz unabhängig von dem Stande der Oberflächen (*ff* und *gg*) der in beiden Flaschen befindlichen Wassermengen. Durch Verschieben der Röhren *aa'* oder *d* lässt sich diese Höhe auch leicht und sehr genau reguliren.

Ist die untere Flasche (*B*) im Laufe der Zeit nahezu mit Wasser gefüllt, so öffnet man den Hahn im Rohre *b*, stellt die Flasche *A* möglichst tief unter die Flasche *B* und neigt diese derart, dass das Wasser durch *dc* nach *A* zurückfliessen kann, während bei *e* die zum Ersatze desselben nöthige Luft eingelassen wird. Bei der gegenwärtigen Gebrauchsweise meines Apparates gestatten die ohnehin vorhandenen Hähne, dieses Zurückströmen der Luft zu bewerkstelligen; im Allgemeinen würde man zu diesem Zwecke in die von *e* ausgehende Leitung einen Dreiweghahn einschalten, welcher bei der einen Stellung den Druck an die gehörige Stelle fortzuleiten, bei der anderen Stellung hingegen das Rohr *e* mit der freien Atmosphäre in Verbindung zu setzen geeignet wäre.

Ueber einige weiteren Verbesserungen am Kathetometer.

Von

F. W. Breithaupt & Sohn in Cassel.

Seitdem wir die Construction des Kathetometers, welche wir als die nach unserer Ansicht zweckentsprechendste angenommen hatten, im 11. Bande S. 175 dieses Repertoriums mitgetheilt haben, haben wir keine Gelegenheit versäumt, die Brauchbarkeit desselben immer mehr zu erhöhen. Die deshalb angebrachten Veränderungen sind dreierlei Art und beziehen sich auf die Befestigung des Fernrohres am Schlitten, auf die Ablesung der Nonien und die correcte Herstellung des Prismas. Bevor wir jedoch zur genaueren Beschreibung derselben übergehen, wollen wir ihrer richtigen Würdigung wegen noch ausdrücklich betonen, dass im Gegensatze zu Andern unserer Ansicht nach das Kathetometer so stabil wie möglich gemacht werden muss, setzen deshalb auch stets eine gut fundamentirte, in jedem Falle vom Fussboden des Zimmers isolirte Aufstellung des Instrumentes voraus.

Die Befestigungsweise des Fernrohres am Schlitten, welche den doppelten Zweck, die grösste Genauigkeit und Sicherheit bei möglichster Bequemlichkeit der Handhabung, zu erreichen sucht, ist bereits von Herrn Gerland ausführlich beschrieben [1]). „Das Fernrohr“, sagt derselbe, „liegt mit zwei Cylindern, auf welche eine umlegbare Libelle gesetzt ist, in einem gabelförmigen Träger. Dieser hat unter seiner Mitte einen kleinen Cylinderabschnitt, welcher auf einem am Prismaschieber angebrachten Winkel so aufgeschraubt ist, dass eine Neigung des Fernrohrträgers mittelst einer Mikrometerschraube [2]) möglich ist. Die Mikrometerschraube wirkt, anstatt eines federnden Metallstreifens, einer Spiralfeder entgegen, deren Wirkung aber nach Einstellung des Fernrohres durch eine Druckschraube aufgehoben bezw. ersetzt wird. Hiedurch ist der Vortheil erzielt, dass man bei längere Zeit dauernden Beobachtungen von einer ihre Spannung verändernden Feder unabhängig ist. Der Kopf der Mikrometerschraube ist wie ein Schlüssel

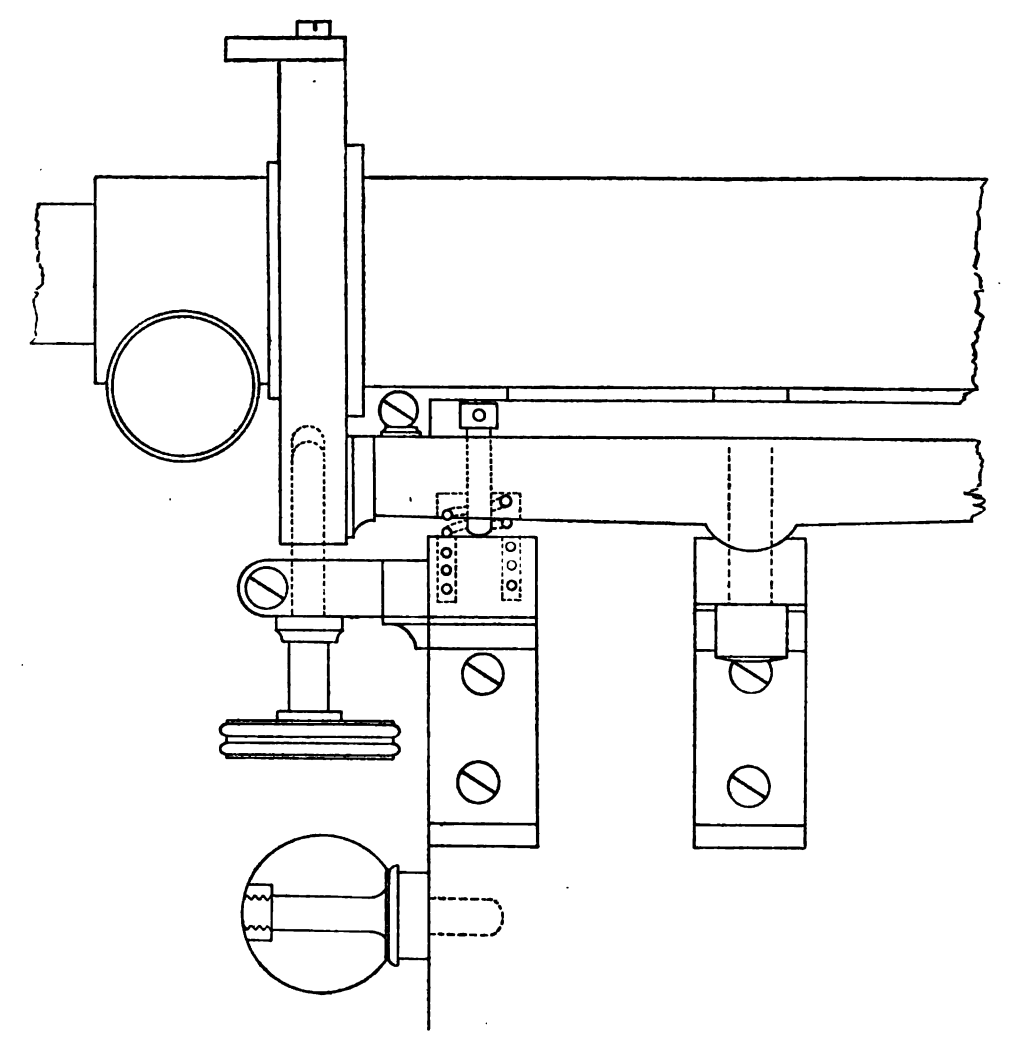
1) Wiedemann's Annalen Bd. 4 S. 301.

2) Die Anbringung dieser Schraube, die an den zur Londoner internationalen Ausstellung wissenschaftlicher Apparate noch nicht vorhanden war und die zuerst auf Wunsch des Herrn Professor Wüllner angebracht ist, dürfte die desfallsige Bemerkung des Herrn Löwenherz (Bericht der Ausstellung S. 216) gegenstandslos machen.



abzunehmen, und dadurch wird das Fernrohr, wenn es einmal eingestellt ist, vor allen Verstellungen gesichert."

Die Erhöhung der Genauigkeit der Nonienablesung wurde für das zweischlittige Kathetometer neuerdings verlangt; bei dem einschlittigen dürfte dies kaum nothwendig sein. Sie ist durch Anbringung eines Mikro-



metermikroskops mit getheilter Trommel in ähnlicher Weise wie bei grösseren Theodolithen erreicht uud bedarf wohl keiner weiteren Beschreibung. Da unsere Theilungen bis auf 0,01 mm genau aufgetragen werden können, so ist eine directe Ablesung dieser kleinen Länge durch eine passende Theilung der Trommel in 25 oder 50 leicht zu erhalten.

Es muss indessen bemerkt werden, dass augenblicklich ein einfacher Ersatz des Schraubenmikroskops vorbereitet wird, welcher bei Vermeidung einiger Fehlerquellen schnelles und präcises Ablesen gestattet. Wir behalten uns vor, auf denselben später zurückzukommen.

Eine solche erhöhte Genauigkeit der Ablesung würde aber wenig Werth haben, wenn es nicht nach vielfach fehlgeschlagenen Versuchen gelungen wäre, eine Bearbeitungsmethode des eisernen Prismas aufzufinden, welche dasselbe mit sehr grosser Genauigkeit herstellen lässt. Herr Gerland hat drei unserer Kathetometer auf die Geradlinigkeit des Prismas nach einer an dem oben citirten Orte auseinandergesetzten Methode untersucht, wobei an dem sonst unverändert bleibenden Kathetometer nur der Schlitten herabgleiten gelassen und die Veränderung der Lage der Libellenblase in Höhenunterschieden von je 5^{cm} abgelesen wurde[1]). Die Empfindlichkeit der Libellen war etwa 10 Secunden, die grösste beobachtete Aenderung 1 Theilstrich. Dieser Aenderung würde bei einem Abstande des Beobachtungsobjects von 3^{m} ein Höhenunterschied von etwa $0{,}15^{mm}$ entsprechen, und wäre dies somit die Grösse, welche der Fehler in Folge der unvollkommenen Geradlinigkeit des Prismas erreichen könnte, durch Anwendung der Correctionsschraube des Fernrohrs oder mit Hilfe der Beobachtung der Libelle aber vollständig eliminirt werden könnte.

Diese Werthe ändern sich nur sehr wenig, wenn man in gewöhnlicher Weise den Schlitten mit dem Fernrohr bald hebend, bald senkend beobachtet, dabei auch wohl den Apparat um seine Achse dreht[2]). Um jedoch vor Fehlern, welche die letztere Bewegung verursachen könnte, geschützt zu sein, ist es einmal nothwendig, die Drehungsachse des ganzen Apparates genau senkrecht und sodann das Prisma dieser Achse parallel zu stellen. Das erste erreicht man mit Hilfe einer zur Fernrohrachse normal gerichteten Libelle von sehr grosser Empfindlichkeit (etwa 9 Secunden auf einen Theilstrich), die an der drehbaren Buchse in bekannter Weise zu der Umdrehungsachse senkrecht befestigt wird. Die grosse Empfindlichkeit dieser Libelle macht bei der angewendeten Lagerung der Achse die Beobachtung der Fernrohrlibelle sicherer. Die zweite Correctur wird dagegen durch drei zu diesem

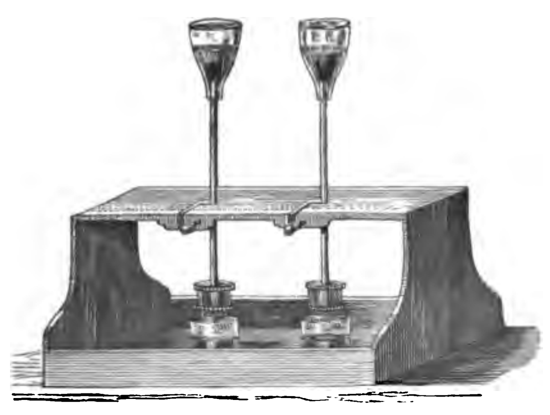
1) Bei dem in meinem Laboratorium befindlichen Breithaupt'schen Kathetometer ist an der ganzen Schiene bloss eine einzige Stelle vorhanden, an welcher die Libellenblase ein klein wenig auf die Seite geht. *Carl.*

2) Gerland a. a. O.

Zwecke angebrachte Stellschrauben, welche das Prisma in zwei auf einander senkrechten Ebenen verschieben lassen, bewirkt, macht aber dann die Anwendung der früher beschriebenen Anlegelebille[1]) nöthig, beides Einrichtungen, die von uns zuerst dem Kathetometer zugefügt sind. Die Hauptbedeutung der Anlegelibelle liegt demnach nicht, welche Ansicht Herr Dr. Löwenherz[2]) ausspricht, in der Verwendbarkeit zur Verticalstellung des Prismas, sondern in der Nothwendigkeit der Parallelstellung der Drehungsachse mit der Ebene des Prismas, die freilich durch gesonderte Verticalstellung beider auch erreicht werden könnte. Dazu bedürfte man dann allerdings statt der Anlegelibelle einer zweiten am Schlitten, senkrecht zur Fernrohrachse angebrachten Libelle, welche indessen die leichte Handhabung des Apparates und die Bequemlichkeit des Beobachtens mit demselben sehr beeinträchtigen würde. Das mag denn wohl auch der Grund sein, weshalb man bis dahin von der Anbringung einer solchen abgesehen hat. Die Anlegelibelle erlaubt dem Beobachter, ohne sich auf die Genauigkeit der Ausführung seitens des Mechanikers verlassen zu müssen, mit der grössten Leichtigkeit die fortdauernde Parallelität der Drehungsachse und des Prismas zu controliren. Dass dieselbe aber, nachdem sie einmal mit aller Sorgfalt hergestellt ist, bestehen bleibt, scheint wohl in nicht geringerem Grade zu erwarten, als es bei astronomischen und geodätischen Instrumenten der Fall ist.

Ueber einen neuen Apparat zum Filtriren von Quecksilber resp. Durchpressen desselben durch Leder mittelst seines eigenen Bodendruckes.

Das Reinigen des Quecksilbers von Staub etc. ist bekanntlich eine sehr oft wiederkehrende und dabei mühsame Arbeit; gewöhnlich geschieht es durch Filtrirpapier, was aber mancherlei Unbequemlichkeiten mit sich bringt.



Beigezeichneter Apparat, welcher von Professor Dr. Pfaundler construirt wurde und in dem physikalischen Cabinet der Universität in Innsbruck verwendet wird, hat sich als sehr praktisch bewährt,

1) Carl's Repertorium Bd. 11 S. 175.

2) Bericht über die Londoner internationale Ausstellung wissenschaftlicher Apparate S. 214.



indem das Quecksilber in Gestalt eines feinen Regens rasch und gut gereinigt abfliesst.

Die Einrichtung ist folgende:

An das obere Ende einer dünnen eisernen Röhre ist ein trichterförmiges Glas gekittet; unten befindet sich ein cylindrischer Fortsatz mit Gewinde versehen; eine Ueberwurfschraube bildet den Abschluss; einige Scheibchen aus sämisch gegerbtem Leder sind zwischen Fortsatz und Schraube so eingeklemmt, dass das Quecksilber wohl durch die Poren desselben, nicht aber an den Rändern vorbeidringen kann.

Um eine möglicherweise eintretende Oxydation des Quecksilbers während des Durchfliessens zu verhindern, erscheint es räthlich, den Apparat so tief zu senken, dass er beinahe den Boden des Aufnahmegefässes berührt.

Der Preis eines Gestelles mit einer solchen

Vorrichtung beträgt	8 fl.	50 kr.	ö. W.
Mit zwei Röhren	14 fl.	50 kr.	„
Eine Röhre ohne Gestell	6 fl.	— kr.	„

Eine Anzahl Lederscheibchen werden beigegeben.

Die Verpackung wird eigens, jedoch möglichst billig berechnet.

Diese Apparate sind vorräthig oder werden in kürzester Frist angefertigt von F. Miller, Universitätsmechaniker in Innsbruck.

Ein elektrischer „Vertheilungstab“.

Von

Dr. G. Krebs.

Herr Prof. Hagenbach empfiehlt[1]) zur Anstellung der elektrischen Grundversuche einen einfachen Apparat, welcher aus zwei Stäbchen von Hartgummi, die in der Mitte auf eine Spitze aufgesetzt werden können, besteht. Herr Wesselhöft in Halle, welcher diesen höchst zweckmässigen Apparat anfertigt, gibt noch einen Messingstab, der ebenfalls in der Mitte auf die Spitze gesetzt werden kann, sowie einen Doppelstab aus Glas und Hartgummi (durch Messing verbunden) hinzu; der erstere kann zu Versuchen über elektrische Vertheilung benutzt werden, der letztere bietet die Bequemlichkeit, die entgegengesetzten Elektricitäten an einem und demselben Stab hervorrufen zu können; übrigens würde der letztere Zweck auch mit einem einfachen Hartgummistab, dessen eine Hälfte mit Pelz, die andere mit Schiessbaumwolle gerieben wird, erreicht werden können.

Es schien mir nun, als ob die elektrische Vertheilung nicht hinreichend durch ein einfaches Messingstäbchen, in dessen Nähe man einen elektri-

1) Carl's Repertorium (1872) Bd. 8 S. 75.

schen Körper bringt, dargelegt werden könne; namentlich ist es nicht möglich, die durch Annäherung eines elektrischen Körpers geschiedenen Elektricitäten auch nach Entfernung des Erregers getrennt zu erhalten.

Um diesen Zweck zu erreichen, liess ich von Herrn Wesselhöft einen „Vertheilungsstab“, welcher aus zwei Messingdrähten, die in der Mitte durch ein ca. 3 ^{cm} langes Gummistück verbunden sind, anfertigen (Fig. 1). Hierzu gehört noch ein halbkreisförmiger, mit einem Gummistiel versehener Verbindungsdraht (Fig. 2).

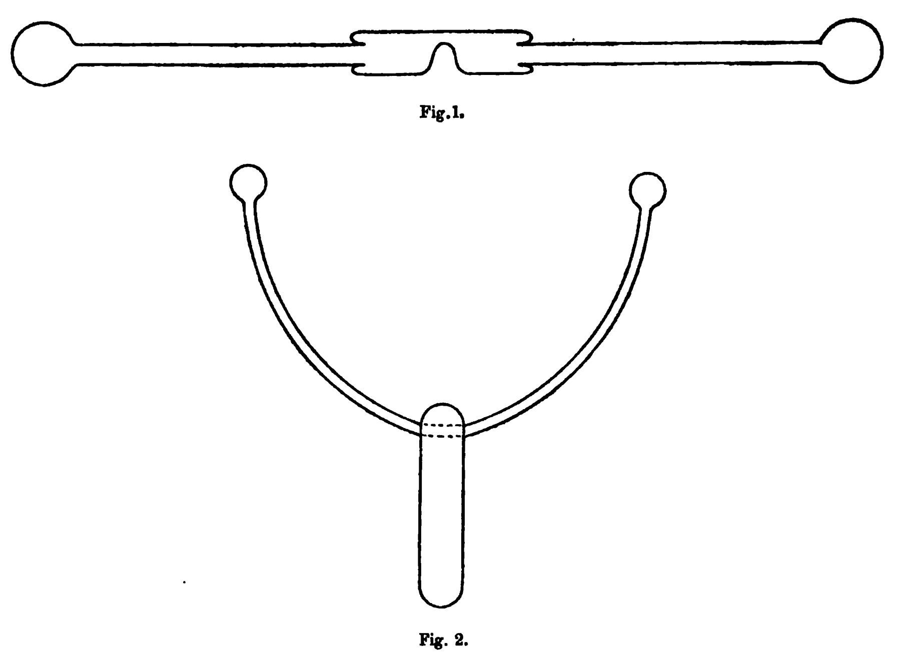


Fig. 1.

Fig. 2.

Setzt man den Vertheilungsstab auf die Spitze, legt den Verbindungsdraht auf denselben, so dass dessen Enden leitend verbunden sind, und bringt nun einen stark elektrisirten Hartgummi- oder Glasstab in die Nähe der einen Kugel des Vertheilungsstabs, so sammelt sich die positive Elektricität auf der einen und die negative auf der andern Hälfte des Vertheilungsstabs an. Entfernt man jetzt den Verbindungsdraht und dann den elektrischen Erreger, so kann man leicht nachweisen, dass das eine Ende des Verbindungsstabs positiv, das andere negativ elektrisch ist.

Hiebei ist noch eine kleine Bemerkung nicht überflüssig. Ist der Vertheilungsstab elektrisirt, so wird wohl am Anfang das eine Ende von dem Erreger (etwa dem stark elektrisirten Hartgummistab) ange-

zogen, das andere abgestossen; nach einiger Zeit aber werden beide, das eine mehr, das andere weniger kräftig angezogen; nimmt man aber einen schwach elektrisirten Stab, so wird auch nach längerer Zeit das eine Ende angezogen, das andere abgestossen. Es ist deshalb im Allgemeinen besser, mit schwach elektrischen Körpern auf den elektrisirten Vertheilungsstab zu wirken. Benutzt man den Doppelstab aus Glas und Gummi, so kann man Abstossung an beiden Enden erzielen, ebenso natürlich mit einem Hartgummistab, dessen eine Hälfte mit Pelz und die andere mit Schiessbaumwolle gerieben worden ist.

Herr Wesselhöft, welcher vor Absendung des Vertheilungsstabs Versuche mit demselben angestellt hat, machte mich darauf aufmerksam, dass der Vertheilungsstab zwischen den Knöpfen zweier entgegengesetzt geladenen Leidener Flaschen rotire. Bei Anstellung der elektrischen Grundversuche kann man aber die Leidener Flasche noch nicht benutzen; doch lässt sich leicht ein Ausweg finden:

1. Nachdem der Vertheilungsstab elektrisirt worden, bringt man zwei entgegengesetzt elektrisirte Stangen in verticaler Stellung in die Nähe der mit ihnen gleichnamig elektrischen Knöpfe des Vertheilungsstabs, so dass derselbe eben zwischen den verticalen Stangen rotiren kann; sofort fängt der Vertheilungsstab an sich von den Verticalstäben wegzubegeben und rotirt längere Zeit zwischen denselben, namentlich wenn man anfänglich, zur Verstärkung der Bewegung, dem Vertheilungsstab mit den Vertikalstäben etwas nachgerückt ist.

2. Man stellt die Stäbe so auf, dass sich jeder in der Nähe des mit ihm ungleichnamig elektrischen Knopfes des Vertheilungsstabs befindet und dass der Vertheilungsstab mit der Ebene der Verticalstäbe einen kleinen Winkel bildet; der Vertheilungsstab dreht sich alsdann nach den Stäben hin und pendelt einige Zeit zwischen denselben; rückt man mit den Stäben näher, so werden die Oscillationen rascher.

Dass man den Vertheilungsstab auch an beiden Enden gleichnamig elektrisch machen kann, versteht sich von selbst; man braucht nur, während der elektrische Körper in der Nähe ist, den aufliegenden Verbindungsdraht mit dem Finger zu berühren.

Auch könnte man an jedem Ende zwei Hollundermarkkügelchen an Leinenfäden oder Aluminiumdrähten anbringen.

Jedenfalls aber glaube ich behaupten zu dürfen, dass sich mit Hilfe des beschriebenen Apparates die elektrische Vertheilung mit besonderer Sicherheit anstellen lässt.

Ueber den Zusammenlauf des Wassers in cylindrischen Glasröhren.

Von

Prof. V. Thallmayer in Ungarisch-Altenburg.

Lässt man aus cylindrischen Glasröhren zwischen zwei das Volumen V fassenden Marken Wasser ablaufen, so bleibt je nach der Raschheit, mit welcher das Wasser abgeflossen, eine grössere oder geringere Wassermenge Δ_v an der Rohrwand hängen, welche nach einer gewissen Zeit t sich im unteren Theile des Rohres wieder ansammelt. War das Wasser im Rohre während der Zeit t_1 in Bewegung, so ist das nach dieser Zeit wirklich ausgeflossene Wasservolumen V_1 gleich der Differenz aus dem Volumen V und dem Zusammenlaufe Δ während dem Zeitintervall $t_1 t$; in Zeichen $V_1 = V - \Delta$.

Ebenso ist, wenn vom Beginne des Auslaufes des Wassers bis zum Ablesen des Volumens am Rohre die Zeit t_2 verstrich, das wirklich ausgeflossene Volumen V_2 gleich dem abgelesenen Volumen V_3 weniger dem Zusammenlaufe Δ_1 während des Zeitintervalles $t_2 t$; in Zeichen $V_2 = V_3 - \Delta_1$.

Diesen Umständen Rechnung tragend hat der Verfasser auf Veranlassung Dr. R. Ulbricht's, Professors der Chemie an der landwirthshaftlichen Akademie in loco, die Aufstellung eines Ausdruckes zur Berechnung des Zusammenlaufes versucht, wobei gefunden wurde, dass für ein bestimmtes Rohr und ein bestimmtes Volumen V dieses Rohres der Zusammenhang zwischen Zusammenlauf und Zeit, wenn ersterer mit Δ_v, letztere mit τ bezeichnet wird, durch eine Gleichung von der Form

$$\Delta_v^m = V \cdot \tau^n \quad \text{oder}$$

$$\Delta_v = l^{\frac{\log V + n \log \tau}{m \,.\, 0{,}4342\ldots}}$$

ausgedrückt werden kann, wobei m und n Constante bedeuten, welche sich auf Grund der Gleichung

$$\log V = m \log \Delta - n \log t$$

und einer Anzahl beobachteter Werthe von Δ_v und τ nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen lassen.

Es hat den Anschein, dass der Zusammenlauf Δ_{v_1} für das Volumen V_1 desselben Rohres für gleiche Zeiten sich durch eine Gleichung von der Form $\Delta_{v_1} = \Delta_v \cdot \Psi\left[\frac{V_1}{V}\right]$ wird ausdrücken lassen,

wobei Ψ eine Function von $\frac{V_1}{V}$ bedeutet; ferner hat es den Anschein, dass für gleiche Volumen und gleiche Zeiten bei verschiedenen Röhren der Zusammenlauf dem Durchmesser der Röhren umgekehrt proportional sein müsse. In wie weit letztere Voraussetzungen Stich halten werden, wird aus den Resultaten der genauen Untersuchungen, die über diesen Gegenstand von Seite des Verfassers und Dr. Ulbricht's im Zuge sind und welche ich hier mitzutheilen so frei sein werde, zu entnehmen sein.

Monatsmittel der magnetischen Declination, Inclination und Intensität zu St. Petersburg im Jahre 1877.

(H. Wild, Annalen des physikalischen Centralobservatoriums Jahrgang 1877.)

1877	Declination W	Horizontal-Intensität	Vertical-Intensität	Total-Intensität	Inclination
Januar . . .	1° 21,38′	1,6387	4,7026	4,9799	70° 47,29′
Februar. . .	21,12	1,6383	4,6978	4,9752	46,45
März	20,75	1,6415	4,7073	4,9852	46,53
April	19,72	1,6386	4,6984	4,9759	46,39
Mai	19,26	1,6390	4,6997	4,9773	46,43
Juni	19,38	1,6389	4,7007	4,9782	46,73
Juli	18,64	1,6400	4,7021	4,9799	46,32
August . . .	18,58	1,6399	4,7024	4,9801	46,45
September .	18,49	1,6400	4,7051	4,9827	47,01
October . . .	17,62	1,6392	4,7025	4,9800	46,94
November. .	17,64	1,6400	4,7075	4,9850	47,56
December. .	16,81	1,6408	4,7066	4,9844	46,83
Jahr.	1° 19,12′	1,6396	4,7027	4,9803	70° 46,74′

Monats- und Jahresmittel der magnetischen Declination, beobachtet an der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus zu Wien im Jahre 1878.

(Wiener Akademischer Anzeiger 1870 Nr. 5.)

Januar .	10° 15,30′	Mai . . .	10° 13,00′	September	10° 10,56′
Februar.	15,22	Juni. . .	11,45	October .	10,50
März . .	15,01	Juli . . .	11,82	November	9,36
April . .	14,62	August .	10,45	December	9,20

Jahr 20° 12,28′.

Ueber die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur.

Von

Hofrath J. Stefan.

(Wiener Akademischer Anzeiger 1879 Nr. 8.)

Der erste Theil dieser Abhandlung bildet eine Discussion der Versuche von Dulong und Petit, aus welchen diese beiden Physiker geschlossen haben, dass die von einem Körper ausgestrahlte Wärmemenge in einer geometrischen Progression steigt, wenn seine Temperatur in einer arithmetischen zunimmt. Es wird zunächst bemerkt, dass man die Beobachtungen von Dulong und Petit mit grosser Annäherung nach einer anderen sehr einfachen Formel berechnen kann, welche aussagt, dass die von einem Körper ausgestrahlte Wärmemenge der vierten Potenz seiner absoluten Temperatur proportional ist. Eine vorläufige Probe dieses Gesetzes erhält man, wenn man die Unterschiede der vierten Potenzen jener absoluten Temperaturen, welche bei den Versuchen das Thermometer und die kältere Hülle hatten, durch 6 dividirt; die Quotienten geben in ihren ersten Stellen Zahlen, welche von den in den Tabellen von Dulong und Petit enthaltenen nur wenig verschieden sind.

Das Gesetz der geometrischen Progression entspricht den von Dulong und Petit angegebenen Zahlen besser als das neue der vierten Potenzen. Die von Dulong und Petit angegebenen Zahlen sind übrigens zu einer strengen Prüfung eines Gesetzes über die Wärmestrahlung nicht geeignet, da dieselben nicht die einfache Bedeutung haben, welche man ihnen zugeschrieben hat.

Nachdem jetzt die Grösse des Wärmeleitungsvermögens der Luft in absolutem Masse bestimmt und die wichtige Eigenschaft der Gase festgestellt ist, dass ihr Leitungsvermögen unabhängig ist von ihrer Dichte, ist leicht zu übersehen, dass nach dem von Dulong und Petit eingeschlagenen Verfahren nicht die Wärmestrahlung eines Körpers für sich, sondern nur die Summe aus seiner Wärmestrahlung und der Wärmeleitung der im Apparate vorhandenen Luft gemessen werden kann, welche letztere, wenn auch sehr verdünnt, mit dem vollen Masse ihres Leitungsvermögens in Wirksamkeit ist.

Die Zahlen von Dulong und Petit bedürfen daher, wenn sie Masse für die Wärmestrahlung darbieten sollen, einer Correction wegen der Wärmeleitung der Luft. Die auf die Wärmestrahlung des Thermometers mit nackter Glaskugel sich beziehenden Daten erfahren durch dieselbe eine von 10 bis 15 Procent derselben betragende Verminderung. Was aber die Daten über die Abkühlung des versilberten Thermometers anbetrifft, so ist die Correction wegen der Wärme-

leitung viel grösser als der für die Strahlung übrig bleibende Rest. Damit ist zugleich erklärt, warum Dulong und Petit das Emissionsvermögen des Silbers vielmal grösser fanden, als es directe Versuche ergeben haben.

Dulong und Petit haben zwar auch ihre Beobachtungen wegen der Wirkung der Luft corrigirt, doch können sich ihre Correctionen nur auf den von der Dichte der Luft abhängigen Einfluss der Strömungen beziehen. Die Berechtigung, solche Correctionen auch an den bei sehr kleiner Dichte der Luft gemachten Beobachtungen in der Art, wie es Dulong und Petit gethan, anzubringen, ist überdies schon nach den Erfahrungen von de la Provostaye und Desains zweifelhaft geworden, so dass an den Zahlen von Dulong und Petit, auch nach Abzug der auf die Leitung der Luft entfallenden Antheile, eine Unsicherheit von nicht genau angebbarem Grade verbleibt.

Kennt man die Abkühlungsgeschwindigkeiten eines Körpers bei zwei verschiedenartigen Oberflächen, aber unter sonst ganz gleichen Umständen, so können die Differenzen derselben als von der Wirkung der Luft und noch von anderen Einflüssen befreite Werthe betrachtet und auch dann zur Bestimmung der Wärmestrahlung benützt werden, wenn wegen der Art der Versuche eine Berechnung der Wärmeleitung nicht möglich ist. Vergleicht man die Resultate solcher correspondirender Beobachtungen mit den beiden Formeln, so stellt sich heraus, dass den Beobachtungen von Dulong und Petit beide gleich gut genügen, dass aber mit den Beobachtungen von de la Provostaye und Desains die Formel der vierten Potenzen in viel besserer Uebereinstimmung steht als die Formel von Dulong und Petit.

In dem zweiten Theile der Abhandlung werden die Abkühlungsversuche benützt zur Bestimmung der Wärmestrahlung in absolutem Masse. Für die Wärmemenge, welche ein Quadratcentimeter einer schwarzen Fläche bei 100°C. mehr ausstrahlt als bei 0°, werden aus den Versuchen von Dulong und Petit gefunden die Werthe 1,00 und 0,98, aus den mit einem kugelförmigen Thermometer gemachten Versuchen von de la Provostaye und Desains 1,04, aus den Versuchen von Despretz über die Abkühlung von Kugeln aus Eisen, Messing, Zink und Zinn 1,11, 1,01, 1,07, 1,02. Hingegen liefern die mit einem cylindrischen Thermometer ausgeführten Versuche von de la Provostaye und Desains die viel kleineren Werthe 0,89 und 0,92.

In dem dritten Theile wird gezeigt, dass die Formel der vierten Potenzen mit den Versuchen Draper's über die Wärmestrahlung

eines glühenden Platindrahtes und mit jenen Ericson's über die Wärmestrahlung eines glühenden Eisenblockes in verhältnissmässig guter Uebereinstimmung steht.

Der vierte Theil enthält einige Bemerkungen über die Temperatur der Sonne. Aus der von Pouillet bestimmten Intensität der Sonnenstrahlung erhält man, das Emissionsvermögen der Sonne = 1 gesetzt, nach der Formel der vierten Potenzen die Temperatur der Sonne = 5580°. Nahezu dieselbe Zahl folgt nach dieser Formel auch aus den von Soret gemachten relativen Bestimmungen über die Strahlung der Sonne und einer glühenden Zirkonscheibe.

Berichtigung.

Im 3. Hefte Seite 176 Zeile 5 von unten gibt Herr Mechaniker Schneider an, dass die Anwendung des nach mir benannten Distanzmessers auf festem Boden keinen Schwierigkeiten unterliegt, und zwar um so weniger, als ein von ihm neuerer Zeit angefertigtes Instrument bedeutend verbessert wurde.

Um Missverständnissen vorzubeugen, halte ich mich verpflichtet, hier zu erklären, dass die unter Punkt 2 und 4 erwähnten Verbesserungen über meinen Wunsch schon vor zwei Jahren vom Herrn G. Starke auf allen Instrumenten seiner Construction in einer anderen aber sehr sicheren Weise und in unnachahmlicher Präcision ausgeführt wurden; dass alle Instrumente auch gegenwärtig in der ursprünglich adoptirten Form erzeugt werden, — die in der citirten Abhandlung erwähnten Verbesserungen demnach nicht als neu vorgenommene Vervollständigungen zu betrachten sind.

Die unter Punkt 1 erwähnte Aenderung ist an den vom Herrn Starke erzeugten Instrumenten anzubringen überflüssig, da die Basis allen Bedingungen entspricht.

Das unter Punkt 3 erwähnte Rectificationsverfahren ist mir nicht bekannt und kam daher auch nicht zur Anwendung.

Wien den 27. März 1879.

J. Roskiewicz, k. k. Oberst.

Bibliographische Mittheilung.

M. Th. Edelmann, neuere Apparate für naturwissenschaftliche Schule und Forschung. Stuttgart, Meyer & Zeller's Verlag (F. Vogel).

R. Handmann, der neue Egger'sche elektromagnetische Motor und die elektromagnetische Triebkraft im Allgemeinen. Münster, Aschendorff. . 2. —

G. Janeček, Leitfaden für die praktischen Uebungen in der qualitativen chemischen Analyse unorganischer Körper. Wien, Lehmann & Wentzel.

A. Mousson, die Physik auf Grundlage der Erfahrung, 1. Bd. 3. Aufl. Zürich, F. Schulthess.



Bezugsquellen-Liste.

Wir empfehlen den verehrlichen Instituten zur Verfertigung von physikalischen Apparaten etc. die Einschaltung Ihrer werthen Firma unter dieser Rubrik. Preis pro Zeile und Jahr M. 5. —.

München,
Glückstrasse Nr. 11.

Hochachtungsvoll
Die Expedition des Repertorium für Experimental-Physik
R. Oldenbourg.

Bezeichnung der Firma	Fabrikate und Angabe der Specialität
***Albert**, Frankfurt a. M., Mainzerstrasse.	Physikalische Vorlesungsapparate.
***Anstalt**, optische, astron.-physikal. Werkstätte, Würzburg (Eugen Hartmann).	Specialität: Optische Gläser, Präcisions-Instrumente für Physik.
Baur, Gustav, Stuttgart, Blumenstrasse 13.	Physikalische Apparate, elektro-medicinische Apparate, Apparate für Galvanoplastik, Haustelegraphen etc.
Breithaupt, F. W., & Sohn, Cassel.	Astronomische u. geodätische Instrumente.
***Cleff**, C. & F., Remscheid-Hasten.	Elektrische u. speciell magnet-elektrische Apparate.
Desaga, C., Univers.-Mechan., Heidelberg.	Bunsen's u. Kirchhoff's Instrumente.
Ducretet, E., & Co., rue des Feuillantines, Paris.	Cailletet's Apparate für Liquefaction der Gase.
Eiss, Joseph, Mechaniker, Wien VI, Stümpergasse 10.	Puluj's Apparat zur Bestimmung des mechan. Aequivalents der Wärme.
Ertel, T., & Sohn, München, Louisenstrasse 12.	Astronomische, mathematische u. geodätische Instrumente.
Fein, C. & E., Stuttgart, Kasernenstr. 43 b.	Galvanische Batterien und elektrische Vorlesungsapparate.
Hasler, G., Telegr.-Werkstätte, Bern.	Meteorologische Registrir-Instrumente.
Heller, Mechan. Werkstätte, Nürnberg.	Physik. Apparate für Vorlesungszwecke.
Houdek, Dr. & **Hervert**, Prag, Karpfengasse.	Egger'sche elektro-magnetische Motoren.
***Kappeller**, Heinr., jun., Wien V, Kettenbrückengasse 9.	Barometer, Thermometer, Psychrometer, Aräometer etc.
Lessing, Dr., Nürnberg.	Fabrik galvanischer Kohlen.
Lorenz, G., Mech. Werkstätten, Chemnitz.	Apparate zu Weinhold's Vorschule der Experimentalphysik.
Merz, G. & S., München, Müllerstr. 11.	Optische und astronomische Instrumente.
***Miller**, F., Universit.-Mechan., Innsbruck.	Physikalische u. mathemat. Instrumente.
Oertling, Aug., Berlin, Oranienburgerstrasse 57 u. 58.	Chemische Waagen, Sextanten, mathematische Instrumente, Kreistheilungen.
Riefler, Clemens, Maria Rain u. München, Karlsplatz 29.	Fabrik mathemat. Instrumente, Reisszeuge.
Schmidt, Franz, & **Haensch**, Berlin S., Stallschreiberstrasse 4.	Spectral-Apparate, Polarisations-Apparate, Mikroskope.
Schuchardt, Dr. Theodor, chem. Fabrik u. Mineralien-Handlung, Görlitz.	Fluorescirende und phosphorescirende Präparate. Sammlungen von 18 Präparaten zu spectroskopischen Untersuchungen. Krystalle. Krystallmodelle aus feinstem Krystallglas, Würfel und Parallelopipeden.
***Schuckert**, Sigmund, Nürnberg.	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Galvanoplastik u. Lehranstalten.
Steinheil, C. A., & Söhne, München, Landwehrstrasse 31.	Optische und astronomische Instrumente.
Stöhrer, E., jun., Leipzig.	Apparate für Projection phys. Versuche.
Stollnreuther, C., & Sohn, München.	Physikalische Instrumente.
Vogel, C. & J., Berlin, Ritterstrasse.	Uebersponnene Drähte.
Weisser, J. G., Söhne, St. Georgen (bad. Schwarzwald).	Drehbänke für physikal. Laboratorien.
Wesselhöft, Mechaniker, Halle a. d. Saale.	Elektrische und akustische Apparate.

* Ein ausführliches Inserat befindet sich im Inseratentheile.

☞ *Bei Bestellungen, Correspondenzen etc. an die hier angezeigten Firmen bitten wir das Repertorium für Experimentalphysik als Quelle zu bezeichnen.*

Bei der Expedition des Repertorium für Experimentalphysik (R. Oldenbourg) in München, Glückstrasse Nr. 11, sind folgende Kataloge eingelaufen:

Preiscourant der optischen und astronomischen Werkstätte **C. A. Steinheil Söhne** in **München**, 31 Landwehrstrasse, gegründet 1855, enthaltend: 1) Achromatische Fernrohr-Objective aus 3 Linsen. 2) Achromatische Doppel-Objective. 3) Oculare. 4) Zugfernrohre. 5) Marine-Fernrohre. 6) Kometensucher. 7) Ablesefernrohre. 8) Tuben ohne Stativ. 9) Tuben mit Rohrstativ. 10) Tuben mit Rohrachsen. 11) Astronom. Tuben. 12) Refractoren. 13) Astronom. Photographen-Apparat. 14) Reise-Universal-Instrument. 15) Passage-Instrument. 16) Passage-Prisma. 17) Taschenheliotrop. 18) Mikrometer. 19) Physikal. Apparate. 20) Collimator-Fernrohre. 21) Plan- und Planparallelgläser. 22) Prismen. 23) Centrirapparate. 24) Aplanatische Loupen. 25) Glasconus für Kurzsichtige, ferner Photographen-Objective. gr. 8. 14 Seiten mit einer lithogr. Tafel.

Preisverzeichniss der optischen und mechanischen Werkstätte von **Franz Schmidt & Haensch** in **Berlin S.**, Stallschreiberstrasse Nr. 4. I. Abth. Spectral-Apparate. a) Construction nach Bunsen und Kirchhoff. b) Construction à vision directe mit Amici- und Jansen-Körpern. c) Spectrometer. d) Spectral-Apparate für specielle Anwendung. e) Apparate zur Demonstration von Spectralversuchen. f) Hülfsapparate. II. Abth. Polarisations-Apparate. a) Apparate zu Unterrichtszwecken, b) zu technischen Zwecken. c) Hülfs- und Laboratorium-Utensilien. d) Complette Einrichtungen zur saccharimetrischen Polarisations-Analyse. III. Abth. Mikroskopie. a) Einfache Mikroskope, b) zusammengesetzte. c) Objectiv-Systeme. d) Neben-Apparate und Utensilien. gr. 8. 32 Seiten. 1877.

Specialitäten für Physik der Firma **Dr. Houdek & Hervert** in **Prag**, Karpfengasse 10, enthaltend: 1) Elektromotor von P. Martin Egger. 2) Neumann's Modell der Decimalwaage. 3) Fallmaschine nach Lippich. 4) Apparat zur Erläuterung des Archimedischen Princips. 5) Luftpumpe für Volks- und Bürgerschulen. 6) Modell der Dampfmaschine mit Glascylinder. 7) Wellenmaschine nach Mach, 8) nach Wheatstone. 9) Stroboskopische Scheiben nach Müller. 10) Zeichnungen der Wellen. 11) Photometer nach Zenger. 12) Apparat nach Mach für Brechung und Reflexion. 13) Pappmodelle nach Müller zur Erklärung der Doppelbrechung und chromat. Polarisation. 14) Drahtmodelle zur Erläuterung der Polarisation und Doppelbrechung des Lichtes. 15) Mach's Elektroskop. 16) Doppelelektromaschine nach Poggendorf. 17) Influenzmaschine nach Holtz. 18) Smee'sche Tauchbatterie. 19) Tauchbatterie für doppelchromsaures Kali. 20) Universal-Rheometer nach Zenger. 21) Apparat zur genauen Erläuterung der Hebelgesetze nach Dr. Bauer. Zeugnisse. gr. 8. 40 Seiten mit 24 Abbildungen.

Verzeichniss physikalischer und optischer Instrumente und Apparate, verfertigt bei **J. Wilh. Albert**, Mechaniker in **Frankfurt a. M.**, Neue Mainzerstrasse Nr. 34. gr. 8. 94 Seiten mit 271 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Höchst elegant ausgestattet. 1873. — Der Inhalt dieses in 20 Hauptabschnitte eingetheilten Kataloges ist zu reichhaltig, als dass derselbe auch nur auszugsweise hier wiedergegeben werden könnte.

Catalogue des Instruments de Précision de **E. Ducretet & Cie.**, Constructeurs d'Instruments de Précision pour les Sciences et l'Industrie, **Paris, 89, rue des Feuillantines.** Troisième Partie. Magnétisme — Électricité statique et dynamique. gr. 8. 124 Seiten. Mit 146 eingedruckten Holzschnitten. Sehr elegant ausgestattet.

XV. Band. 6. u. 7. Heft.

REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE & ASTRONOMISCHE INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN.

FÜNFZEHNTER BAND.

Inhalt des 6. u. 7. Heftes

(mit Tafel XV bis XVIII).

MÜNCHEN, 1879.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Bei Correspondenzen, Bestellungen etc. an die hier anzeigenden Firmen bitten wir das Repertorium für Experimentalphysik gefl. als Quelle zu nennen.

Um in den Fortschritten der Physik eine möglichst grosse Vollständigkeit zu erzielen und um deren Erscheinen möglichst beschleunigen zu können, werden die geschätzten Herren Verfasser von Arbeiten aus der Physik, Meteorologie und Physik der Erde dringend gebeten, der physikalischen Gesellschaft zu Berlin Separatabzüge Ihrer Abhandlungen einzusenden und an den Schriftführer der Gesellschaft Herrn Professor Rüdorff, Berlin, Niederwallstr. 12, zu adressiren. (5)

Zur Theorie der doppelten Brechung; Gleichberechtigung des Strahles und der Normalen als Ausgangsbegriffes[1].

Von

E. Ketteler.

(Aus den Verhandlungen des naturhist. Vereins der preuss. Rheinlande und Westfalens vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Zum Erweise des in der Ueberschrift ausgesprochenen Satzes, welchen meines Wissens bisher bloss Stefan[2]) vertreten hat, vergegenwärtige man sich die möglichen einfachsten Vorstellungen, auf denen eine Theorie der doppelten Brechung sich aufbauen lässt. Wenn zunächst Fresnel die Annahme machte, dass die natürlichen doppelt brechenden Mittel in ihrer Wirkungsweise ersetzt werden können durch ein Aggregat von Aethertheilchen, in welchem die Masseneinheit nach drei auf einander senkrechten Hauptrichtungen durch verschieden grosse Elasticitätskräfte bewegt wird, so ist diese Anschauung, obwohl gegenwärtig unhaltbar geworden, doch anscheinend erst von Wenigen aufgegeben. Wenn freilich Fresnel selbst sich auf die Betrachtung derjenigen Kraft beschränkte, welche ein verschobenes einzelnes Theilchen in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, so ging man später von der parallelen Verschiebung von Wellebenen aus. Ebenso leitet man gewöhnlich die Gesetze der Fortpflanzung nicht mehr aus der resultirenden Gesammtbewegung ab, sondern entwickelt lieber die Bewegungscomponenten nach den drei Hauptachsen selbständig. In diesem Fall ordnen sich den Transversalkräften sofort gewisse Longitudinalkräfte zu.

Behandelt man die drei erwähnten Bewegungsgleichungen unbekümmert um die Natur dieser letzteren Kräfte, aber unter Ausschluss von Dichtigkeitsänderungen des Mittels, so lassen sich dieselben mit

1) Zugleich als Vorwort zu dem folgenden Aufsatz.

2) Wien. Ber. L (2) 505.

v. Lang[1]) ohne weiteres in der Form von Integralgleichungen hinschreiben. Die nähere Untersuchung charakterisirt dann diese Kräfte als hydrodynamische Druckkräfte. Nennen wir m die Aethermasse der Volumeneinheit, $\mathfrak{e}_x$, $\mathfrak{e}_y$, $\mathfrak{e}_z$ die Deformationsconstanten für die drei Achsenrichtungen, ferner ξ, η, ζ die Schwingungscomponenten zur Zeit t und p den entsprechenden Druck, so gestalten sich die in Rede stehenden Gleichungen allgemeiner wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{dp}{dx}\right) &= \mathfrak{e}_x \Delta_3 \xi \\ m\left(\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{dp}{dy}\right) &= \mathfrak{e}_y \Delta_2 \eta \\ m\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}+\frac{dp}{dz}\right) &= \mathfrak{e}_z \Delta_2 \zeta, \end{aligned}\right\} \qquad \text{I.}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Sollen diese Gleichungen für transversale Schwingungen auf die Fresnel'sche Fläche der Fortpflanzung führen[2]), so muss bezüglich p angenommen werden, dass bei jeder kleinen Verschiebung die totale Arbeit des Druckes verschwindet, dass also

$$\frac{dp}{dx}\mathfrak{A}_x + \frac{dp}{dy}\mathfrak{A}_y + \frac{dp}{dz}\mathfrak{A}_z = 0,$$

unter $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ die den entsprechenden kleinen Wegprojectionen proportionalen axialen Amplituden verstanden. Geht man nämlich durch resp. Multiplication mit denselben und Addition obiger Gleichungen von den bewegenden Kräften zu den Arbeiten über, so erhält man unter vorstehender Bedingung:

$$m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\mathfrak{A}_x + \frac{d\eta^2}{dt^2}\mathfrak{A}_y + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\mathfrak{A}_z\right) = \mathfrak{e}_x\mathfrak{A}_x\Delta_2\xi + \mathfrak{e}_y\mathfrak{A}_y\Delta_2\eta + \mathfrak{e}_z\mathfrak{A}_z\Delta_2\zeta, \quad (1$$

1) Einleitung in die theor. Physik. Braunschweig 1868. Hft. 2 S. 330.

2) Ich darf hier wohl die Meinung äussern, dass alle künstlicheren Theorien, welche sogenannte quasitransversale Schwingungen ergeben, gegenüber den einfachen Fresnel'schen Gesetzen kaum auf reale Wahrheit Anspruch haben. Andererseits erachte ich auch den Beweis, dass die Schwingungsebene auf der Polarisationsebene senkrecht steht, als thatsächlich erbracht.



welche Gleichung durch Einsetzung der Integralausdrücke:

$$\left.\begin{array}{c}\xi = \mathfrak{A}_x \cos\varphi, \quad \eta = \mathfrak{A}_y \cos\varphi, \quad \zeta = \mathfrak{A}_z \cos\varphi \\ \varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{ux + vy + wz}{l}\right),\end{array}\right\} \quad (2$$

worin T die Schwingungsdauer, $l = \omega T$ die Wellenlänge und u, v, w die Cosinus der Winkel zwischen Wellennormale und Achsen bedeuten, übergeht in:

$$\frac{m}{T^2}\mathfrak{A}^2 = \frac{\mathfrak{e}_x \mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{e}_y \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{e}_z \mathfrak{A}_z^2}{l^2}$$

oder

$$m\omega^2 = \mathfrak{e}_x U^2 + \mathfrak{e}_y V^2 + \mathfrak{e}_z W^2,$$

sofern man entsprechend unter U, V, W die Cosinus der Winkel zwischen Schwingung und Achsen versteht.

Dem hiedurch ausgesprochenen Gesetze wird unbeschadet der specielleren Form der Function p seitens der Gleichungen I. genügt, wenn man in der Erwägung, dass der Druck im Momente des Durchgangs durch die Gleichgewichtslage verschwindet, sonst aber ähnlich verläuft wie die Ausschläge, die Annahme macht:

$$p = c \sin\varphi,$$

unter c eine von $x, y, z; t$ unabhängige neue Variable verstanden. Dies eingesetzt, gibt bei Einführung der axialen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten:

$$\left.\begin{array}{l}(\omega_x^2 - \omega^2)\; U = C\omega^2 u \\ (\omega_y^2 - \omega^2)\; V = C\omega^2 v \\ (\omega_z^2 - \omega^2)\; W = C\omega^2 w,\end{array}\right\} \quad (3$$

worin noch $C\omega^2 = -cl$ geschrieben ist. Aus diesen Gleichungen leitet man durch bekannte Behandlung ab:

$$\left.\begin{array}{c}\omega^2 = \omega_x^2 U^2 + \omega_y^2 V^2 + \omega_z^2 W^2 \\ \frac{u^2}{\omega_x^2 - \omega^2} + \frac{v^2}{\omega_y^2 - \omega^2} + \frac{w_2^2}{\omega_z^2 - \omega^2} = 0.\end{array}\right\} \quad (4$$

Multiplicirt man dieselben noch resp. mit u, v, w und addirt, so kommt

$$C\omega^2 = \omega_x^2 Uu + \omega_y^2 Vv + \omega_z^2 Ww,$$

so dass man erhält:

$$C = \operatorname{tang}\delta, \quad (5$$

wo δ den Winkel zwischen Strahl und Normale bedeutet. Der vor-

stehende Ausdruck berechtigt dann schliesslich, dem Druck p mit v. Lang[1]) von vornherein die Form zu geben:

$$p = \mathfrak{a}\frac{d\xi}{dx} + \mathfrak{b}\frac{d\eta}{dy} + \mathfrak{c}\frac{d\zeta}{dz}, \tag{6}$$

wo $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ Constanten bedeuten, deren Werthe sich sonach als

$$\mathfrak{a} = \omega_x^2, \quad \mathfrak{b} = \omega_y^2, \quad \mathfrak{c} = \omega_z^2$$

herausstellen.

Sofern die $\mathfrak{e}$ und m gegebene Grössen sind, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω von T und l unabhängig, d. h. das vorausgesetzte Mittel ist dispersionslos.

Zu beachten bleibt endlich, dass bei der Totalverschiebung der Wellen keine longitudinale Drückarbeit geleistet wird, dass also die gesammte Arbeit der bewegenden Kräfte sich in Arbeit der Beschleunigung umsetzt.

Um zufolge dieser Theorie von der Geschwindigkeitsfläche der Normalen (Gl. 4b) zu der der Strahlen d. h. zur Wellenfläche fortzuschreiten, soll man bekanntlich diese als die Enveloppe der ersteren deuten.

Das bisher besprochene anisotrope Idealmittel Fresnel's mit drei auf einander senkrechten verschiedenen Deformationsconstanten lässt sich gegenwärtig den realen doppelt brechenden Mitteln als Aggregaten von Aether- und Körpertheilchen nicht mehr substituiren; es führt weder ohne neue Annahmen zu den Intensitätsformeln der Spiegelung und Brechung, noch auch anscheinend zu einer Erklärung der (anomalen) Dispersion. — Man kann indess dem Fresnel'schen Typus einen zweiten gegenüberstellen.

Man denke sich die Theilchen eines isotrop geordneten unzusammendrückbaren Aethers mit den allseitig gleichen Elementen $\mathfrak{e}$ und m noch mit fremden Massen beschwert, und zwar möge bei einer Verschiebung parallel der X-Achse per Volumeneinheit die Gesammtmasse $m + m_x$ bewegt werden. Die Masse m_x soll dabei so mit m verbunden sein, dass sie bloss nach der X-Richtung mitgenommen wird, nach allen übrigen Richtungen aber ruhend bleibt. Ebenso möge bei der Verschiebung parallel der Y-Achse eine ähnlich verbundene Masse m_y mitgenommen, also die Gesammtmasse $m + m_y$ und parallel der Z-Achse endlich die Gesammtmasse $m + m_z$ bewegt werden.

1) Wien. Ber. LXXIII (2), Mai-Heft 1876.

Man hätte sonach ein Idealmittel, in welchem bei einer gleichen Verschiebung des Aethers nach beliebiger Richtung seitens einer constant bleibenden Elasticität fort und fort andere Massen in Schwingungen versetzt werden. Da offenbar der Effect zunächst für die Achsenrichtungen der gleiche bleibt, mag man bei Gleichheit der Quotienten aus Elasticität und Masse die Zähler oder Nenner veränderlich nehmen, so werden, so lange

$$\omega_x^2 = \frac{\mathfrak{e}_x}{m} = \frac{\mathfrak{e}}{m + m_x}, \ldots,$$

beide Idealmittel auch für alle übrigen Richtungen bezüglich der Schwingungslage und Fortpflanzungsgeschwindigkeit übereinstimmende Gesetze ergeben. Man wird daher für diesen zweiten Typus die Differentialgleichungen haben:

$$\left.\begin{aligned} (m + m_x)\left(\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{dp}{dx}\right) &= \mathfrak{e}\Delta_2\xi \\ (m + m_y)\left(\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{dp}{dy}\right) &= \mathfrak{e}\Delta_2\eta \\ (m + m_z)\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{dp}{dz}\right) &= \mathfrak{e}\Delta_2\zeta. \end{aligned}\right\} \quad \text{II.}$$

Sie unterscheiden sich von den Gleichungen I. vornehmlich dadurch, dass bei Aufwendung einer gewissen Arbeit zur Totalverschiebung der Wellebenen die bewegenden Kräfte sich nicht mehr einfach in beschleunigende umsetzen, sondern ausserdem auch longitudinale Druckarbeit verrichten. Um von diesen Gleichungen zur Wellenfläche zu gelangen, dazu bedarf es natürlich gleichfalls der Vornahme der Umhüllung.

Wenn man bisher, wie namentlich Stokes[1]) entwickelt hat, etwas kühn die Gleichung (4a) in dem Sinne als das thatsächliche Gesetz der Lichtbewegung in Krystallen betrachtet hat, dass dieselbe auf die Geschwindigkeit der Normalen und die verwandte, aus ihr ableitbare (s. u.) Gleichung (12a) auf die der Strahlen bezogen werden soll, so haben zum Glück die entsprechenden, von Stokes ausdrücklich zum Zweck der Entscheidung angestellten Versuche[2]) diese Zweifel beseitigt. Wir werden daher wenigstens den Gleichungen II. die ihnen bisher zugelegte Bedeutung lassen und heben überhaupt bezüglich des zweiten Typus hervor, dass derselbe zu der richtigen von der Reflexions-

1) Rep. Brit. Assoc. (1862).
2) Compt. rend. LXXVII p. 1150.

theorie verlangten Gleichung der lebendigen Kräfte hinführt und dass hier die Erklärung der Dispersion auf eine Abhängigkeit der Massen m_x, m_y, m_z von der Wellenlänge hinauskommt, welche Grössen allerdings in den natürlich gegebenen Mitteln der Beweglichkeit der Körpertheilchen proportional sind. Die drei Gleichungen II. enthalten dieselben ersichtlich als gegebene Grössen, und um daher die Dispersion der doppelt brechenden Mittel theoretisch zu begründen, darf man nicht bei Typus II. stehen bleiben, sondern hat unmittelbar auf die natürliche Constitution zurückzugehen.

Da nun bei der Theorie des Mitschwingens der Körpertheilchen die von denselben ausgehenden Reactionskräfte und die von diesen Kräften geleisteten Arbeiten in den Vordergrund treten, so begreift sich, dass ein Anknüpfen an die Form der Gleichungen II., welche zu Arbeiten von Beschleunigungs- und Druckkräften führen, mit solchen Schwierigkeiten verbunden erscheint, dass ein Streben nach Vereinfachung gerechtfertigt wird. Zudem ist der bisher übliche Weg der Entwicklung der Theorie der doppelten Brechung nicht frei von Schwächen.

Schon oben wurde angedeutet, dass man erst auf dem Umwege einer fictiven (mathematischen Hilfs-) Fläche, der Geschwindigkeitsfläche der Wellennormalen, zur eigentlich physikalischen Fläche, der Wellenfläche, hingelangt und dass demzufolge auch die Definition des Strahles nicht recht gelingen will[1]. Könnte man freilich umgekehrt verfahren, so dass die Hilfsfläche die secundäre würde, so erschiene auch der Uebergang von der primären aus durch Fällung von Perpendikeln auf die Tangentialebenen viel plausibler als die jetzige Begründung der umgekehrten Enveloppe-Construction.

Selbstverständlich darf man bei einem solchen Versuche nicht auf das Verfahren Fresnel's, auf die Wirkung von elastischen Kräften durch Verschiebung eines einzelnen Punktes oder einer einzelnen Punktreihe zurückgreifen, sondern man hat die gleichzeitige Verschiebung aller succedirenden Ebenen ins Auge zu fassen. Nun ist die übliche Vorstellungsweise die folgende. Auf Grund des Huyghens-schen Princips, welches die allseitige Ausbreitung des Lichtes auf die Beihilfe beliebig gegebener Erschütterungsmittelpunkte von Elementarwellen zurückführt, construirt man im Innern des Krystalles eine in

1) Man vergleiche übrigens die Erklärung Kirchhoff's in den Abhandl. d. Berl. Akad. 1876.



gleicher Ebene liegende Folge von Oberflächenelementen neben einander befindlicher Wellenflächen als sogenannte Wellebene und lässt dann diese Ebene als abstracten Begriff sich parallel verschieben, ohne sich eigentlich um die in schräger Richtung erfolgende Bewegungsübertragung von Theilchen zu Theilchen und um das Wie und Warum dieser Schiefe weiter zu bekümmern. In unserem Sinne sind denn auch die Differentialgleichungen I. und II. wenig mehr als Bedingungen der Möglichkeit der Coëxistenz solcher abstracter Wellebenen, die, könnte man vielleicht sagen, ihre Aufgabe fast mehr nach der geometrischen als nach der mechanischen Seite hin gelöst haben.

Wenngleich nun das Huyghens'sche Princip eine so universelle Geltung hat, dass keine von der Natur gebotene Wellenbewegung ohne die Intervention desselben zu Stande kommt, so lässt sich dasselbe nichtsdestoweniger bei der theoretischen Untersuchung arbeitender Kräfte umgehen und so gewissermassen der natürlichen punktförmigen Ausbreitung der Wellen die künstliche Aufhebung der Solidarität der schwingenden Theilchen durch passende zwischen ihnen angebrachte Verbindungen entgegenstellen. Man kann dann diese Theilchen durch äussere Kräfte auch nach anderen Ebenen verschieben, als dem zwanglosen Zustand derselben entspricht, und die dabei geleistete Arbeit in Rechnung ziehen. Gelingt es ferner im einzelnen Falle, den Einfluss der erwähnten Verbindungen durch frei wirkende Kräfte zu ersetzen, so wird selbst die Aufstellung entsprechender neuer, nach den Coordinatenachsen getrennter Bewegungsgleichungen ermöglicht.

Dies vorausgesetzt, mögen die Theilchen eines Mittels vom Typus II., die im Ruhezustand auf einer beliebigen Richtung S liegen, senkrecht zu dieser mittelst einer äusseren Kraft nach dem Gesetze

$$\left.\begin{aligned} \xi_s = \mathfrak{A}_x^s \cos\varphi_s, \quad \eta_s = \mathfrak{A}_y^s \cos\varphi_s, \quad \zeta_s = \mathfrak{A}_z^s \cos\varphi_s \\ \varphi_s = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{xu_s + yv_s + zw_s}{l_s}\right) = \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{r_s}{\omega_s}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (7$$

verschoben und in einer bestimmten Lage festgehalten werden. Die Componenten der hiedurch bleibend geweckten Elasticitätskraft sind alsdann per Volumenheit die folgenden:

$$\mathfrak{e}\Delta_2\xi_s, \quad \mathfrak{e}\Delta_2\eta_s, \quad \mathfrak{e}\Delta_2\zeta_s.$$

Man lasse nun die Theilchen dem Zuge dieser Kraft folgen, sorge aber durch passende Verbindungen dafür, dass bei der Bewegung das Gesetz der Gleichung (7) genau eingehalten werde, und unterbreche

dieselbe, sobald die kleinen Wege $d\mathfrak{A}_x^s$, $d\mathfrak{A}_y^s$, $d\mathfrak{A}_z^s$ zurückgelegt sind. Es ist dann während der Verschiebung die Arbeit

$$dW_s = \mathfrak{e}\,[\Delta_2\xi^s d\mathfrak{A}_x^s + \Delta_2\eta^s d\mathfrak{A}_y^s + \Delta_2\zeta^s d\mathfrak{A}_z^s] \tag{8}$$

verzehrt worden.

Selbstverständlich wird bei diesem Vorgang die gewonnene Spannkraft eben so wenig zu Druckarbeit verbraucht wie bei der analogen Transversalverschiebung der Schichten eines isotropen Mittels, und wird daher alle potentielle Energie zur Geschwindigkeitserhöhung der bewegten Massen aufgewandt. Man hat daher auch die Gleichung

$$dW_s = (m + m_x)\frac{d^2\xi_s}{dt^2}d\mathfrak{A}_x^s + (m + m_y)\frac{d^2\eta_s}{dt^2}d\mathfrak{A}_y^s + (m + m_z)\frac{d^2\zeta_s}{dt^2}d\mathfrak{A}_z^s. \tag{9}$$

Combinirt man dieselbe mit der vorhergehenden und integrirt, so erhält man beispielsweise die Form:

$$n_s^2 - 1 = \frac{m_x U_s^2 + m_y V_s^2 + m_z W_s^2}{m}, \tag{10}$$

wo U_s, V_s, W_s die Cosinus der Winkel zwischen der auf S senkrechten Schwingungsrichtung und den Achsen bedeuten und ausserdem zur Abkürzung gesetzt ist: $\frac{\mathfrak{e}}{m\,\omega_s^2} = \frac{v^2}{\omega_s^2} = n_s^2$. Diese nämliche Beziehung findet man, wenn man die entsprechenden Verhältnisse der natürlichen Mittel auf den ideellen Typus II. reducirt (vgl. u. Gl. V.).

Man kann jetzt auch die gewonnene Arbeitsgleichung in die drei folgenden Einzelgleichungen zerfällen:

$$\left.\begin{aligned} (m + m_x)\frac{d^2\xi_s}{dt^2} - \frac{dp_s}{dx} &= \mathfrak{e}\Delta_2\xi_s \\ (m + m_y)\frac{d^2\eta_s}{dt^2} - \frac{dp_s}{dy} &= \mathfrak{e}\Delta_2\eta_s \\ (m + m_z)\frac{d^2\zeta_s}{dt^2} - \frac{dp_s}{dz} &= \mathfrak{e}\Delta_2\zeta_s, \end{aligned}\right\} \quad \text{IIIa.}$$

sofern man nämlich zu den gegebenen bewegenden Kräften drei den Einfluss der Verbindungen repräsentirende variable Kräfte (Druckkräfte) hinzufügt, deren Totalarbeit man gleich Null setzt. Ersichtlich verhalten sich diese Differentialgleichungen einer nicht ganz sicheren aprioristischen Construction gegenüber ganz ähnlich den Gleichungen I., von denen sie sich nur dadurch unterscheiden, dass hier bei gleicher Form der Druckcomponenten die Einheit der Kraft auf verschiedene

Massen, dort die Einheit der Masse auf verschiedene Kräfte bezogen wird. Es entsprechen ihnen die Integralgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{\omega_x^2}-\frac{1}{\omega_s^2}\right)U_s &= C\frac{1}{\omega_s^2}\,u_s\\ \left(\frac{1}{\omega_y^2}-\frac{1}{\omega_s^2}\right)V_s &= C\frac{1}{\omega_s^2}\,v_s\\ \left(\frac{1}{\omega_z^2}-\frac{1}{\omega_s^2}\right)W_s &= C\frac{1}{\omega_s^2}\,w_s.\end{aligned}\right\}\qquad (11$$

Man leitet daraus ab:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\omega_s^2}=\frac{U_s^2}{\omega_x^2}+\frac{V_s^2}{\omega_y^2}+\frac{W_s^2}{w_z^2}\\ \frac{u_s^2}{\frac{1}{\omega_x^2}-\frac{1}{\omega_s^2}}+\frac{v_s^2}{\frac{1}{\omega_y^2}-\frac{1}{\omega_s^2}}+\frac{w_s^2}{\frac{1}{\omega_z^2}-\frac{1}{\omega_s^2}}=0,\end{aligned}\right\}\qquad (12$$

Gleichungen, von denen in der That die erstere mit der mittelst des Arbeitsprincips unmittelbar gewonnenen Gleichung (10) identisch ist, während die zweite die Wellenfläche darstellt. Würde man hier dem p dieselbe Form geben dürfen wie oben in Ausdruck (6), so behielte zwar C seine frühere Bedeutung, aber andererseits würden die Coëfficienten

$$\mathfrak{a}=\frac{\omega_s^2}{\omega_x^2},\quad \mathfrak{b}=\frac{\omega_s^2}{\omega_y^2},\quad \mathfrak{c}=\frac{\omega_s^2}{\omega_z^2}$$

mit der Richtung S veränderlich.

Doch kehren wir zum Ausdruck (8) für die erhaltene Elementararbeit $d W_s$ zurück. Man kann dieselbe auch in folgender Weise gewinnen. Die nämlichen Theilchen des Mittels, deren Gleichgewichtslage die Linie S ist, mögen nunmehr senkrecht zu einer Richtung N, welche mit S einen vorläufig unbestimmten Winkel δ bilde, nach dem Gesetz der Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned}\xi_n=\mathfrak{A}_x^n\cos\varphi_n,\quad \eta_n=\mathfrak{A}_y^n\cos\varphi_n,\quad \zeta_n=\mathfrak{A}_z^n\cos\varphi_n\\ \varphi_n=2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{xu_n+yv_n+zw_n}{l_n}\right)=\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{r_n}{\omega_n}\right)\end{aligned}\right\}\qquad (13$$

hin- und hergeführt werden, und es möge zugleich dafür gesorgt sein, dass

$$\left.\begin{aligned}\frac{r_s}{\omega_s}=\frac{r_n}{\omega_n},\quad \varphi_s=\varphi_n,\\ l_n=l_s\cos\delta,\quad \mathfrak{A}_n=\mathfrak{A}_s\cos\delta,\end{aligned}\right\}\qquad (14$$

unter $\mathfrak{A}_n$ und $\mathfrak{A}_s$ die vollen Amplituden verstanden. Beschränkt man die Bewegung nur auf ein Zeitelement, bis nämlich die kleinen Wege $d\mathfrak{A}_x^n$, $d\mathfrak{A}_y^n$, $d\mathfrak{A}_z^n$ zurückgelegt sind, so hat man:

$$dW_n = \mathfrak{e}\,[\Delta_2\xi_n d\mathfrak{A}_x^n + \Delta_2\eta_n d\mathfrak{A}_y^n + \Delta_2\zeta_n d\mathfrak{A}_z^n]$$

und findet sonach, dass

$$dW_s = dW_n,$$

dass also bei der einen oder anderen Bewegung die gleiche Arbeit verbraucht wird. Die Arbeit letzteren Ursprungs möge nun, selbstverständlich immer unter Benutzung passender fester Verbindungen, zur partiellen Umwandlung in Beschleunigungs- und Druckarbeit verwandt werden. Man wird dann schreiben dürfen:

$$dW_n = (m+m_x)\left(\frac{d^2\xi_n}{dt^2} + A\frac{dp}{dx}\right)d\mathfrak{A}_x^n + (m+m_y)\left(\frac{d^2\eta_n}{dt^2} + B\frac{dp}{dy}\right)d\mathfrak{A}_y^n + \ldots,$$

unter A, B, C noch festzustellende Functionen verstanden. Lässt man bei gegebener Richtung S Winkel δ und damit die numerischen Werthe von A, B, C von Null ab allmählich ansteigen, so entsprechen der Richtung S immer andere Richtungen N und immer andere Flächen als die zugehörigen geometrischen Oerter der die ω_n bestimmenden Endpunkte derselben. Wenn dann schliesslich der Einfluss der Verbindungen gänzlich aufhört und damit das Huygens'sche Princip zur vollen Wirksamkeit gelangt, werden

$$A = B = C = 1.$$

Die geometrischen Oerter der Endpunkte von S und N treten dann in das Verhältniss von eingehüllter und einhüllender Fläche, und die Bestimmungstücke der letzteren führen sich auf die Gleichungen zurück:

$$\left.\begin{aligned}(m+m_x)\left(\frac{d^2\xi_n}{dt^2} + \frac{dp_n}{dx}\right) &= \mathfrak{e}\Delta_2\xi_n\\ (m+m_y)\left(\frac{d^2\eta_n}{dt^2} + \frac{dp_n}{dy}\right) &= \mathfrak{e}\Delta_2\eta_n\\ (m+m_z)\left(\frac{d^2\zeta_n}{dt^2} + \frac{dp_n}{dz}\right) &= \mathfrak{e}\Delta_2\zeta_n.\end{aligned}\right\} \qquad \text{IIIb.}$$

Fassen wir jetzt das Gesagte zusammen, so entspricht einer und derselben auf verschiedene Krystallrichtungen bezogenen potentiellen Energie eine veränderliche Umsetzung in Beschleunigung und Druck. Die Beschleunigung wird ein Maximum und die Druckarbeit verschwindet, so lange man sich unter Beihilfe zweckmässiger Verbindungen

die ursprüngliche äussere Arbeit so ausgeführt denkt, dass die Theilchen bei constanter Amplitude $\mathfrak{A}_s$ und constanter Wellenlänge l_s um die beliebige Richtung S in transversale Schwingungen gerathen. Denkt man sie sich indess so ausgeführt, dass die nämlichen Theilchen der Richtung S mit der coordinirten Amplitude $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}_s \cos\delta$ und Wellenlänge $l_n = l_s \cos\delta$ senkrecht zur coordinirten Richtung N vollkommen frei schwingen, so wird für diese Ausschläge, welche die Ruherichtung S nach wie vor mit der Geschwindigkeit ω_s durchlaufen, die gewissermassen verlorene Amplitude $\mathfrak{A}_s \sin\delta$ zur Leistung einer entsprechenden anderen Arbeit verbraucht.

Die Richtung S als Radius vector der Wellenfläche (Gl. 12b) heisst ein Strahl; um dieselbe als Richtung ihrer Gleichgewichtsörter pendeln die schwingenden Theilchen mit der Amplitude $\mathfrak{A}_n$ frei herum, genau so, wie sie bei Anbringung passender Verbindungen mit der Amplitude $\mathfrak{A}_s$ in senkrechter Richtung um die nämliche Ruhelage vibriren würden. Die Verschiebung der Wellebene und damit die Bewegungsübertragung von Theilchen zu Theilchen erfolgt sonach längs dieser Richtung S, und daher erscheint dieselbe der Hilfsrichtung N gegenüber, welche man die Normale nennt, als die primäre (physikalisch bedeutsame), während andererseits die Amplitude $\mathfrak{A}_s = \frac{\mathfrak{A}_n}{\cos\delta}$ ebenso als Hilfsgrösse (virtuelle Amplitude) der physikalischen Amplitude $\mathfrak{A}_n$ zugeordnet ist. Das Gleiche gilt von dem Hilfsbegriff der (Strahl-) Ebene

$$r_s = xu_s + yv_s + zw_s$$

gegenüber der thatsächlichen (Well-) Ebene

$$r_n = xu_n + yv_n + zw_n$$

sowie von den Hilfsbegriffen l_n und ω_n gegenüber den physikalischen l_s und ω_s.

Bezüglich des Verhältnisses zwischen Strahl und Normale hat man sonach offen anzuerkennen, dass die Differentialgleichungen IIIb. gerade die Richtung der Gleichgewichtsörter der Schwingungen gar nicht enthalten. Nun kann keine Wellenbewegung ohne eine solche Folge von Ruhelagen gedacht werden. Wenn daher im Innern eines Krystalles zwei unendlich wenig gedrehte, abstract gedachte Wellensysteme neben einander bestehen sollen, so sind beide an eine einzige Richtung der Gleichgewichtsörter gebunden, und diese ist keine andere

als die Richtung des Strahles, längs der sich dann allerdings dem Interferenzprincip gemäss die Partialausschläge summiren.

Ist nun im Vorstehenden der Nachweis geführt, dass man in der Theorie der doppelten Brechung ebensowohl den Strahlbegriff wie den Normalbegriff zum Ausgang wählen darf, so soll im Folgenden gezeigt werden, dass jedes dieser beiden Verfahren seine eigenthümlichen Vortheile bietet. Ich denke mir um den Strahl wie um die Normale der natürlichen Mittel unendlich enge gerade Cylinder gelegt und nenne dieselben kurz resp. Strahl- und Normalcylinder. Wenn dann bezüglich des Ueberganges des Lichtes, so lange die Mittel als ideell durchsichtig vorausgesetzt werden, die Strahl- wie die Normalcylinder sich als gleichmässig brauchbar erweisen, so überwiegt doch alsbald die Bedeutung der letzteren, sobald es sich um absorbirende Mittel handelt. Andererseits vereinfachen die Strahlcylinder die Differentialgleichungen der inneren Bewegung und zwar sowohl bei der Ableitung der Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes in den fortschreitenden (transferirten) doppelt brechenden Mitteln als auch namentlich bezüglich der Behandlung des Dispersionsproblems.

Ueber den Uebergang des Lichtes zwischen absorbirenden isotropen und anisotropen Mitteln und über die Mechanik der Schwingungen in denselben.

Von

E. Ketteler.

Ausgehend von der Annahme des Zusammenschwingens der Aether- und Körpertheilchen bin ich im Verfolg meiner optischen Untersuchungen zu Resultaten gelangt, denen eine bemerkenswerthe Allgemeinheit zukommen dürfte. Ich erlaube mir, dieselben hier vollständig zusammenzustellen und sie zugleich mit möglichster Strenge aus ihren Prämissen zu entwickeln.

Was zunächst die Uebergangsbedingungen des Lichtes betrifft, so denke man sich zwei absorbirende — vorläufig isotrope — Mittel in ebener Trennungsfläche sich berühren. Im Innern des ersten Mittels bewege sich eine gegebene ebene Welle gegen die Trennungsfläche hin und werde an derselben zum Theil gespiegelt, zum Theil gebrochen. Da das Mittel absorbirt, so charakterisirt sich die gegebene Welle durch zwei ausgezeichnete Richtungen, die ich kurz die Extinctionsrichtung und die Propagationsrichtung nennen werde. Sie sind die Normalen zweier Ebenen, der Ebene gleicher Amplituden und der Ebene gleicher Phasen, welch letztere kurzweg die Wellebene heisse.

Man mache nun die Trennungsfläche zur XY-Ebene eines Coordinatensystems, ziehe darin irgend welche Gerade als X-Achse und nehme die Richtung des Lothes als Z-Achse desselben. Man fixire ferner zwei unendlich kleine Volumenelemente, die im ersten und zweiten Mittel an einander stossen, mache ihren Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten und beziehe auf ihn die sämmtlichen Schwingungen der Theilchen beider Mittel. Für ein Aether- resp. Körpertheilchen, dessen Ruhelage sich in x, y, z befindet, mögen die Schwingungscomponenten bezeichnet werden als ξ, η, ζ, resp. ξ', η' ζ'.

Da ich weiter unten zeigen werde, dass sich die Körpertheilchen mit einem gewissen Recht als eine Art Ballast oder Bewegungswiderstand für den Aether bezeichnen lassen, und da man zudem für das eine der beiden Mittel die ponderablen Massen fortnehmen, dasselbe also durch den Weltäther ersetzen darf, so begreift sich, dass in die (linearen) Uebergangsbedingungen ausschliesslich die Ausschläge der Aethertheilchen, resp. die durch sie hervorgerufenen elastischen Kräfte des Aethers eingehen. Die von mir gefundenen sogenannten Grenzgleichungen sind nun folgende vier:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma\left(\alpha\frac{d\zeta}{dz}\right)_1 &= \Sigma\left(\alpha\frac{d\zeta}{dz}\right)_2 \\
\Sigma\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}\right)_1 &= \Sigma\left(\frac{d\zeta}{dx}-\frac{d\xi}{dz}\right)_2 \\
\Sigma\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right)_1 &= \Sigma\left(\frac{d\eta}{dx}-\frac{d\xi}{dy}\right)_2 \\
\Sigma\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}\right)_1 &= \Sigma\left(\frac{d\eta}{dz}-\frac{d\zeta}{dy}\right)_2
\end{aligned}\right\} \begin{aligned} x&=0\\ y&=0\\ z&=0 \end{aligned} \qquad \text{I.}$$

Sie gelten für Mittel von beliebiger Anordnung, und beziehen sich darin die Indices 1, 2 auf das erste resp. zweite derselben, die Summenzeichen auf die Zahl der in jedem Mittel vorkommenden Wellen.

Sofern der Coëfficient α der ersten dieser Gleichungen für isotrope Mittel $= 1$ ist, so verlangt dieselbe die Gleichheit der linearen Dilatation senkrecht zur Trennungsfläche, die drei übrigen verlangen die Gleichheit der bezüglichen Drehungscomponenten und zwar sämmtlich für die im Coordinatenanfangspunkt fixirten kleinen Aetherparallelopipeda. Auf die Bedeutung, welche diese Begriffe in der neueren Mechanik überhaupt gewonnen haben, brauche ich hier kaum hinzuweisen.

Den vorstehenden Grundsätzen lassen sich für ideell durchsichtige Mittel, aber auch nur für diese, zwei weitere hinzufügen. Es sind das der Fresnel-Neumann'sche Grundsatz der Gleichheit der Schwingungscomponenten parallel der Schnittlinie von Einfallsebene und Trennungsfläche, sowie der Grundsatz der Erhaltung der lebendigen Kräfte, in welch letzteren dann auch die Amplituden der Körpertheilchen eingehen. Ich komme weiter auf dieselben zurück.

Mit den eben gewonnenen vier Grenzgleichungen verbinden wir noch das Huyghens'sche Princip sowie das Princip der In-

compressibilität des Aethers. Letzteres gibt die bekannte Gleichung:

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0. \qquad \text{II.}$$

Was dagegen das erstere betrifft, so knüpft sich seine analytische Formulirung an die Besprechung der zugehörigen Integralausdrücke. Hier sehe ich mich indess veranlasst, die Allgemeinheit der folgenden Betrachtungen insoweit einzuschränken, als ich für die beiden vorausgesetzten Mittel von einer specifischen Grenzwirkung, d. h. von einer eigenthümlichen Einwirkung der Grenzschichten derselben auf sich selbst wie auf einander absehe[1]). Wir werden demgemäss den Extinctionscoëfficienten (q) und den Refractionscoëfficienten (ν) für alle Punkte der Mittel als gleich nehmen.

Dies vorausgesetzt, haben die Integrale der vorstehenden Differentialgleichungen die allgemeine, elliptischen Schwingungen entsprechende Form:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \mathfrak{A}_x e^{\frac{2\pi}{\lambda}(q u'x + v'y + w'z)} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\nu(ux + vy + wz)}{\lambda}\right) - \psi_x\right] \\
\eta &= \mathfrak{A}_y e^{\frac{2\pi}{\lambda} q(u'x + v'y + w'z)} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\nu(ux + vy + wz)}{\lambda}\right) - \psi_y\right] \\
\zeta &= \mathfrak{A}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda} q(u'x + v'y + w'z)} \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\nu(ux + vy + wz)}{\lambda}\right) - \psi_z\right]
\end{aligned}\right\} \text{III.}$$

Darin bedeutet e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems, t die laufende Zeit, T die Schwingungsdauer und λ die Wellenlänge im Weltäther. Die $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ sind die Amplituden und die ψ_x, ψ_y, ψ_z die entsprechenden axialen Anomalien. Endlich sind die u, v, w die Cosinus der Winkel zwischen Propagationsrichtung und Achsen, die u', v', w' die Cosinus der Winkel zwischen Extinctionsrichtung und Achsen.

Zugleich mit w ist auch der sogenannte Einfallswinkel r gegeben. Man hat nämlich:

$$\cos r = w, \qquad \sin r = \sqrt{u^2 + v^2};$$

die sogenannte Einfallsebene bildet folglich mit der X-Achse einen Azimuthwinkel Θ, der bestimmt ist durch

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{v}{u} \cdot$$

---

1) Man findet darüber das Nothwendige in Wiedemann's Ann. Bd. III, S. 300—314.

Entsprechend erhält man für das Azimuth der die Extinctionsrichtung enthaltenden Normalebene:

$$\tang \Theta' = \frac{v'}{u'}$$

und sonach für den Winkel zwischen beiden:

$$\tang (\Theta - \Theta') = \frac{vu' - v'u}{uu' + vv'}.$$

Ich werde im Folgenden das einfallende, reflectirte und durchgehende Licht durch die Amplituden $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{D}$ und bezüglich der übrigen Attribute durch ein angehängtes E, R, D unterscheiden.

Was nunmehr die Auswerthung des Huyghens'schen Princips betrifft, so ist die mit diesem Namen belegte Vorstellungsweise sowohl auf die Ebene gleicher Amplitude wie auf die Ebene gleicher Phase in Anwendung zu bringen. Wenn daher bezüglich letzterer die bekannten Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{array}{c} \nu_E \sin r_E = \nu_R \sin r_R = \nu_D \sin r_D \\ \Theta_E = \Theta_R = \Theta_D \\ \nu_R = \nu_E \\ \cos r_R = -\cos r_E, \qquad r_R = 180^0 - r_E \end{array}\right\} \quad \text{IVa.}$$

und sonach

$$u_R = u_E, \qquad v_R = v_E, \qquad w_R = - w_E,$$

so muss nach gleicher Schlussweise bezüglich der ersteren die Forderung gestellt werden:

$$\left.\begin{array}{ccc} & q_R = q_R & \\ u'_R = u'_E, & v'_R = v'_E, & w'_R = - w'_E \\ u'_D = 0, & v'_D = 0, & w'_D = 1. \end{array}\right\} \quad \text{IVb.}$$

Es liegen folglich die drei Propagationsnormalen in einer und derselben Ebene und sind die drei Extinctionsnormalen symmetrisch zur Trennungsfläche.

Bevor ich die Ausdrücke III. unter Benutzung der vorstehenden Gleichungen IV. in die Bedingungsgleichungen I. einführe, sollen im Interesse der Uebersichtlichkeit folgende Abkürzungen festgestellt werden. Es bedeute

$$\delta = u'x + v'y + w'z$$

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{v(ux + vy + wz)}{\lambda}\right).$$

Ferner:

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{tang}\vartheta_x=\frac{qu'}{\nu u},\quad \operatorname{tang}\vartheta_y=\frac{qv'}{\nu v},\quad \operatorname{tang}\vartheta_z=\frac{qw'}{\nu w},\\ f_x=\sqrt{\nu^2u^2+q^2u'^2}\\ f_y=\sqrt{\nu^2v^2+q^2v'^2}\\ f_z=\sqrt{\nu^2w^2+q^2w'^2}\end{array}\right\}\qquad (1$$

Alsdann ist:

$$\left.\begin{array}{ll}\sin\vartheta_x=\frac{qu'}{f_x}, & \cos\vartheta_x=\frac{\nu u}{f_x}\\ \sin\vartheta_y=\frac{qv'}{f_y}, & \cos\vartheta_y=\frac{\nu v}{f_y}\\ \sin\vartheta_z=\frac{qw'}{f_z}, & \cos\vartheta_z=\frac{\nu w}{f_z}\end{array}\right\}\qquad (2$$

und sonach:

$$\vartheta_x{}^R=\vartheta_x{}^E,\quad \vartheta_y{}^R=\vartheta_y{}^E,\quad \vartheta_z{}^R=180^0+\vartheta_z{}^E,\quad \vartheta_x{}^D=0,\quad \vartheta_y{}^D=0. \quad (3$$

Nunmehr erhält man z. B. den Differentialquotienten:

$$\frac{d\zeta}{dz}=-\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{A}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda}q\delta}[\nu w\sin(\varphi-\psi_z)-qw'\cos(\varphi-\psi_z)]$$

$$=-\frac{2\pi}{\lambda}\mathfrak{A}_z e^{\frac{2\pi}{\lambda}q\delta}f_z\sin(\varphi-\psi_z-\vartheta_z)$$

und Ausdrücke von ähnlichem Bildungsgesetz auch für die übrigen.

Durch Substitution derselben in Gleichung II wird zuvörderst die Incompressibilitätsbedingung:

$$\left.\begin{array}{c}\mathfrak{A}_xf_x\sin(\varphi-\psi_x-\vartheta_x)+\mathfrak{A}_yf_y\sin(\varphi-\psi_y-\vartheta_y)\\ +\mathfrak{A}_zf_z\sin(\varphi-\psi_z-\vartheta_z)=0.\end{array}\right\}\qquad (4$$

Sie zerfällt durch Eliminirung des die laufende Zeit t enthaltenden Winkels φ in die beiden folgenden:

$$\mathfrak{A}_xf_x\cos(\psi_x+\vartheta_x)+\mathfrak{A}_yf_y\cos(\psi_y+\vartheta_y)+\mathfrak{A}_zf_z\cos(\psi_z+\vartheta_z)=0$$

$$\mathfrak{A}_xf_x\sin(\psi_x+\vartheta_x)+\mathfrak{A}_yf_y\sin(\psi_y+\vartheta_y)+\mathfrak{A}_zf_z\sin(\psi_z+\vartheta_z)=0.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich sofort einige bemerkenswerthe Folgerungen ziehen. Eliminirt man der Reihe nach $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$, so gewinnt man die Doppelgleichung:

$$\frac{\mathfrak{A}_x^2(\nu^2u^2+q^2u'^2)}{\sin^2[(\psi_y+\vartheta_y)-(\psi_z+\vartheta_z)]}=\frac{\mathfrak{A}_y^2(\nu^2v^2+q^2v'^2)}{\sin^2[(\psi_x+\vartheta_x)-(\psi_z+\vartheta_z)]}$$

$$=\frac{\mathfrak{A}_z^2(\nu^2w^2+q^2w'^2)}{\sin^2[(\psi_x+\vartheta_x)-(\psi_y+\vartheta_y)]}.$$

Es entsprechen sich sonach die in den folgenden Horizontalreihen aufgeführten Specialfälle:

$$\begin{array}{lll} u = u' = 0 & \psi_y + \vartheta_y = \psi_z + \vartheta_z & \mathfrak{A}_y f_y + \mathfrak{A}_z f_z = 0 \\ v = v' = 0 & \psi_x + \vartheta_x = \psi_z + \vartheta_z & \mathfrak{A}_x f_x + \mathfrak{A}_z f_z = 0 \\ w = w' = 0 & \psi_x + \vartheta_x = \psi_y + \vartheta_y & \mathfrak{A}_x f_x + \mathfrak{A}_y f_y = 0. \end{array}$$

Damit also eine der Schwingungscomponenten herausfalle, dazu ist nothwendig, dass gleichzeitig Fortpflanzungsrichtung und Auslöschungsrichtung auf der betreffenden Achse senkrecht stehen. Dann sind aber Phasendifferenz und Amplitudenverhältniss der übrig bleibenden Componenten aus den als bekannt vorausgesetzten Functionen ϑ und f direct ableitbar.

Sollen ferner zwei Componenten zusammen verschwinden, so hat man die Bedingungen:

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{A}_x = 0,\ \mathfrak{A}_y = 0 & w = w' = 0 \\ \mathfrak{A}_x = 0,\ \mathfrak{A}_z = 0 & v = v' = 0 \\ \mathfrak{A}_y = 0,\ \mathfrak{A}_z = 0 & u = u' = 0, \end{array}$$

folglich in der einen übrig bleibenden linear polarisirtes Licht.

Lässt man beispielsweise die Extinctionsrichtung in der Einfallsebene als XZ-Ebene fallen, so dass $v = v' = 0$ wird, so folgt für die in derselben liegenden einfallenden Schwingungen:

$$\psi_x{}^E - \psi_z{}^E = \vartheta_z{}^E - \vartheta_x{}^E$$

und für die zugehörigen reflectirten zufolge Gleichung (3):

$$\begin{aligned} \psi_x{}^R - \psi_z{}^R &= 180^0 + \vartheta_z{}^E - \vartheta_x{}^E \\ &= 180^0 + \psi_x{}^E - \psi_z{}^E. \end{aligned}$$

Die reflectirte elliptische Bewegung geht also im entgegengesetzten Sinne vor sich wie die einfallende. Für das gebrochene Licht ist $\vartheta_x{}^D = 0$; folglich hat man:

$$\operatorname{tang}(\psi_x{}^D - \psi_z{}^D) = \operatorname{tang} \vartheta_z{}^D = \frac{q}{\nu w} = \frac{q}{p}. \qquad (5$$

Die Amplituden sind gegeben durch den Ausdruck:

$$\mathfrak{A}_x^2 (\nu^2 u^2 + q^2 u'^2) = \mathfrak{A}_z^2 (\nu^2 w^2 + q^2 w'^2).$$

Führt man darin zwei neue Grössen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{r}$ ein, für welche:

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_1 \cos \mathfrak{r}, \qquad \mathfrak{A}_z = \mathfrak{A}_1 \sin \mathfrak{r},$$

so lassen sich dieselben als Amplitude, resp. Schwingungsazimuth der restaurirten Schwingung, d. h. derjenigen linearen Schwingung definiren, deren Energie der Energie der gegebenen elliptischen Schwingung

gleich kommt. Die restaurirte reflectirte Schwingung wird auf der restaurirten gebrochenen senkrecht stehen, sobald die Bedingung erfüllt ist:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \mathfrak{r}^R \operatorname{tang} \mathfrak{r}^D &= -1 \\ \frac{\sqrt{\nu^2 u^2 + q^2 u'^2}}{\sqrt{\nu^2 w^2 + q^2 w'^2}} \frac{\nu_D u_D}{\sqrt{\nu_D^2 w_D^2 + q_D^2}} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Dies ist die Bedingungsgleichung für den sogenannten Hauptindicenzwinkel. Ist insbesondere $\nu = 1$, $q = 0$, $\nu u = \nu_D u_D = \sin e$ so vereinfacht sie sich auf:

$$\sin e \operatorname{tang} e = \sqrt{p_D^2 + q_D^2}, \quad \operatorname{tang} e = \sqrt{\nu_D^2 + q_D^2}. \tag{6b}$$

Analog endlich lassen sich mittelst der obigen Doppelgleichung auch die Richtungscosinus $\frac{\mathfrak{A}_x}{\mathfrak{A}}, \frac{\mathfrak{A}_y}{\mathfrak{A}}, \frac{\mathfrak{A}_z}{\mathfrak{A}}$ der allgemeinen restaurirten Schwingung ermitteln.

Combinirt man jetzt die vier Grenzbedingungen mit der auf beide Mittel gesondert angewandten Incompressibilitätsbedingung 4, so erhält man für den (an sich offenbar willkürlichen) Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ das System der folgenden sechs Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&[\mathfrak{E}_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_z) - \mathfrak{R}_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \vartheta_z)] f_z \\
&= \mathfrak{D}_z f_z^D \sin(\varphi - \psi_z^D - \vartheta_z^D). \\
&[\mathfrak{E}_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_x) + \mathfrak{R}_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \vartheta_x)] f_x \\
&- [\mathfrak{E}_x \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_z) - \mathfrak{R}_x \sin(\varphi - \psi_x^R - \vartheta_z)] f_z \\
&= \mathfrak{D}_z f_x^D \sin(\varphi - \psi_z^D) - \mathfrak{D}_x f_z^D \sin(\varphi - \psi_x^D - \vartheta_z^D). \\
&[\mathfrak{E}_y \sin(\varphi - \psi_y - \vartheta_x) + \mathfrak{R}_y \sin(\varphi - \psi_y^R - \vartheta_x)] f_x \\
&- [\mathfrak{E}_x \sin(\varphi - \psi_x - \vartheta_y) + \mathfrak{R}_x \sin(\varphi - \psi_x^R - \vartheta_y)] f_y \\
&= \mathfrak{D}_y f_x^D \sin(\varphi - \psi_y^D) - \mathfrak{D}_x f_y^D \sin(\varphi - \psi_x^D). \\
&[\mathfrak{E}_y \sin(\varphi - \psi_y - \vartheta_z) - \mathfrak{R}_y \sin(\varphi - \psi_y^R - \vartheta_z)] f_z \\
&- [\mathfrak{E}_z \sin(\varphi - \psi_z - \vartheta_y) + \mathfrak{R}_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \vartheta_y)] f_y \\
&= \mathfrak{D}_y f_z^D \sin(\varphi - \psi_y^D - \vartheta_z^D) - \mathfrak{D}_z f_y^D \sin(\varphi - \psi_z^D). \\
&\mathfrak{R}_x f_x \sin(\varphi - \psi_x^R - \vartheta_x) + \mathfrak{R}_y f_y \sin(\varphi - \psi_y^R - \vartheta_y) \\
&- \mathfrak{R}_z f_z \sin(\varphi - \psi_z^R - \vartheta_z) = 0. \\
&\mathfrak{D}_x f_x^D \sin(\varphi - \psi_x^D) + \mathfrak{D}_y f_y^D \sin(\varphi - \psi_y^D) \\
&+ \mathfrak{D}_z f_z^D \sin(\varphi - \psi_z^D - \vartheta_z^D) = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Sind darin die Functionen f und ϑ bekannt und ausserdem die drei $\mathfrak{E}$ und $\psi^E = \psi$ gegeben, so lassen sich mittelst derselben die drei $\mathfrak{R}$ und ψ^R und die drei $\mathfrak{D}$ und ψ^D berechnen.

In der That zerfällt jede dieser Gleichungen durch Eliminirung von φ in zwei, und führt man jetzt die neuen Anomalien ein:

$$\chi^R = \psi^R - \psi, \qquad \chi^D = \psi^D - \psi,$$

so genügen die dann vorhandenen 12 Gleichungen zur Ermittelung der 12 Unbekannten:

$$R' = \mathfrak{R} \cos \chi^R, \qquad R'' = \mathfrak{R} \sin \chi^R$$
$$D' = \mathfrak{D} \cos \chi^D, \qquad D'' = \mathfrak{D} \sin \chi^D.$$

Hiermit ist die im ersten Theil gestellte Aufgabe allgemein gelöst.

Für die weitere Verwendung der Gleichungen empfiehlt es sich, sie rückwärts mittelst der symbolischen Amplituden:

$$R = R' + R'' \sqrt{-1}$$
$$D = D' + D'' \sqrt{-1}$$

in bequemere complexe Formen zusammenzufassen. Ich lasse indess zur leichteren Ueberleitung zu den von mir bisher in Wiedemann's Annalen (vergl. u. S. 360) behandelten Specialfällen fortan die Einfallsebene mit der ZX-Ebene zusammenfallen, setze wie früher:

$$\vartheta_x = \gamma, \quad \vartheta_z = \beta;$$
$$\nu u = \nu_2 u_2 = \sin e, \quad \nu w = p$$

und schreibe abkürzungsweise:

$$\Psi_{m,\mu} = \cos(\psi_m + \mu) + \sqrt{-1} \sin(\psi_m + \mu).$$

Man erhält dann:

$$\left.\begin{aligned}
&\sqrt{p^2 + q^2 w'^2}\,(\mathfrak{E}_z - R_z)\,\Psi_{z,\beta} = \sqrt{p_2^2 + q_2^2}\,D_z\,\Psi_{z,\beta_2} \\
&\sqrt{\sin^2 e + q^2 u'^2}\,(\mathfrak{E}_z + R_z)\,\Psi_{z,\gamma} - \sqrt{p^2 + q^2 w'^2}\,(\mathfrak{E}_x - R_x)\,\Psi_{x,\beta} \\
&\qquad = \sin e\,D_z\,\Psi_{z,\gamma_2} - \sqrt{p_2^2 + q_2^2}\,D_x\,\Psi_{x,\beta_2} \\
&\sqrt{\sin^2 e + q^2 u'^2}\,(\mathfrak{E}_y + R_y)\,\Psi_{y,\gamma} - \sqrt{-1}\,q v'\,(\mathfrak{E}_x + R_x)\,\Psi_x \\
&\qquad = \sin e\,D_y\,\Psi_y \\
&\sqrt{p^2 + q^2 w'^2}\,(\mathfrak{E}_y - R_y)\,\Psi_{y,\beta} - \sqrt{-1}\,q v'\,(\mathfrak{E}_z + R_z)\,\Psi_z \\
&\qquad = p_2\,D_y\,\Psi_{y,\beta_2} \\
&\sqrt{p^2 + q^2 w'^2}\,R_z\,\Psi_{z,\beta} + \sqrt{\sin^2 e + q^2 u'^2}\,R_x\,\Psi_{x,\gamma} - q v'\,R_y\,\Psi_y = 0 \\
&\qquad \sqrt{p_2^2 + q_2^2}\,D_z\,\Psi_{z,\beta_2} + \sin e\,D_x\,\Psi_{x,\gamma_2} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (8$$

Dass das System auch dieser Gleichungen mit einander verträglich ist, bedarf wohl keines weiteren Nachweises. Setzt man z. B. einmal $\sin e = 0$, $u' = 0$ und sodann $\sin e = 0$, $v' = 0$, so erhält man die gleichen Ausdrücke wie bei der Vertauschung von x und y. Das wäre freilich nicht der Fall, wollte man die erste Gleichung,

welche die linearen Dilatationen **senkrecht** zur Trennungsfläche enthält, durch eine die Dilatationen **parallel** der Trennungsfläche enthaltende ersetzen.

Wenn ich bezüglich der Details auf meine frühere Arbeit verweise, so möge hier blos der nicht uninteressante Fall erwähnt werden, dass nämlich bei senkrechter Incidenz die Propagations- und Extinctionsnormalen sich rechtwinklig schneiden. Man findet für ihn:

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{R} = 0, \quad \chi^R = 0, \quad \mathfrak{D} = 0,$$

so dass das gebrochene Licht seine Fähigkeit zu weiterer Brechung unter normalem Einfall verloren hat. Ein ähnlicher Fall würde in der Natur bezüglich desjenigen Lichtes realisirt sein, welches unter den Bedingungen der Totalreflexion als sogenannter „streifender Strahl" in ein optisch dünneres Mittel eintritt.

II.

Wenn ich nunmehr zur Mechanik der Aetherkörperschwingungen in absorbirenden Mitteln übergehe, so sehe ich den intermolekularen Aether derselben als gleichartig an mit dem Weltäther, lege also beiden gleiche Elasticität und Dichtigkeit bei und nehme daher an, dass das einzelne Körpertheilchen trotz verhältnissmässig grosser Masse nur einen verschwindend kleinen Raum einnimmt. Dies vorausgesetzt, heisse m die in der Volumeinheit enthaltene Aethermasse, m' die in derselben befindliche optisch-chemisch einfache Körpermasse, die Schwingungscomponenten der Aethertheilchen seien ξ, η, ζ, die der Körpertheilchen ξ', η', ζ', die respectiven Amplituden $\mathfrak{A}_x \ldots$, $\mathfrak{A}'_x \ldots$, und es bedeute endlich $\mathfrak{e}$ die Deformationsconstante des Weltäthers. Ich habe nun gefunden, dass zwischen diesen Grössen und zwar sowohl für anisotrope wie isotrope Mittel die Gleichung besteht:

$$\left.\begin{aligned} & m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}d\mathfrak{A}_x + \frac{d^2\eta}{dt^2}d\mathfrak{A}_y + \frac{d^2\zeta}{dt^2}d\mathfrak{A}_z\right) \\ & + \Sigma m'\left(\frac{d^2\xi'}{dt^2}d\mathfrak{A}'_x + \frac{d^2\eta'}{dt^2}d\mathfrak{A}'_y + \frac{d^2\zeta'}{dt^2}d\mathfrak{A}'_z\right) \\ & = \mathfrak{e}\,(\Delta_2\xi\, d\mathfrak{A}_x + \Delta_2\eta\, d\mathfrak{A}_y + \Delta_2\zeta\, d\mathfrak{A}_z), \end{aligned}\right\} \quad \text{V.}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\Delta_2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

Es ist also die Summe der Schwingungsarbeiten der Aether- und Körpertheilchen, gemessen durch die Beschleunigungen, gleich der Schwingungsarbeit des Aethers, gemessen durch die Deformation desselben[1]).

Die Integrale dieser Gleichung sind für die Aethertheilchen die früheren Ausdrücke III, für die Körpertheilchen die nämlichen Ausdrücke, wenn die bezüglichen Amplituden $\mathfrak{A}'_x \ldots$, und Verzögerungen $\psi'_x \ldots$ durch Accentuirung von $\mathfrak{A}_x$ und ψ_x unterschieden werden. Es durchlaufen demnach die Körpertheilchen wie die Aethertheilchen im allgemeinen elliptische Bahnen.

Substituirt man statt der Wegelemente die ihnen proportionalen Amplituden und beachtet bei Ausführung der Rechnung, das die Grössen m, e mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v des Weltäthers durch die Beziehung verknüpft sind:

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{m} v^2,$$

so gewinnt man nach Eliminirung der laufenden Zeit und Wiederzusammenfassung der Theilausdrücke die symbolische Form:

$$\left.\begin{array}{c} \nu^2 - q^2 - 1 + 2\nu q \cos\varrho \sqrt{-1} = \\ \dfrac{\Sigma m' [\mathfrak{A}'^2_x(\cos\psi'_x + \sqrt{-1}\sin\psi'_x) + \mathfrak{A}'^2_y(\cos\psi'_y + \sqrt{-1}\sin\psi'_y) + \ldots]}{m[\mathfrak{A}^2_x(\cos\psi_x + \sqrt{-1}\sin\psi_x) + \mathfrak{A}^2_x(\cos\psi_y + \sqrt{-1}\sin\psi_y) + \ldots]} \end{array}\right\} \quad (9$$

Darin bedeutet ϱ den Winkel zwischen Extinctions- und Propagationsnormale, so dass:

$$\cos\varrho = uu' + vv' + ww'.$$

Reducirt man endlich die beschleunigenden und bewegenden Kräfte der je zusammengehörigen Componenten auf gleiche Phase, indem man schreibt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^2_x \cos\psi_x + \mathfrak{A}^2_y \cos\psi_y + \mathfrak{A}^2_z \cos\psi_z &= \mathfrak{A}^2 \cos\psi \\ \mathfrak{A}^2_x \sin\psi_x + \mathfrak{A}^2_x \sin\psi_y + \mathfrak{A}^2_z \sin\psi_z &= \mathfrak{A}^2 \sin\psi \\ \mathfrak{A}'^2_x \cos\psi'_x + \mathfrak{A}'^2_y \cos\psi'_y + \mathfrak{A}'^2_z \cos\psi'_z &= \mathfrak{A}'^2 \cos\psi' \\ \mathfrak{A}'^2_x \sin\psi'_x + \mathfrak{A}'^2_y \sin\psi'_y + \mathfrak{A}'^2_z \sin\psi'_z &= \mathfrak{A}'^2 \sin\psi', \end{aligned}$$

ersetzt also die gegebene elliptische Schwingung durch eine äquivalente

1) Dieser Satz unterscheidet sich von den bezüglichen, jüngst von Herrn de Saint Venant in den Ann. de chim. et de phys. (4) XXV (335—381) beifällig besprochenen Sätzen Boussinesq's im wesentlichen dadurch, dass in letzteren nicht die Arbeiten der Kräfte, sondern diese selbst vorkommen.



restaurirte von gleicher Schwingungsarbeit mit den neuen Amplituden $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und Anomalien ψ, ψ', so schreibt sich kürzer:

$$\nu^2 - q^2 - 1 + 2\nu q \cos\varrho \sqrt{-1} = \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 [\cos(\psi' - \psi) + \sqrt{-1} \sin(\psi' - \psi)]}{m \mathfrak{A}^2}.$$

Man hat folglich:

$$\left.\begin{aligned} \nu^2 - q^2 - 1 &= \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \cos(\psi' - \psi)}{m \mathfrak{A}^2}, \\ 2\nu q \cos\varrho &= \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 \sin(\psi' - \psi)}{m \mathfrak{A}^2}. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Sofern nun die rechten Seiten dieser Gleichungen die gegebene Fortpflanzungsrichtung des Mittels in absoluter Weise charakterisiren, also insbesondere von ϱ unabhängig sind, so hat man:

$$\nu^2 - q^2 = a^2 - b^2, \quad \nu q \cos\varrho = ab, \tag{11}$$

wo a und b zwei Constanten sind, nämlich diejenigen Specialwerthe von ν und q, die $\varrho = 0$ entsprechen. Die Bedeutung derselben ist also folgende. Ist allgemein $\varrho = 0$, läuft die Wellebne der Absorptionsebne parallel, so sind a der zugehörige Refractions- und b der Extinctionscoefficient, beide folglich von der Incidenz unabhängig. Ist dagegen $u' = v' = 0$, $w' = 1$ und sonach $\varrho = r = arc \cos w$, so entsprechen a und b dem senkrechten Einfall $r = e = 0$. Für jede andere Incidenz e leitet man dann ab:

$$2\nu^2 = a^2 - b^2 + \sin^2 e + \sqrt{(a^2 - b^2 - \sin^2 e)^2 + 4a^2 b^2}$$

$$q = \frac{ab}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 e}}.$$

Nunmehr lässt sich obige Gleichung auf die Form bringen:

$$(a + b\sqrt{-1})^2 - 1 = \frac{\Sigma m' \mathfrak{A}'^2 (\cos\varDelta + \sqrt{-1} \sin\varDelta)}{m \mathfrak{A}^2}$$

oder kürzer:

$$n^2 - 1 = \frac{\Sigma m' A'^2}{m \mathfrak{A}^2}, \tag{VI.}$$

so dass die beiden Constanten a, b, die fortan als der Hauptrefractions- und Hauptextinctionscoefficient bezeichnet werden sollen, als die Charakteristik eines complexen Brechungsverhältnisses n behandelt werden dürfen.

Wenn ich in verschiedenen Abhandlungen dem System der Gleichungen V und VI den Rang eines dioptrischen Grundgesetzes beigelegt habe, so veranlassten dazu die folgenden Erwägungen:

1. Der ihm zu Grunde liegende Satz ist a priori einzusehen. Denn so lange eine Welle von bestimmter Aetheramplitude, Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Schwingungsdauer zu Stande kommt, so lange leistet die Elasticität des Aethers die gleiche Arbeit, mögen nun die von ihm angeregten mitschwingenden Körpertheilchen gleiche oder verschiedene Amplitude und Schwingungsdauer erlangen, und mögen sie der Bewegung Widerstand leisten oder nicht.

2. Für ideell durchsichtige Mittel liefern diese Gleichungen bei Anwendung des Princips der Erhaltung der lebendigen Kräfte eine (quadratische) Beziehung, welche mit den übrigen (linearen) Uebergangsbedingungen verträglich ist[1]).

3. Für bewegte durchsichtige Mittel gilt nicht blos das Nämliche, sondern sie begründen auch die durch die Erfahrung bestätigte, zuerst von Fresnel nachgewiesene Modification der Fortpflanzungsgeschwindigkeit[2]).

4. Für total reflectirende Combinationen liefern sie direkt den von Cauchy auf indirectem Wege mittelst complex gewordener Amplituden erhaltenen Extinctionsindex des streifenden Strahles[3]).

5. Für absorbirende Mittel endlich, insbesondere für die Erscheinungen der Metallreflexion stimmen ebenso die mit Beihilfe der Beziehungen (11) mittelst der obigen Grenzgleichungen abgeleiteten Reflexionsformeln mit den indirekt von Cauchy abgeleiteten überein[4]).

Was schliesslich die experimentelle Ermittelung der Charakteristik a, b betrifft, so hat man mit der Aufsuchung der Hauptincidenz, als deren Bedingung oben:

$$p^2 + q^2 = \sin^2 e \operatorname{tang}^2 e \qquad \text{6b.}$$

gefunden wurden, die Kenntniss des Hauptazimuthes h, für welches sich mittelst der Grenzgleichungen:

$$\operatorname{tang} \vartheta_s = \frac{q}{p} = \operatorname{tang} 2h \qquad (12$$

ergiebt, zu verbinden, um sowohl p als q getrennt zu erhalten und die so gefundenen Werthe in Gl. (11) zu substituiren.

1) Vgl. unten. Ferner Wied. Ann. Bd. 1 S. 219.

2) Vgl. unten. Ferner Wied. Ann. Bd. 1 S. 556; Bd. 3 S. 297 und des Verfassers Astron. Undulationstheorie. Bonn 1873.

3) Wied. Ann. Bd. 3 S. 91—93.

4) Ebendaselbst Bd. 3 S 95—103 und 284—297.



Die vorstehende Entwicklung umfasst ferner ebensowohl die anisotropen wie die isotropen Mittel. Hält man fest an der früher gegebenen Definition der Strahl- und Normalcylinder als unendlich enger gerader Cylinder, die resp. um die Richtung des Strahles und der Normalen herumgelegt sind, und unterscheidet man die Bestimmungsstücke der Integralausdrücke III, sofern sie sich auf die Normale beziehen sollen, durch angehängte n von denen der Strahlrichtung, so passt allerdings die Differentialgleichung V nur auf die Strahlcylinder.

Nichts desto weniger liesse sich der zunächst gleichfalls für den Strahl geltenden Gl. (VI), nämlich:

$$n^2 = \frac{m\mathfrak{A}^2 + \Sigma m'\mathfrak{A}'^2}{m\mathfrak{A}^2} \tag{13a}$$

für die Normale die analoge Beziehung zuordnen:

$$n_n^2 = \frac{m\mathfrak{A}_n^2 + \Sigma m'\mathfrak{A}'^2_n}{m\mathfrak{A}_n^2}. \tag{13b}$$

Identificirt man nämlich diese Ausdrücke dadurch, dass man setzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n}{n_n} = \frac{\omega_n}{\omega} = \frac{\mathfrak{A}_n}{\mathfrak{A}} = \cos\delta, \\ m\mathfrak{A}_n^2 + \Sigma m'\mathfrak{A}'^2_n = m\mathfrak{A}^2 + \Sigma m'\mathfrak{A}'^2, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

unter δ den Winkel zwischen Strahl und Normale verstanden, so sind diese Bedingungen in Einklang mit der in der vorhergehenden Abhandlung dargelegten Auffassung.

Hiernach unterliegt es nun wohl keinem Zweifel, dass sich zunächst auch für den Uebergang des Lichtes zwischen anisotropen Mitteln die Strahl- wie die Normalcylinder zur Formulirung der Grenzgleichungen verwerthen lassen werden. Man gelangt in der That wenigstens für den speciellen Fall der durchsichtigen Mittel mit beiden zum Ziel. Nennt man U_s, V_s, W_s die Cosinus der Winkel zwischen der (virtuellen) Schwingungsrichtung innerhalb der Strahlcylinder und den Achsen, Θ den Azimuthwinkel zwischen der Schwingungs- und Einfallsebene als XZ-Ebene, und bedeutet r den Brechungswinkel der Normalen, so erhält man leicht:

$$\begin{aligned}
U_s &= -\sin\delta\sin r + \cos\delta\cos r\cos\Theta \\
V_s &= +\cos\delta\sin\Theta \\
W_s &= -\sin\delta\cos r - \cos\delta\sin r\cos\Theta \\
u_s &= +\cos\delta\sin r + \sin\delta\cos r\cos\Theta \\
v_s &= +\sin\delta\sin\Theta \\
w_s &= \cos\delta\cos r - \sin\delta\sin r\cos\Theta.
\end{aligned}$$

Bezieht man nun unter der Annahme $q = 0$ die drei letzten der Gl. I einmal auf die Strahl- und sodann auf die Normalcylinder der aus dem Weltäther kommenden gebrochenen Strahlen, so entstehen vermöge der aus Gl. 14 ableitbaren Beziehung:

$$\mathfrak{A}_s n_s = \mathfrak{A}_n n_n = \mathfrak{D} n,$$

sechs Gleichungen, die zu je zwei identisch sind, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} \cos \Theta_E - \mathfrak{R} \cos \Theta_R &= \Sigma \mathfrak{D} n \cos \Theta_D \\ \mathfrak{E} \sin \Theta_E + \mathfrak{R} \sin \Theta_R &= \Sigma \mathfrak{D} \quad \sin \Theta_D \\ \cos e\,(\mathfrak{E} \sin \Theta_E - \mathfrak{R} \sin \Theta_R) &= \Sigma \mathfrak{D} n \sin \Theta_D \cos r. \end{aligned}\right\} \quad (15$$

Zu diesen drei Gleichungen fügen wir als vierte die Gleichung der lebendigen Kräfte. Wird dieselbe auf die während der Zeiteinheit gewonnenen Totalenergien der Aether- und Körpertheilchen angewandt, so erhält sie zunächst die Form:

$$M(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2) = \Sigma (M_D \mathfrak{D}^2 + \Sigma M'_D \mathfrak{D}'^2),$$

unter $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ die Amplituden der Aether- und Körpertheilchen und unter M, M_D die äquivalenten Volumina verstanden. Diese letzteren sind proportional den Huyghens'schen Prismen, d. h. der Gesammtheit der Strahlcylinder, welche von der Trennungsfläche ausgehen und durch die resp. Wellebenen abgeschnitten werden.

Es sei O der erste, D der letzte (nach Verlauf der Zeiteinheit erschütterte) Einfallspunkt der ankommenden Welle, die Richtung der gebrochenen Normalen sei OA, die des Strahles OB, und es stehe Ebene DAB senkrecht auf der Einfallsebene. Dieselbe ist alsdann die gebrochene Wellebene, welcher Punkt B als Contactpunkt der Wellenfläche und Richtung AB als Schwingungsrichtung entspricht, so dass Winkel $BAD = \Theta$. Fällt man nun von B auf die Einfallsebene das Perpendikel BC und von C auf OD ein zweites CE, dann ist $CE = CD \sin r$ die Höhe des bezüglichen Prisma und zugleich das Maass für sein Volumen M. Direkter gewinnt man diese Höhe durch die Projection des rat. vect. OB auf die Z-Achse. Dieselbe beträgt:

$$M_D = \omega_n \cos r\,(1 - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} r \cos \Theta) = \omega_s w_s.$$

Sowie es bezüglich dieses Volumens an sich gleichgiltig ist, ob man dasselbe in elementare Strahl- oder Normalcylinder zerlegt denkt, so ist es ferner zufolge Beziehungen (13) und (14) ebenso gleichgiltig, ob man die Amplituden $\mathfrak{D}$ der Aethertheilchen als in der Strahl- oder

Normalebene gelegen ansieht und die Körpertheilchen mittelst der ersten oder zweiten jener Gleichungen eliminirt. Man erhält jedenfalls:

$$(\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{R}^2) \sin e \cos e = \Sigma \mathfrak{D}^2 n^2 \sin r \cos r \,(1 - \operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} r \cos \Theta). \qquad (16$$

Sofern nun das System der vier Bedingungen (15) und (16) zur Einzelberechnung der Amplituden und Azimuthe der gespiegelten und gebrochenen Wellen genügt, so leisteten sonach Strahl- und Normalcylinder bezüglich des Ueberganges des Lichtes die gleichen Dienste.

Multiplicirt man noch die zweite und dritte der Gl. (15), subtrahirt das Product von Gl. (16) und dividirt den verbleibenden Rest durch die erste der Gl. (15), er erhält man, wie insbesondere für die sogenannten uniradialen Azimuthe ohne weiteres einleuchtet:

$$\begin{aligned}(\mathfrak{E} \cos \Theta_E + \mathfrak{R} \cos \Theta_R) \cos e \\ = \Sigma \mathfrak{D}_s \,(-\sin \delta \sin r + \cos \delta \cos r \cos \Theta) \\ = \Sigma \mathfrak{D}_n \cos \Theta \cos r \left(1 - \frac{\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} r}{\cos \Theta}\right).\end{aligned}$$

Man kann die erstere dieser Beziehungen auf die Form bringen:

$$(\mathfrak{E} \cos \Theta_E + \mathfrak{R} \cos \Theta_R) \cos e = \Sigma \mathfrak{D}_s U_s$$

oder:

$$\xi_E + \xi_R = \Sigma \xi_D{}^s \qquad | z = 0, \qquad (17$$

welche Gleichung dem auf die Strahlcylinder bezogenen Fresnel-Neumann'schen Continuitätsprincip entsprechen würde.

Die zweite Gleichung schreibt sich dagegen auch so:

$$\frac{d\zeta_E}{dz} + \frac{d\zeta_R}{dz} = \Sigma \frac{d\zeta_D}{dz}\left(1 - \frac{\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} r}{\cos \Theta}\right), \quad | z = 0; \qquad (18$$

sie wird mit der ersten der Gl. (I) indentisch, sobald man darin für die einfallende und gespiegelte Welle $\alpha = 1$ und für die gebrochenen setzt:

$$\alpha = 1 - \frac{\operatorname{tang} \delta \operatorname{tang} r}{\cos \Theta}. \qquad (19$$

Diese zweite Form enthält sonach die linearen Dilatationen der Normalschwingungen senkrecht zur Trennungsfläche, und es erscheint darin der Coëfficient α als abhängig vom Doppelbrechungsvermögen, vom Brechungswinkel und vom Schwingungsazimuth. Seine geometrische Construction ist folgende.

Man verlängere die Schwingungsrichtung BA, welche mit dem Durchschnitt CD von Wellebene und Einfallsebene den Winkel Θ bildet,

und fälle darauf vom Einfallspunkt D aus das Perpendikel DF. Alsdann ist:

$$AB = AO \cdot \text{tang}\, \delta = \omega_n \,\text{tang}\, \delta$$
$$AF = AD \cos \Theta = -\omega_n \cot r \cos \Theta$$

und sonach:

$$\frac{AB}{AF} = -\frac{\text{tang}\, \delta \,\text{tang}\, r}{\cos \Theta},$$

so dass kommt:

$$\alpha = 1 + \frac{AB}{AF} = \frac{BF}{AF}.$$

Dem entsprechend hat man die Dilatation der Normalschwingungen parallel der Z-Achse im Verhältniss der Linien $BF : AF$ zu vergrössern; ihre auf beide gebrochene Wellen ausgedehnte Summe ist dann der parallelen Dilatation im ersten Mittel gleich. Sonach hat von den beiden Linien:

$$CD = \omega_n \cot r\,(1 - \text{tang}\, \delta \,\text{tang}\, r \cos \Theta)$$
$$BF = \omega_n \cot r\,(\cos \Theta - \text{tang}\, \delta \,\text{tang}\, r)$$

die zweite eine ähnliche Bedeutung bezüglich der Gleichheit der Dilatationen wie die erstere bezüglich der Gleichheit der lebendigen Kräfte.

Geht man jetzt von ideell durchsichtigen zu absorbirenden Mitteln zurück, so dass das Princip der lebendigen Kräfte seine Anwendbarkeit verliert, so wird auch zugleich die durch Gl. (17) ausgesprochene Continuitätsbedingung hinfällig. Man kann nämlich das Brechungsverhältniss n als complexe Grösse ansehen, deren Charakteristik a, b durch die Ausdrücke 10 bestimmt ist. Denkt man sich jetzt r und δ als Funktionen von n und e, so werden dieselben gleichfalls und ebenso schliesslich U complex. Um also die Intensitätsbestimmung mit Hilfe der Strahlcylinder ausführen zu können, hat man das absorbirende Mittel unter die durchsichtigen zu subsummiren und die Bedeutung von a, b als gegeben vorauszusetzen.

Grössere Einfachheit und Vollständigheit bieten in diesem Fall die Normalcylinder. Für sie behalten nicht nur die Grenzgleichungen der Drehungscomponenten, sondern einigermassen auch die der Dilatation die reelle Form. Dass wenigstens näherungsweise der Coëfficient α eine Function zwischen reellen Grössen bleibt, davon überzeugt man sich, so lange das Verhältniss des Hauptextinktions- und Hauptrefactionscoëfficienten als von der Orientirung unabhängig betrachtet werden

darf, für die einfacheren Fälle[1]) leicht, da dann sowohl das eine wie das andere Verfahren zu den gleichen Endformeln hinführt.

Hiernach gelten denn die zunächst für isotrope Mittel gewonnenen Gleichungen (I) auch für beliebige Combinationen anisotroper Mittel, sofern man nur, entsprechend der Anzahl der reflectirten und gebrochenen Wellen die unterdrückten Summenzeichen wiederhergestellt und in die erste derselben die Dilatationscoëfficienten α mit den ihnen nach Gl. (19) zukommenden Werthen einführt.

Wenn nun dem Bisherigen zufolge für den Uebergang des Lichtes die Bedeutung der Normalcylinder überwiegt, so vereinfachen dagegen die Strahlcylinder die Formulirung der Differentialgleichungen der inneren Bewegung.

Von besonderem Gewicht ist dieser Umstand für die Entwicklung der Wellenfläche bewegter doppelt brechender Mittel. Um nämlich die Gesetze der Aberrationserscheinungen in Krystallen, wie ich sie empirisch aus eigens angestellten Versuchen[2]) ableiten konnte, theoretisch zu begründen, dazu bedarf es einer doppelten Erwägung.

Es ist nämlich erstens kraft des Doppler'schen Princips die Schwingungsdauer der Aether- und Körpertheilchen in den bisherigen Differentialgleichungen verschieden zu nehmen. Und zwar übersieht man, dass die Differenz beider durch den Winkel zwischen der Strahlrichtung als der thatsächlichen Fortpflanzungsrichtung und der Translationsrichtung bedingt ist, derart nämlich, dass sie im Maximum ist, wenn diese beiden Richtungen zusammenfallen, dagegen verschwindet, wenn sich dieselben rechtwinklich kreuzen. Daraus ergibt sich denn mit Evidenz, dass das Operiren mit der Strahlrichtung auf einfacherem Wege zum Ziele führt als das Operiren mit der Normalen, und dass das letztere zugleich den Begriff des Strahles als primär gegeben voraussetzen muss. Zweitens tritt bei der Translation vermöge der von mir sogenannten „inneren Aberration der Anisotropie" an die Stelle einer bestimmten Krystallrichtung mit ihrem zugehörigen charakte-

1) Wied. Ann. Bd. 3 S. 106—112. Die dort entwickelten Formeln bleiben jedenfalls streng richtig.

2) Pogg. Annalen Bd. 147 S. 404—429.

ristischen Amplitudenverhältniss eine benachbarte andere in die zu untersuchende feste Richtung des Raumes.

Man denke sich nun der Einfachheit wegen einen unendlich ausgedehnten Hauptschnitt eines einachsigen Krystalles und lasse auch die Translationsrichtung in denselben hineinfallen. Wir beschränken uns auf extraordinäres Licht, bezeichnen das Geschwindigkeitsverhältniss des Strahles für eine und dieselbe Krystallrichtung durch n' für den Zustand der Bewegung, durch n für den Zustand der Ruhe und nehmen wie bei isotropen Mitteln an, dass das Amplitudenverhältniss $(A':\mathfrak{A})$ ungeändert bleibt. Die optische Achse mache mit der Richtung des Strahles den Winkel γ und mit der der Translation den Winkel ψ.

Dies vorausgesetzt, tritt an die Stelle der Integralgleichung (VI) die allgemeinere folgende:

$$n'^2 - 1 = \Sigma \frac{m' A'^2}{m \mathfrak{A}^2} \frac{T^2}{T'^2}, \tag{20}$$

wo T die Schwingungsdauer der Aethertheilchen, T' die der Körpertheilchen bedeutet. Man hat dann weiter:

$$\Sigma \frac{m' A'^2}{m \mathfrak{A}^2} = n^2 - 1$$

$$\frac{T}{T'} = 1 - \frac{g}{\omega'} \cos(\psi - \gamma),$$

sofern nämlich das Verhältniss der Schwingungsdauern entsprechend dem Doppler'schen Princip[1]) auf ein Verhältniss der Componente der Translationsgeschwindigkeit g parallel der Strahlrichtung und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω' im intermolekularen Aether zurückgeführt wird. Wir werden im Folgenden die höheren Potenzen des kleinen Bruches $\frac{g}{\omega}$ vernachlässigen, so dass sich also schreiben lässt:

$$n'^2_1 - 1 = (n^2 - 1)\left(1 - 2\frac{g}{\omega} \cos(\psi - \gamma)\right). \tag{21}$$

Ist nun der leuchtende Punkt in relativer Ruhe zu den Körpertheilchen, so lassen sich die rad. vect. der Wellenfläche sowie diese selbst am leichtesten auf dem zusammenhängenden Gerippe der Körpertheilchen markiren. In diesem Sinne ist vorstehende Gleichung, die sich auch auf die Form bringen lässt:

1) Wied. Ann. Bd. 1 S. 589.

$$\left.\begin{aligned} n' &= n\left(1 - \frac{gk}{\omega}\cos(\psi - \gamma)\right) \\ n^2 &= n_1^2 \sin^2\gamma + n_2^2 \cos^2\gamma \\ k &= \frac{n^2 - 1}{n^2}, \\ \omega' &= \omega + gk\cos(\psi - \gamma), \end{aligned}\right\} \quad (22$$

zugleich die Gleichung der Wellenfläche. Die Verlängerung oder Verkürzung der rad. vect. erfolgt sonach in anisotropen wie isotropen Mitteln nach dem gleichen Gesetze.

Denkt man sich dagegen den Erschütterungsmittelpunkt in relativer Ruhe zu den Aethertheilchen und fixirt dem entsprechend die Strahlengeschwindigkeit durch den Aether, so bleibt noch zu beachten, dass durch eine feste Richtung γ_0 des Raumes gleichzeitig mit der undulatorischen Strahlbewegung die ponderablen Theilchen einer Krystallrichtung γ hindurchgehen, deren Lage durch den Aberrationswinkel:

$$\alpha = \frac{g}{\omega}\sin(\psi - \gamma_0)$$

bestimmt ist. Und wäre ebenso umgekehrt γ bekannt, so findet man γ_0 mittelst der Beziehung:

$$\gamma_0 = \gamma + \alpha.$$

Mit Rücksicht hierauf schreibt sich der Ausdruck für n^2 nun auch so:

$$\begin{aligned} n^2 &= n_1^2 \sin^2(\gamma_0 - \alpha) + n_2^2 \cos^2(\gamma_0 - \alpha) \\ &= n_1^2 \sin^2\gamma_0 + n_2^2 \cos^2\gamma_0 - 2(n_1^2 - n_2^2)\sin\gamma_0 \cos\gamma_0 \alpha. \end{aligned}$$

Und coordinirt man schliesslich der Richtung γ_0 für den Ruhezustand des Mittels das Geschwindigkeitsverhältniss n_0, so erhält jetzt die Gl. (21) die Form:

$$n'^2_2 - 1 = [n_0^2 - 1 - 2(n_1^2 - n_2^2)\sin\gamma_0\cos\gamma_0\alpha]\left(1 - 2\frac{g}{\omega}\cos(\psi - \gamma_0)\right)$$

und bei der Vernachlässigung der kleinen Grössen höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} n'^2 &= n_0^2 - 2\frac{g}{\omega}[(n_0^2 - 1)\cos(\psi - \gamma_0) + (n_1^2 - n_2^2)\sin\gamma_0\cos\gamma_0\sin(\psi - \gamma_0)] \\ &= n_0^2 - 2\frac{g}{\omega}[(n_1^2 - 1)\sin\psi\sin\gamma_0 + (n_2^2 - 1)\cos\psi\cos\gamma_0]. \end{aligned}$$

Lässt man im Folgenden die angehängten $_0$ fort, ersetzt die Geschwindigkeitsverhältnisse durch die Geschwindigkeiten selbst und führt

für die axialen Richtungen die Coëfficienten k_1, k_2 ein, so erhält man nach Ausziehung der Wurzel:

$$\frac{1}{\omega'} = \sqrt{\frac{\sin^2\gamma}{\omega_1^2} + \frac{\cos^2\gamma}{\omega_2^2}} - g\left(\frac{k_1}{\omega_1^2}\sin\psi\sin\gamma + \frac{k_2}{\omega_2^2}\cos\psi\cos\gamma\right). \quad (23$$

Es ist dies die Gleichung der Wellenfläche des bewegten anisotropen Mittels, bezogen auf die ruhenden Aetherpunkte. Um dieselbe auch in Punktcoordinaten auszudrücken, setze man noch:

$$y = \omega' \sin\gamma, \quad x = \omega' \cos\gamma.$$

Alsdann ergibt sich leicht:

$$\omega_2^2 (y - g k_1 \sin\psi)^2 + \omega_1^2 (x - g k_2 \cos\psi)^2 = \omega_1^2 \omega_2^2. \quad (23b$$

Die beiden letzten Gleichungen sind identisch mit den in meiner astronomischen Undulationstheorie (S. 176) direct aus der Erfahrung abgeleiteten Gleichungen (67) und (65).

Der hier entwickelten Strahlengeschwindigkeit ω' in der Richtung γ ordnet sich eine Normalgeschwindigkeit ω'_n längs der Richtung χ zu, die sich darstellt als ein vom Centrum auf die bezügliche Tangentialebene gefälltes Perpendikel. Sie ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\omega'_n = \sqrt{\omega_1^2 \sin^2\chi + \omega_2^2 \cos^2\chi} + g\,(k_1 \sin\psi \sin\chi + k_2 \cos\psi \cos\chi). \quad (24$$

Den Versuch einer unmittelbaren theoretischen Begründung desselben findet man in meinem Buche (S. 212—216); sie ist weniger anschaulich und zugleich umständlicher, sofern nämlich die Schwingungsdauern der Aether- und Körpertheilchen, welche in der Richtung χ der gleichen Sinusoide angehören, in dem Verhältniss stehen:

$$\left(\frac{T}{T'}\right)_n = 1 - \frac{g}{\omega_n} \frac{\cos(\psi - \gamma)}{\cos(\gamma - \chi)}.$$

In der That sind es also hier die Strahlcylinder, welche mittelst der einfacheren Voraussetzungen zum Ziele führen.

Das kugelförmige Elektrodynamometer.

Ausgeführt von J. **Fröhlich**

in Budapest.

(Hiezu Tafel XV Fig. 1 und 2.)

1.

Befindet sich in einem homogenen magnetischen oder elekromagnetischen Felde ein magnetischer oder elektromagnetischer Körper von beliebiger Gestalt und von beliebiger magnetischer Vertheilung, dann ist das Drehungsmoment, welches dieser Körper erleidet, unter allen Umständen gleich der im Felde herrschenden constanten Kraft, multiplicirt in das magnetische Moment des Körpers und den sinus des Winkels, den die Achse des Momentes mit der Richtung der Kraft einschliesst.

Beabsichtigt man nun, ein Elektrodynamometer zu construiren, dessen sogenannte Multiplicatorfunction ein möglichst einfaches Gesetz befolge, d. i. dass das Drehungsmoment der elektrodynamischen Kräfte vom Ablenkungswinkel in einfachster Weise abhänge, dann wird man wohl bei obiger Anordnung bleiben müssen.

Zwar macht sich hier der veränderliche Einfluss des Erdmagnetismus in störender Weise bemerkbar, doch lässt sich die Beseitigung dieses Einflusses bei den bisherigen Instrumenten nur auf Kosten der Einfachheit der Multiplicatorfunction erreichen, ein Umstand, welcher in den meisten Fällen noch weit unbequemer ist.

Um nun ein Instrument herzustellen, welches sowohl die einfachste Multiplicatorfunktion besitze, als auch vom Erdmagnetismus unabhängig sei, ging ich von folgendem Grundgedanken aus:

Bedeckt eine unendliche Anzahl gleichgerichteter Ströme derselben Intensität und von gleichem Ebenenabstande eine Kugelfläche, dann entsteht im Innern dieser Fläche ein homogenes elektromagnetisches Feld; nach aussen hin wirkt aber eine solche Stromfläche wie ein

unendlich kurzer Magnet von endlichem Momente[1]). Man denke sich nun zwei, sehr nahezu oder auch ganz gleiche Elektromagnete (etwa Solenoide etc.) von beliebiger, jedoch symmetrischer Form zu einem unveränderlichen astatischen Paare vereinigt und so aufgehängt, dass der eine Elektromagnet im Innern der Kugelfläche, der andere aber vertical über (oder unter) dem Mittelpunkte dieser Fläche sich befinde. Das Paar ist somit um die verticale Achse beweglich; das vom Erdmagnetismus darauf ausgeübte Drehungsmoment ist der Differenz der magnetischen Momente beider Elektromagnete direct proportional, und kann daher sehr leicht eliminirt werden. Das von der strombedeckten Fläche auf den inneren Elektromagneten ausgeübte Drehungsmoment ist nach Obigem dem sinus des Winkels direct proportional, welchen die beiden Achsen mit einander bilden; in Bezug auf das Drehungsmoment, welches der äussere Elektromagnet von der Stromfläche erleidet, lässt sich mathematisch genau dasselbe erweisen; mithin besitzt unser Instrument bei dieser Anordnung die gewünschten Eigenschaften.

Die praktische Durchführung dieser Ueberlegungen führte zu dem Elektrodynamometer Fig. 1 Tafel XV.

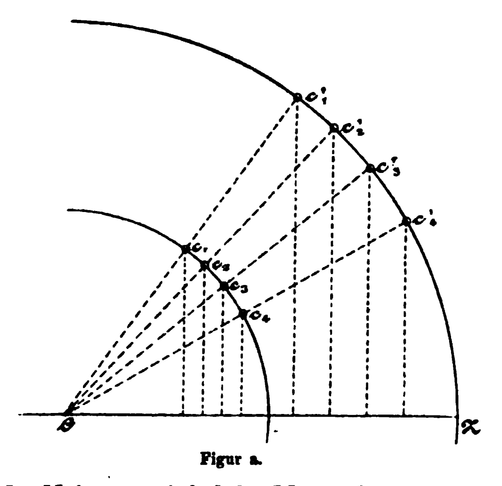
Dasselbe besteht im wesentlichen aus der elektromagnetischen Kugelschale SS, dem astatischen Rollenpaare $R' R''$ und der Suspensionsvorrichtung T.

Die Kugelschale wurde nach folgenden Regeln konstruirt: eine endliche, jedoch grössere Anzahl linearer Ströme kann als Ersatz der von der Theorie geforderten unendlich vielen Ströme zur Erzeugung eines homogenen elektromagnetischen Feldes verwendet werden. Durch Bedeckung der gegebenen Kugelfläche mit diesen Strömen resp. Stromträgern entsteht eine Kugelschale, deren äussere Fläche um geringes grösser ist als die gegebene. Erstere soll nun wieder auf dieselbe Weise, wo möglich mit der gleichen Anzahl von Strömen bedeckt werden u. s. f., bis man eine genügend dicke, durch zwei concentrische Kugelflächen begrenzte Schicht erhält, deren Wirkung den Anforderungen der Empfindlichkeit Genüge leistet. Man sieht leicht, dass eine Anordnung, wie sie nachfolgende Fig. a im Durchschnitt zeigt, zum Ziele führt. CZ sei als Achse der Kugel angenommen und c_1 c_2 c_3 c_4 etc. die Orte und Querschnitte der einzelnen, linearen Ströme mit gleichem Ebenen-

1) Maxwell, A treatise on electricity and magnetism, v. II, p. 277, 1873; O. Frölich, Carl's Repertorium 1871 Bd. 8 S. 37. — Th. Wand, Carl's Repertorium Bd. 10 S. 371.



Abstand, welche die erste Schicht bilden. Verbindet man diese Orte mit dem Mittelpunkte der Kugel und verlängert diese Radien, dann sind auch die an den Enden derselben liegenden Orte c_1' c_2' c_3' c_4' etc. in Bezug auf die zugehörigen Ebenen äquidistant, und die durch dieselben fliessenden Ströme (über die ganze Kugelfläche vom Radius R gelegt) erzeugen wieder ein homogenes Feld. Man fertige nun einzelne, conische Spiralen aus gewöhnlichem cylindrischen, isolirten Drahte auf



Figur a.

solche Weise, dass die Cosinuse der Neigungswinkel der Mantelfläche gegen die Achse nach einander die Werthe $\frac{0,5}{n}$, $\frac{1,5}{n}$, $\frac{2,5}{n}$ etc. und zuletzt $\frac{n-0,5}{n}$ erhalten, wobei n die Anzahl der eine Halbkugelfläche bedeckenden Ströme bedeutet. Alle diese Spiralen sind daher Mantelflächen abgestutzter Conusse, deren gemeinschaftliche Spitze der Kugelmittelpunkt ist; da man zwei Halbkugeln zu bedecken hat, sind auch zwei Conusse jeder Gattung erforderlich. Zwanzig eigens nach diesen Angaben angefertigte Kegel aus hartem Papiermaché dienten als Modelle, auf welchen die Spiralen, alle in derselben Entfernung $R = 50^{mm}$, von der Spitze gemessen, angefangen und sorgfältig aufgewunden wurden. Die entstandenen 40 Spiralen zu je 20 Windungen wurden auf zwei gut ineinander passenden Halbkugelschalen von 100^{mm} äusserem Durchmesser bei genauer Einhaltung der Aequidistanz mit Harz befestigt und später alle Zwischenräume successive mit Harz ausgegossen. An der Stelle, wo (Fig. 1 Taf. XV) das Verbindungsstück des astatischen Paares in die Kugel hinabreichen sollte, erhielten die (von der Mitte gerechneten) ersten zwei Spiralen eine geringe Einbuchtung. Die Spiralen sind nach einander leitend verbunden. Die Vorrichtung zur Erzeugung eines homogenen Feldes besteht sonach aus zwei Halbkugelschalen (Fig. 2 Taf. XV), deren jede um eine horizontale Achse beweglich ist, und zusammen eine geschlossene Schale bilden können. Im letzteren Falle werden sie durch die Schrauben ss an einander gepresst.

Das astatische Rollenpaar besteht aus zwei nahezu gleichen cylindrischen Spiralen von 30mm Höhe, etwa 27,5mm äusserem, 4,0mm innerem Radius und je 652 Windungen. Die Drahtenden der unteren Rolle wurden um das messingene, dünne Verbindungsstück in zwei dünnen, parallelen isolirten Drähten spiralförmig hinaufgeführt und endigen in den Verbindungsschrauben $s' s'$; die Enden der oberen Rolle befinden sich in $s'' s''$. Der Strom selbst geht durch die Aufhängungsdrähte zu den isolirten, um einander gewundenen Drähten dd, und kann von dort beliebig durch eine oder die andere, oder durch beide Rollen nach jeder Richtung geleitet werden.

Was schliesslich die Art der Aufhängung betrifft, so ist diese für Bifilarsuspension eingerichtet und der Kopf derselben nach Muster des Instruments des Electrical Comitee der British Association[1]) angegefertigt; die Drähte bestehen aus Neusilber, um die elastische Nachwirkung möglichst gering zu machen. Schliesslich dienen zwei Commutatoren zur beliebigen Aenderung der Stromrichtung in der Kugelschale und den beiden Rollen.

2.

Wir gehen nun zur Theorie des Instrumentes über.

Die Potentialfunction einer von äquidistanten, gleichgerichteten Strömen derselben Intensität bedeckten Kugelfläche ist für innere Punkte[2]) $\Omega' = -2\frac{A}{a^2}z$; für äussere Punkte $\Omega'' = Aa\frac{z}{r^3}$; dabei bedeutet A eine Constante, a den Radius der Kugel, z deren Achse und zugleich die Achse sämmtlicher Ströme, r die Entfernung des äusseren Punktes vom Kugelmittelpunkte. Hat man aber N Ströme von der Intensität i, dann findet sich:

$$A = -\frac{4\pi}{6}aNi;\ \text{daher}\ \Omega' = +\frac{4\pi}{3}Ni\frac{z}{a};\ \Omega'' = -\frac{4\pi}{6}Nia^2\frac{z}{r^3}.$$

Befinden sich jedoch N' solche einzelne Stromflächenschichten über einander, deren jede die gleiche Anzahl N von linearen Strömen besitzt, und bedeutet a_1 und a_2 den inneren und äusseren Radius der Schale, dann kann man ohne merklichen Fehler den Raum jeder Spirale als stetig von Strömen durchflossen betrachten, und hat für die Intensität i' derselben: $N'i = (a_2 - a_1)i'$; ferner ist $i'da$ die Intensität, welche sich auf eine Schale von der Dicke da bezieht; man

1) Maxwell l. c. S. 337.
2) Maxwell l. c. S. 277.

hat daher für die innere und äussere Potentialfunction einer solchen Kugelschale von endlicher Dicke $a_2 - a_1$

$$\Omega' = +\frac{4\pi}{3} NN' i \frac{z}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} \frac{da}{a}, \quad \Omega'' = -\frac{4\pi}{6} NN' i \frac{z}{r^3} \frac{1}{a_2 - a_1} \int_{a_1}^{a_2} a^3 da.$$

Man setze nun zur Abkürzung:

$$-\frac{4\pi}{3} NN' \frac{1}{a_2 - a_1} \cdot \lg \frac{a_2}{a_1} = F; \quad \frac{4\pi}{6} \frac{NN'}{3} \frac{a_2^3 - a_1^3}{a_2 - a_1} = M_s;$$

es sind dies nur von der Construction und den Dimensionen der Kugelschale abhängige Constanten, deren Bedeutung jedoch für die Folge wichtig wird; F ist nämlich die Grösse der elektromagnetischen Kraft im Innern der Schale, wenn deren Spiralen von der Stromeinheit durchflossen werden; M_s bedeutet das magnetische Moment der Schale für äussere Punkte bei derselben Stromintensität. Wir schreiben daher:

$$\Omega' = -Fiz; \quad \Omega'' = M_s i \frac{z}{r^3}. \tag{1}$$

Nun ist das Potential der Schale auf die innere und äussere Rolle zu bilden. Bezeichnen W' und W'' diese Functionen, dann ist $W = W' + W''$ das Potential der Schale auf das Paar und ihr Drehungsmoment auf einander, bezogen auf den vorläufig unbestimmt gelassenen Winkel φ:

$$-\frac{dW}{d\varphi} = -\frac{dW'}{d\varphi} - \frac{dW''}{d\varphi}. \tag{2}$$

Man hat aber $W' = \Sigma m' \Omega'$, wenn m' das Element der an Stelle der elektrischen Ströme substituirten magnetischen Belegungen der inneren Rolle bedeutet. Die Achse der Rolle und der Schale liegen horizontal; es ist daher, wie für jede Rolle im homogenen Felde:

$$W' = FM'i^2 \cos\varphi \tag{3}$$

dabei ist das magnetische Moment der inneren cylindrischen Rolle vom inneren und äusseren Radius R_1' und R_2' und der Breite $2b$, wenn die Stromeinheit durch selbe fliesst:

$$M' = \pi . \frac{mn(R'^3_2 - R'^3_1)}{3(R'_2 - R'_1)2b} \cdot 2b \tag{4}$$

mn die Anzahl der Windungen und φ der Winkel, den die Achse der Rolle mit der der Schale einschliesst. Das Drehungsmoment, welches die innere Rolle durch die Schale erleidet, wird:

$$-\frac{dW'}{d\varphi} = FM'i^2 \sin\varphi \tag{5}$$

Die Bestimmung von $W'' = \Sigma m'' \Omega''$ ist nicht so schnell zu erledigen, da sie selbst im einfachsten Falle zu elliptischen Integralen führt, welchen jede Uebersichtlichkeit abgeht. Wir wollen jedoch W'' auf andere Art allgemein darstellen, indem wir setzen $W'' = \Sigma m'' \Sigma \frac{m_{,,}}{r''}$; $m_{,,}$ ist das Element des magnetischen Quantums, welches wir für die Kugelschale bei ihrer Aussenwirkung substituiren können. Da jedoch nach dem Obigen für dieselbe ein unendlich kleiner Magnet von endlichem Momente gesetzt werden kann, so hat man: $W'' = m_{,,} \Sigma \frac{m''}{r''} - m_{,,} \Sigma \frac{m''}{r'' + dr''}$; dabei ist $m_{,,}$ das in einem Pole concentrirt gedachte magnetische Quantum und $2h = \frac{dr''}{\cos(hr'')}$ die Entfernung beider Pole. Somit ist:

$$W'' = M_s i \frac{dV''}{dh}. \tag{6}$$

Was nun die Potentialfunction V'' der oberen cylindrischen Rolle anbelangt, so besteht dieselbe aus zwei Theilen, welche von den magnetischen Belegungen der vorderen und rückwärtigen Endfläche der Spule herrühren. Man setze $V'' = V_1 + V_2$ und es ist für eine Endfläche eines Solenoides von n Windungen[1]) und der Dicke dR

$$V = 2\pi n i' dR \left\{ \frac{1}{2} \frac{R^2}{r} - \frac{R^4}{r^3} \cdot Q_2 + \cdots \right\}.$$

Besteht die Rolle aus m einzelnen Lagen zu je n Windungen, und ist ihre Länge $= 2b$, dann ist $inm = i' 2b (R_2 - R_1)$, und daher:

$$V = \frac{\pi m n i}{b(R_2 - R_1)} \left\{ \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5} \frac{R_2^5 - R_1^5}{r^3} Q_2 + \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \frac{R_2^7 - R_1^7}{r_5} Q_4 - \cdots \right\}; \tag{7}$$

dabei sind Q_2, Q_4 etc. die bekannten Kugelfunctionen:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} \cdot Q_n = \mu^n - \frac{n \cdot n - 1}{2(2n-1)} \mu^{n-2} + \cdots; \quad \mu = \cos(br).$$

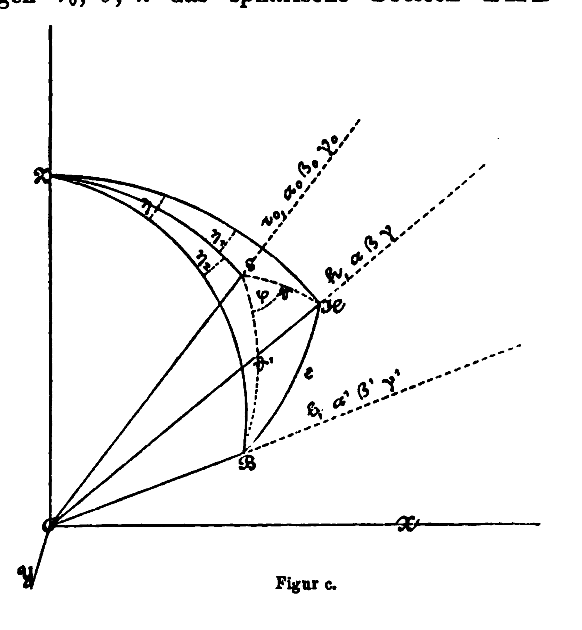
1) Maxwell, l. c. S. 280.

Es hängt also V_1 und V_2 lediglich nur von den Entfernungen r_1 und r_2 der Mittelpunkte der Endflächen vom räumlichen Punkte und von den Cosinusen μ_1, μ_2 der Winkel, den r_1 und r_2 mit der Rollenachse einschliessen, ab; also $V_1 = f(r_1 \mu_1)$; $V_2 = f(r_2 \mu_2)$.

Es sei nun in nachstehender Fig. b HH die Richtung der Achse der Kugelschale, BB die der äusseren Rolle, r_0 die Entfernung ihrer Mittelpunkte; die gegenseitige Lage dieser Achsen sei beliebig, jedoch die eventuellen Bewegungen der naturgemässen Beschränkung unterworfen, dass sie nur in Drehungen um die verticale Achse bestehen können.

Figur b.

Um die auftretenden Verhältnisse leichter untersuchen zu können, verschieben wir HH parallel zu sich selbst, bis C mit O zusammenfällt. Man bilde aus den Richtungen r_0, b, h das sphärische Dreieck ZHB (Fig. c). Es ist evident, dass die Horizontalprojectionen von h und b auf der XY-Ebene mit einander den Winkel η bilden, welcher durch die Ebenen ZOB und ZOH bestimmt ist. Dieser Winkel ist es, welcher sich bei beiden hier möglichen Bewegungen ändern kann; es ist somit das Drehungsmoment um die verticale Achse eines oder des anderen Elektromagneten:



Figur c.

$$-\frac{dW''}{d\eta} = -M_s i \frac{d^2 V''}{d\eta\, dh} = -M_s i \left\{ \frac{d^2 V_1}{d\eta\, dh} + \frac{d^2 V_2}{d\eta\, dh} \right\} \qquad (8$$

Man hat aber allgemein

$$\frac{dV}{dh} = \frac{dV}{dr} \cdot \frac{dr}{dh} + \frac{dV}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{dh};$$

$$\frac{d^2V}{d\eta\, dh} = \frac{d^2V}{dr^2} \cdot \frac{dr}{d\eta} \cdot \frac{dr}{dh} + \frac{d^2V}{d\mu^2} \cdot \frac{d\mu}{d\eta} \cdot \frac{d\mu}{dh} + \frac{d^2V}{dr\, d\mu} \left\{ \frac{d\mu}{d\eta} \cdot \frac{dr}{dh} + \frac{d\mu}{dh} \cdot \frac{dr}{d\eta} \right\}$$
$$+ \frac{dV}{dr} \cdot \frac{d^2r}{d\eta\, dh} + \frac{dV}{d\mu} \cdot \frac{d^2\mu}{d\eta\, dh}.$$

Aus (7) folgt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dr} = -D\left\{\frac{1}{2\cdot 3} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2} - \cdots\right\}; \quad \frac{d^2V}{dr^2} = D\left\{\frac{1}{3} \frac{R_2^3 - R_1^3}{r^3} - \cdots\right\};\\
&\frac{dV}{d\mu} = -D\left\{\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5} \frac{R_2^5 - R_1^5}{r^3} Q_2' - \cdots\right\};\\
&\frac{d^2V}{d\mu_2} = -D\left\{\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5} \frac{R_2^5 - R_1^5}{r^3} Q_2'' - \cdots\right\};\\
&\frac{d^2V}{d\mu\, dr} = D\left\{\frac{3}{2\cdot 4\cdot 5} \frac{R_2^5 - R_1^5}{r^4} Q_2' - \cdots\right\};
\end{aligned}\right\} \quad (9$$

dabei ist $Q' = \frac{dQ}{d\mu}$, $Q'' = \frac{d^2Q}{d\mu}$ und $D = \frac{\pi m n i}{b(R_2 - R_1)}$. Will man die Quotienten für V_1 haben, dann setze man $r = r_1$, $\mu = \mu_1$; für V_2 aber $r = r_2$, $\mu = \mu_2$, und kehre sämmtliche Vorzeichen um.

Die Differentialquotienten von r_1, r_2, μ_1 und μ_2 bestimmen sich nun folgendermassen: Es seien die Richtungswinkel von

$$\frac{h}{\alpha\beta\gamma}, \quad \frac{b}{\alpha'\beta'\gamma'}, \quad \frac{r_0}{\alpha_0\beta_0\gamma_0}, \quad \frac{r_1}{\alpha_1\beta_1\gamma_1}, \quad \frac{r_2}{\alpha_2\beta_2\gamma_2};$$

ferner sei

$$\sphericalangle r_0 h = \vartheta, \quad \sphericalangle r_0 b = \vartheta', \quad \sphericalangle hb = \varepsilon, \quad \sphericalangle r_1 b = \mu_1, \quad \sphericalangle r_2 b = \mu_2,$$

schliesslich φ der Winkel zwischen den Ebenen *SOB* und *SOH*. Man hat nun (Fig. c):

$$\begin{aligned}
r_1 \cos\alpha_1 &= r_0 \cos\alpha_0 - b\cos\alpha' + h\cos\alpha\\
r_1 \cos\beta_1 &= r_0 \cos\beta_0 - b\cos\beta' + h\cos\beta\\
r_1 \cos\gamma_1 &= r_0 \cos\gamma_0 - b\cos\gamma' + h\cos\gamma
\end{aligned}$$

Die Quadrirung und Summirung dieser und ebenso der für r_2 geltenden Ausdrücke ergibt:

$$\left.\begin{aligned}
r_1^2 &= r_0^2 + h^2 + b^2 + 2r_0 h\cos\vartheta - 2hb\cos\varepsilon - 2r_0 b\cos\vartheta'\\
r_2^2 &= r_0^2 + h^2 + b^2 + 2r_0 h\cos\vartheta + 2hb\cos\varepsilon + 2r_0 b\cos\vartheta'
\end{aligned}\right\} \quad (10$$

Multiplicirt man aber obige Gleichungen der Reihe nach mit $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, und addirt sie, behandelt dann die Ausdrücke für r_2 ebenso, dann wird

$$\left.\begin{aligned} r_1\mu_1 &= r_0\cos\vartheta' + h\cos\varepsilon - b \\ r_2\mu_2 &= r_0\cos\vartheta' + h\cos\varepsilon + b \end{aligned}\right\} \qquad (11$$

Das System (10) und (11) genügt, um die gewünschten Quotienten zu bilden; doch muss bezüglich der Differentiirung nach η eine für die praktische Anwendung wichtige Bemerkung Platz greifen. Der Winkel η hängt von den Winkeln ε, ϑ, ϑ' ab, wenn beide Stromträger beweglich sind; hingegen nur von ε und ϑ', wenn die Kugelschale fix ist, oder nur von ε und ϑ, wenn die cylindrische Rolle festliegt. Es sollen hier die Differentialquotienten nach η so gebildet werden, als ob beide Stromträger zugleich beweglich wären; man kann dann, wie gezeigt wird, durch Weglassung einiger Glieder zu denjenigen Quotienten gelangen, welche einem oder dem anderen Specialfalle entsprechen. Wir führen die Hilfswinkel η_1 und η_2 ein, so dass man hat:

$$\left.\begin{aligned} \cos\vartheta &= \cos\gamma_0\cos\gamma - \sin\gamma_0\sin\gamma\cos\eta_1 \\ \cos\vartheta' &= \cos\gamma_0\cos\gamma' - \sin\gamma_0\sin\gamma'\cos\eta_2 \end{aligned}\right\} \qquad (12$$

und ausserdem:

$$\left.\begin{aligned} \cos\varepsilon &= \cos\gamma\cos\gamma' - \sin\gamma\sin\gamma'\cos\eta \\ \cos\varepsilon &= \cos\vartheta\cos\vartheta' - \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (13$$

und $\eta = \eta_1 + \eta_2$. Aus dem System (10) bildet man $\frac{dr_1}{dh}, \frac{dr_2}{dh}$; ferner

$$\frac{d(r^2)}{d\eta} = \frac{d(r^2)}{d(\cos\eta)}\cdot\frac{d(\cos\eta)}{d\eta} + \frac{d(r^2)}{d(\cos\vartheta)}\cdot\frac{d(\cos\vartheta)}{d\eta_1} + \frac{d(r^2)}{d(\cos\vartheta')}\cdot\frac{d(\cos\vartheta')}{d\eta_2};$$

daraus findet sich mit Hilfe von (12) und (13) $\frac{dr_1}{d\eta_1}, \frac{dr_2}{d\eta_2}$; ähnliche Rechnungen ergeben $\frac{d^2r_1}{d\eta dh}, \frac{d^2r_2}{d\eta dh}$. Differentiirt man das System (11) vollständig nach h und einmal vollständig nach η, dann finden sich mit Berücksichtigung der soeben gefundenen Quotienten $\frac{d\mu_1}{dh}, \frac{d\mu_2}{dh}, \frac{d\mu_1}{d\eta}, \frac{d\mu_2}{d\eta}$; schliesslich liefert die vollständige Differentiirung von (11) nach h und η mit Zuhilfenahme der bisherigen Resultate die Werthe von $\frac{d^2\mu_1}{d\eta dh}, \frac{d^2\mu_2}{d\eta dh}$.

Es folgen hier die allgemein giltigen Werthe dieser Differentialquotienten unter der Beschränkung, dass h unendlich klein ist, wie dies auch in unserem Falle vollständig zutrifft.

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dr_1}{dh}=\frac{r_0\cos\vartheta-b\cos\varepsilon}{r_1} \qquad \frac{dr_2}{dh}=\frac{r_0\cos\vartheta+b\cos\varepsilon}{r_2}\\
&\frac{dr_1}{d\eta}=\frac{r_0 b}{r_1}\sin\gamma_0\sin\gamma'\sin\eta_2 \qquad \frac{dr_2}{d\eta}=-\frac{r_0 b}{r_2}\sin\gamma_0\sin\gamma'\sin\eta_2\\
&\frac{d\mu_1}{dh}=\frac{(r_1+\mu_1 b)\cos\varepsilon-\mu_1 r_0\cos\vartheta}{r_1^2} \qquad \frac{d\mu_2}{dh}=\frac{(r_2-\mu_2 b)\cos\varepsilon-\mu_2 r_0\cos\vartheta}{r_2^2}\\
&\frac{d\mu_1}{d\eta}=-\frac{r_0}{r_1^2}(r_1+\mu_1 b)\sin\gamma_0\sin\gamma'\sin\eta_2 \qquad \frac{d\mu_2}{d\eta}=-\frac{r_0}{r_2^2}(r_2-\mu_2 b)\sin\gamma_0\sin\gamma'\sin\eta_2\\
&\frac{d_1 r_1}{d\eta\, dh}=\frac{\sin\gamma}{r_1}(b\sin\gamma'\sin\eta-r_0\sin\gamma_0\sin\eta_1)\\
&\qquad -\frac{r_0 b}{r_1^3}\sin\gamma_0\sin\gamma'\sin\eta_2\,(r_0\cos\vartheta-b\cos\varepsilon)\\
&\frac{d^2 r_2}{d\eta\, dh}=-\frac{\sin\gamma}{r_2}(b\sin\gamma'\sin\eta+r_0\sin\gamma_0\sin\eta_1)\\
&\qquad +\frac{r_0 b}{r_2^3}\sin\gamma_0\sin\gamma'\sin\eta_2\,(r_0\cos\vartheta+b\cos\varepsilon)\\
&\frac{d^2\mu_1}{d\eta\, dh}=\frac{r_0}{r_1^4}\sin\gamma_0\sin\gamma'\sin\eta_2\left\{r_0(r_1+3\mu_1 b)\cos\vartheta-b(2r_1+3\mu_1 b)\cos\varepsilon\right\}\\
&\qquad -\frac{\sin\gamma}{r_1^2}\left\{\sin\gamma'\sin\eta\,(r_1+\mu_1 b)-r_0\mu_1\sin\gamma_0\sin\eta_1\right\}\\
&\frac{d^2\mu_2}{d\eta\, dh}=\frac{r_0}{r_2^4}\sin\gamma_0\sin\gamma'\sin\eta_2\left\{r_0(r_2-\mu_2 b)\cos\vartheta+b(2r_2-3\mu_2 b)\cos\varepsilon\right\}\\
&\qquad +\frac{\sin\gamma}{r_2^2}\left\{\sin\gamma'\sin\eta\,(-r_2+\mu_2 b)+r_0\mu_2\sin\gamma_0\sin\eta_1\right\}
\end{aligned}\right\}(14$$

Will man das nur auf einen der Stromträger ausgeübte Drehungsmoment bestimmen, dann ist ϑ oder ϑ' constant, somit $\frac{d(\cos\vartheta)}{d\eta_1}=0$, oder $\frac{d(\cos\vartheta')}{d\eta_2}=0$; man hat also die Regel: liegt die Kugelschale (oder der statt derselben substituirte unendlich kleine Magnet) fest, dann setze man in den Quotienten des Systemes (14) sämmtliche Glieder, die den Factor $\sin\eta_1$ besitzen, gleich Null; ist die Schale beweglich und die Rolle fix, dann setze man alle, den Factor $\sin\eta_2$ enthaltende Glieder gleich Null.

Unsere Aufgabe, die Bestimmung des Drehungsmomentes eines unendlich kleinen Magneten auf eine cylindrische Spule von endlicher Länge und Dicke und von ganz beliebiger Lage, oder vice versa, ist

somit vollständig gelöst. Es sollen nun zwei wichtige Specialfälle näher untersucht werden.

1. Die Kugelschale liege fest, ihre Achse horizontal; die bewegliche Rolle befinde sich oberhalb derselben mit ebenfalls horizontaler Achse, so dass die geometrischen Mittelpunkte beider in ein und dieselbe verticale Linie fallen; man sucht das auf die Rolle ausgeübte Drehungsmoment. Alle mit $\sin\eta_1$ behafteten Glieder verschwinden; ausserdem ist:

$$\gamma_0 = 0,\ \gamma = \gamma' = \frac{\pi}{2};\ \vartheta = \vartheta' = \frac{\pi}{2};\ \varepsilon = \eta = \varphi;\ r_1 = r_2 = r,\ \mu_1 = -\mu_2;$$

die Werthe der Quotienten in (14) sind:

$$\frac{dr_1}{dh} = -\frac{b}{r}\cos\varphi,\ \frac{dr_2}{dh} = +\frac{b}{r}\cos\varphi;\ \frac{dr_1}{d\eta} = \frac{dr_2}{d\eta} = 0;\ \frac{d\mu_1}{d\eta} = \frac{d\mu_2}{d\eta} = 0;$$

$$\frac{d\mu_1}{dh} = \frac{d\mu_2}{dh} = \frac{r+\mu_1 b}{r^2};\quad \frac{d^2 r_1}{d\eta\, dh} = -\frac{d^2 r_2}{d\eta\, dh} = \frac{b\sin\varphi}{r};$$

$$\frac{d^2\mu_1}{d\eta\, dh} = -\frac{d^2\mu_2}{d\eta\, dh} = \frac{r+\mu_1 b}{r^2}\sin\varphi.$$

Es bleibt:

$$-\frac{dW''}{d\eta} = -\frac{dW''}{d\varphi} = -M_s i\left\{\frac{b}{r}\left(\frac{dV_1}{dr_1} - \frac{dV_2}{dr_2}\right) - \frac{r+\mu_1 b}{r^2}\left(\frac{dV_1}{d\mu_1} + \frac{dV_2}{d\mu_2}\right)\right\}, \sin\varphi.$$

Beachtet man nun, dass auch in V_1 und V_2: $r_1 = r_2 = r$; $\mu_1 = -\mu_2$, dann ist: $Q_{1,2} = Q_{2,2}$, $Q_{1,4} = Q_{2,4}$ etc.; ebenso $Q'_{1,2} = -Q'_{2,2}$, $Q'_{1,4} = -Q'_{2,4}$ etc., weil erstere nur aus geraden, letztere nur aus ungeraden Potenzen von μ bestehen, daher:

$$V_1 = -V_2;\ \frac{dV_1}{dr_1} = -\frac{dV_2}{dr_2};\ \frac{dV_1}{d\mu_1} = \frac{dV_2}{d\mu_2}.$$

Substituirt man diese Werthe in $\frac{dW''}{d\eta}$, zieht den sich ergebenden Ausdruck zusammen und beachtet, dass $\mu = \frac{b}{r}$, setzt schliesslich für das magnetische Moment der oberen Rolle, wenn dieselbe von der Stromeinheit durchflossen wird:

$$M'' = \frac{\pi m n}{2b(R_2'' - R_1'')}\cdot\frac{R''^3_2 - R''^3_1}{3}\cdot 2b \tag{15}$$

dann findet sich:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{dW''}{d\varphi} = M_s M'' i^2 \frac{1}{r^3}\Big\{1 - \frac{3}{4\cdot 5}\left(3\,Q_2 + \left(\frac{r}{b}+\frac{b}{r}\right)Q_2'\right)\frac{R''^5_2 - R''^5_1}{R''^3_2 - R''^3_1}\cdot\frac{1}{r^2} \\ + \frac{3}{4\cdot 6\cdot 7}\left(5\,Q_4 + \left(\frac{r}{b}+\frac{b}{r}\right)Q_4'\right)\frac{R''^7_2 - R''^7_1}{R''^3_2 - R''^3_1}\cdot\frac{1}{r^4} - \cdots\Big\}\sin\varphi; \end{aligned}\right\} \quad 16)$$

$$Q_2 = \frac{3}{2}\mu^2 - \frac{1}{2},\quad Q_2' = 3\mu;\quad Q_4 = \frac{35}{8}\mu^4 - \frac{15}{4}\mu^2 + \frac{3}{8};$$

$$Q_4' = \frac{5}{2}(7\mu^2 - 3)\,\mu.\quad \mu = \frac{b}{r}\,.$$

Man wird wohl in den seltensten Fällen genöthigt sein, mehr als die hier entwickelten Glieder zu rechnen; das Bildungsgesetz derselben ist leicht ersichtlich.

Dieses Drehungsmoment ist es, welches bei unserem Instrumente in Betracht kommt; das gesammte, von der Kugelschale auf das astatische Rollenpaar ausgeübte Drehungsmoment wird:

$$-\frac{dW}{d\varphi} = -\left(\frac{dW'}{d\varphi} + \frac{dW'}{d\varphi}\right) = \left[FM' + M_s M''\frac{1}{r^3}\Big\{1 - \frac{3}{4\cdot 5}\cdots\Big\}\right] i^2 \sin\varphi \quad (17$$

Die in den eckigen Klammern enthaltene Grösse hängt nur von r, d. i. der Entfernung des Kugelmittelpunktes von den Mittelpunkten der Endflächen der oberen Rolle ab, alles andere sind Constanten des Instrumentes; es ist somit unsere frühere Behauptung genau erwiesen, dass das Drehungsmoment vom Winkel φ in einfachster Weise abhängt.

Ist ferner das astatische Rollenpaar bifilar aufgehängt, sind α, β die Entfernungen der beiden Aufhänge- resp. Befestigungspunkte, λ die Länge eines Drahtes, τ der von der Drahttorsion herrührende Coëfficient, m die Masse des Rollenpaares, g die Beschleunigung der Schwere, dann ist das rückwirkende Drehungsmoment der Schwere und das der Torsion[1]):

$$\frac{1}{4}\frac{\alpha\beta}{\lambda}\,\mathrm{mg}\sin\chi + \tau\chi$$

wenn χ den Ablenkungswinkel bedeutet.

Nun ist bei jeder Bifilarsuspension χ klein; und wenn es nicht 3^0 übersteigt, kann man statt $\tau\chi$, $\tau\sin\chi$ setzen, was von unmerklichem Einflusse ist, da das erste, vom Gewicht mg abhängende Glied vielmal grösser ist, als das zweite.

1) Maxwell, l. c. p. 109. Eigentlich ist das erste Glied noch mit $\sqrt{1 - \frac{4\alpha\beta}{\lambda^2}\sin^2\frac{1}{2}\chi}$ zu dividiren.

In Bezug auf den Einfluss des Erdmagnetismus ist zu bemerken, dass das dadurch entstehende Drehungsmoment, wie schon erwähnt, der Differenz $M' - M''$ oder $M'' - M'$ proportional ist, je nach der Richtung des Stromes; aber diese Differenz kann bei genauer Anfertigung der beiden Rollen fast unmerklich gemacht werden, so dass man nur das Mittel zweier, in Folge dessen sehr nahe aneinander liegenden, Ablesungen mit entgegengesetzter Stromrichtung zu nehmen hat, um diesen Einfluss gänzlich zu eliminiren.

Stellt man die Achsen des Rollenpaares in den magnetischen Meridian, die Achse der Schale senkrecht darauf, bedeutet ψ den Ablenkungswinkel und A das Trägheitsmoment des aufgehängten Apparates, dann ist seine Bewegungsgleichung:

$$A\frac{d^2\psi}{dt^2} = \left\{FM' + M_3 M' \frac{1}{r^3}\left(1 - \frac{3}{4\cdot 5}\cdots\right)\right\}\iota^2 \cos\psi - \left(\frac{1}{4}\frac{\alpha\beta}{\lambda}\text{mg} + \tau\right)\sin\psi.$$

Tritt Gleichgewicht ein $\frac{d^2\psi}{dt^2} = 0$, und die Stromintensität wird bestimmt:

$$\iota^2 = \frac{\frac{1}{4}\frac{\alpha\beta}{\lambda}\text{mg} + \tau}{FM' + M_s M'' \frac{1}{r^3}\left(1 - \cdots\right)} \cdot \operatorname{tg}\psi. \qquad (18$$

Unser Instrument ist somit ein theoretisch richtiges Tangenten-Elektrodynamometer.

Man bemerkt sofort, dass bei Benützung des Millimeters, Milligramms und der Zeitsecunde die Intensität nach Weber'schen mechanischen Einheiten, Dimension $\frac{m^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}}{t}$ ausgedrückt wird.

2. Es soll nun ein anderer, für die Praxis sehr wichtiger Fall der Wirkung einer cylindrischen Rolle auf einen unendlich kurzen Magneten vollständig behandelt werden, da derselbe zur Bestimmung der Constanten des Instrumentes angewendet wurde.

Die Achse der Rolle und des kleinen Magneten liegen in derselben horizontalen Ebene, erstere ausserdem in der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte, also mit r_0 zusammenfallend. Man setze die mit $\sin\eta_2$ behafteten Glieder gleich Null; ausserdem aber ist:

$$\gamma_0 = \gamma = \gamma' = \frac{\pi}{2}; \quad \vartheta = 0, \ \varepsilon = \vartheta = \eta_1 = \eta; \ r_1 = r_0 - b, \ r_2 = r_0 + b;$$

$$\mu_1 = \mu_2 = 1,\ Q_2 = Q_4 = \cdots = 1;\ \frac{dr_1}{dh} = \frac{dr_2}{dh} = \cos\eta;\ \frac{dr_1}{d\eta} = \frac{dr_2}{d\eta} = 0;$$

$$\frac{d\mu_1}{dh} = \frac{d\mu_2}{dh} = 0;\ \frac{d\mu_1}{d\eta} = \frac{d\mu_2}{d\eta} = 0;\ \frac{d^2 r_1}{d\eta dh} = \frac{d^2 r_2}{d\eta dh} = -\sin\eta;$$

$$\frac{d^2\mu_1}{d\eta dh} = \frac{d^2\mu_2}{d\eta dh} = 0.$$

Es bleibt:

$$-\frac{dW''}{d\eta} = M_s i\left(\frac{dV_1}{dr_1} + \frac{dV_2}{dr_2}\right) = \frac{\pi m n i^2}{b(R_2'' - R_1'')}\left\{\frac{R''^3_2 - R''^3_1}{2\cdot 3}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{3(R''^5_2 - R''^5_1)}{2\cdot 4\ 5}\left(\frac{1}{r_1^4} - \frac{1}{r_2^4}\right) + \cdots\right\}\sin\varphi;$$

entwickelt man die negativen Potenzen von r_1 und r_2 nach fallenden Potenzen von r_0 und ordnet, so findet man (M'' ist hier ebenfalls das magnetische Moment der Rolle):

$$-\frac{dW''}{d\eta} = M_s M'' i^2 \frac{2}{r_0^3}\left\{1 + \left(2b^2 - \frac{9}{10}\frac{R''^5_2 - R''^5_1}{R''^3_2 - R''^3_1}\right)\frac{1}{r_0^2}\right.$$
$$+ \left(3b_4 - \frac{9}{2}\frac{R''^5_2 - R''^5_1}{R''^3_2 - R''^3_1}\cdot b^2 + \frac{15}{56}\frac{R''^7_2 - R''^7_1}{R''^3_2 - R''^3_1}\right)\frac{1}{r_0^4} + \left(4b^2 - \frac{63}{5}\frac{R''^5_2 - R''^5_1}{R''^3_2 - R''^3_1}\cdot b^4\right.$$
$$\left.\left. + \frac{5}{4}\frac{R''^7_2 - R''^7_1}{R''^3_2 - R''^3_1}\cdot b^2 - \frac{7}{144}\frac{R''^9_2 - R''^9_1}{R''^3_2 - R''^3_1}\cdot\right)\frac{1}{r_0^6} + \cdots\right\}\sin\varphi. \quad (19$$

Es ist dies das Drehungsmoment, welches bei den meisten Galvanometern vorkommt, wo eine cylindrische Spule einen kleinen Magneten vom Meridiane ablenkt. In den meisten Fällen begnügt man sich mit der Genauigkeit des ersten Gliedes und setzt $-\frac{dW''}{d\eta}$ dem Momente $M''i$, oder, was dasselbe bedeutet, der gesammten stromumflossenen Fläche proportional; dies ist jedoch nur dann genau, wenn die halbe Breite b und der äussere und innere Radius R_2, R_1 der Rolle etwa hundertmal kleiner sind als r_0. Ist aber r_0 nur etwa zehnmal grösser als diese Dimensionen, dann kann man der Spule durch die Bedingung:

$$2b^2 - \frac{9}{10}\frac{R''^5_2 - R''^5_1}{R''^3_2 - R''^3_1} = 0$$

solche Form geben, dass das zweite Glied immer verschwindet, während die übrigen zu vernachlässigen sind.

Besteht die Spule aus einer einzigen Lage von Strömen mit dem Radius R, dann ist $R_2^5 - R_1^5 = d(R^5)$, $R_2^3 - R_1^3 = d(R^3)$ und man findet $b^2 = \frac{3}{4}R^2$.

Ist hingegen der innere Radius R_1 gegen den äusseren zu vernachlässigen, dann wird $b^2 = \frac{9}{20} R^2$.

In allen anderen Fällen wird man sich an die Bedingungsgleichungen halten.

Bei Construction von Galvanometern sind diese Verhältnisse nicht ausser Acht zu lassen.

3.

Vor Bestimmung der eigentlichen Constanten des Instrumentes müssen wir vor allem nachweisen, in wie ferne man berechtigt ist, die Wirkung unserer Kugelschale so aufzufassen, als ob in jeder concentrischen Kugelfläche derselben wirklich unzählige lineare Ströme vorhanden wären, und im Innern ein thatsächlich homogenes Feld entstünde.

Wir hatten für die Potentialfunction einer solchen Schichte für innere Punkte: $\Omega' = \frac{4\pi}{3} Ni \frac{z}{a}$; daher die Kraft in der Richtung von z: $P = \frac{4\pi}{3} \frac{N}{a} i$. In unserem Falle ist $N = 2n = 40$, somit $P = \frac{2\pi i}{a} 26 \cdot 667$.

Berechnet man aber dieselbe Kraft für diesen Punkt für jeden Kreisstrom nach den bekannten Regeln, dann ist $P = 2\pi i 2 \sum_1^n \frac{a^2}{(a^2 + \varrho_k^2)^{\frac{3}{2}}}$; dabei ist ϱ_k die Entfernung der Stromebene vom Mittelpunkte der Kugel, also: $\varrho_k = \frac{2k - 1}{2n} \cdot a$. Für $n = 20$ findet man $P = \frac{2\pi i}{a} 26 \cdot 6750$. Der Unterschied zwischen den beiden Berechnungsarten ist $0 \cdot 00032$ des ganzen Werthes; derselbe ist hier jedoch durchaus nicht massgebend, denn die erste Berechnungsart kann eigentlich nur dann angewendet werden, wenn N ausserordentlich gross ist. Das Hauptgewicht ist auf die Gleichförmigkeit des Feldes zu legen; berechnen wir daher die Kraft, welche die vierzig Kreisströme auf einen Punkt der Achse ausüben, welcher vom Mittelpunkt um die halbe Radiuslänge $\frac{a}{2}$ entfernt ist. Bedeutet ψ_x den Winkel zwischem dem zum Strome gezogenen Strahle und der Achse, dann ist $P = 2\pi i \sum_1^{2n} \frac{\sin^2 \psi_x}{({}^5\!/_4 + \cos \psi'_x)^{\frac{3}{2}}}$

und $\cos \psi_x = \pm \frac{2k-1}{2n}$. Man findet: $P = \frac{2\pi i}{a} 26 \cdot 6794$. Die Aenderung der Kraft vom Mittelpunkte bis zur Entfernung des halben Radius beträgt somit 0·00016 der ganzen Kraft; man kann daher ohne messbaren Fehler den Raum, welchen die concentrische Kugelfläche vom Radius $\frac{a}{2}$ einschliesst, als homogenes Feld betrachten, nnd dies bei unserem Instrumente um so mehr, als der Raum, den die innere Rolle einnimmt, im Verhältniss zur mittleren Kugelfläche der Schale geringer ist als der hier betrachtete.

Man bemerkt zugleich, dass im selben Maasse, wie das innere Feld homogen angenommen werden kann, auch die Aussenwirkung der Kugelschale gleich der eines unendlich kurzen Magneten von endlichem Momente gesetzt werden kann.

Die Constanten des Instrumentes liessen sich aus den Dimensionen, der Anzahl der Windungen etc. leicht berechnen; doch da ein kleiner Fehler bei den schwierig messbaren Grössen, etwa der Dicke der Schale etc. von bedeutendem Einflusse auf den Werth derselben sind, schien es zweckmässiger, mit Hilfe einer grossen cylindrischen Rolle von leicht und sicher messbaren Dimensionen, die Wirkungen der Kugelschale und der einzelnen Rollen des astatischen Paares zu vergleichen und ihre Constanten resp. Momente zu bestimmen. Die Dimensionen der Vergleichsrolle fanden sich:

$R_1 = 94{,}12^{mm}$, $R_2 = 112{,}07^{mm}$, $b = 27{,}51^{mm}$, $mn = 429 = 13 \times 33$; deren Moment: $\lg M = 7{,}11363$.

Wir skizziren nur den Vorgang dieser Messungen, bei welchen Herr st. ph. G. Bartoniek gütigst mitwirkte, und geben dann ihre Resultate.

1. In den inneren Raum der Kugelschale wurde ein sehr kleiner Ringmagnet aufgehängt. Die Achse der Schale und Vergleichsrolle fielen in dieselbe, zum magnetischen Meridian senkrechte Linie. Der Strom verzweigte sich in die Schale und die Vergleichsrolle; die Intentensität der Zweigströme wurde durch successives Einschalten von Widerständen so lange verändert, bis die Wirkungen beider sich vollständig compensirten, während jeder für sich einen sehr bedeutenden Ausschlag hervorrief. Das Verhältniss der Intensitäten in der Kugel und Rolle war 58,715; die Entfernung des Mittelpunktes der letzteren vom Magneten $302{,}55^{mm}$. Aus diesen Daten ergab sich die constante

Kraft im Innern der Schale, wenn die Stromeinheit durchfliesst: $\lg F = 0{,}98361$.

2. Die relative Lage der Rolle und der Schale zum Meridian blieb dieselbe; der kleine Magnet wurde ausserhalb der Kugelschale so aufgehängt, dass dessen Mittelpunkt in die Verlängerung der Achsen zu liegen kam. Derselbe Strom ging durch beide, und es wurde die Summe und die Differenz ihrer Wirkungen gemessen. Die Kräfte der Schale und der Rolle verhielten sich wie 3,0908 : 1; die Entfernungen ihrer resp. Mittelpunkte vom Magneten betrugen: $r_s = 240{,}58^{mm}$; $r_r = 419{,}85^{mm}$. Daraus ergab sich für das magnetische Moment der Schale nach aussen, wenn durch dieselbe die Stromeinheit fliesst: $\lg M^s = 6{,}84077$.

3. und 4. Die Vergleichsrolle behielt ihre vorige Stellung zum Meridian, zwischen ihr und dem Magnete wurde eine Rolle des astatischen Paares so aufgestellt, dass ihre Achse mit der der ersten zusammenfiel, und nun wurde bei gleicher Stromintensität in beiden, die Entfernung der kleinen Rolle so lange geändert, bis sich ihre Wirkungen vollständig compensirten. Dasselbe geschah mit der anderen Rolle des Paares.

Man beachte nun, dass der allgemeine Ausdruck des auf den kleinen Magneten ausgeübten Drehungsmomentes (19) für die grosse und kleine Rolle giltig ist; man berechne nun die höheren in der Klammer befindlichen Glieder für letztere aus den direct gemessenen Grössen: $R_1' = R_1'' = 4{,}0^{mm}$; $R_2' = 27{,}65^{mm}$, $R_2'' = 27{,}13^{mm}$; $b' = b'' = 15{,}0^{mm}$ der kleinen Rollen und bilde den numerischen Werth der Klammern, der von 1 wenig abweicht; daraus, und mit Hilfe der vollständig bekannten Wirkung der Vergleichsrolle findet sich für das magnetische Moment der inneren und äusseren Rolle, wenn dieselben die Stromeinheit durchfliesst: $\lg M' = 5{,}74153$; $\lg M'' = 5{,}72189$; ihr Verhältniss $1 \cdot 046$.

Schliesslich ergab sich die Entfernung des Mittelpunktes der Endflächen der oberen Rolle vom Kugelmittelpunkte bei dem zur Beobachtung eingerichteten Instrumente $r = 236{,}21^{mm}$; man hat daher $b = 15{,}0^{mm}$; $\mu = 0{,}06349$ und daraus der Werth von (16):

$$\lg \frac{1}{r^3}\left\{1 - \frac{3}{4 \cdot 5}(3\,Q_2 + \cdots)\right\} = 2{,}87877 - 10.$$

Ferner findet man aus Obigem:

$$FM' = 5{,}310{,}550;\quad M_s M'' \frac{1}{r^3}\left\{1 - \cdots\right\} = 276{,}335.$$

Noch ist das Drehungsmoment zu bestimmen, welches durch die Schwere des aufgehängten Apparates und die Torsion der Drähte entsteht. Dies geschieht nach der Methode von Gauss durch Aufhängung bekannter Gewichte auf den Querarm AA (Fig. 1), und Messung der Schwingungszeiten. Es fand sich bei unserem Instrumente: $\left(\frac{1}{4}\frac{\alpha\beta}{\lambda}\,\mathrm{mg}+\tau\right) = 65{,}873{,}400$. Daraus folgt für die Intensität i des Stromes, welcher im Elektrodynamometer die Ablenkung ψ hervorruft:

$$i^2 = 11\cdot7908\,\mathrm{tg}\,\psi\left[\frac{ml}{t^2}\right],$$

ausgedrückt in mechanischen Stromeinheiten. Fliesst die Weber'sche Stromeinheit durch das Instrument, so erzeugt er eine Ablenkung von $4^0\,51'\,54{,}8''$.

Der Vollständigkeit wegen theilen wir noch die Widerstände w_s, w', w'' und w, der Kugelschale, der inneren, der äusseren Rolle und der beiden Aufhängungsdrähte mit, sämmtlich in Ohmeinheiten ausgedrückt: $w_s = 10{,}084$, $w' = 2{,}6010$, $w'' = 2{,}4917$, $w = 8{,}1307$.

Es ist noch zu bemerken, dass bei Aenderungen an der Suspension etc. nur r (die Entfernung des Kugelmittelpunktes von den Enden der oberen Rollenachse) und α, β, λ variabel sind, während F, M_s, M', M'' unbedingt constant bleiben.

Würde man nach Edelmann's Vorgang[1]) Unifilarsuspension anwenden, so hätte man statt $\left(\frac{1}{4}\frac{\alpha\beta}{\lambda}\,\mathrm{mg}+\tau\right)$ sin ψ, $\tau\,\psi$ zu setzen, und das Quadrat der Intensität wäre $\frac{\psi}{\cos\psi}$ proportional.

Wir haben im Obigen gezeigt, dass die praktische Ausführung eines Elektrodynamometers, dessen Bewegungen den theoretisch einfachsten Gesetzen folgen, nicht mit so grossen Schwierigkeiten verbunden ist, als dies beim ersten Anblicke erscheint; ja man wird bei grösseren Instrumenten die Anzahl der konischen Spiralen leicht auf hundert bringen können, und eine so bedeutende Annäherung an das theoretisch homogene, magnetische Feld erzielen, dass auch die feinste Messung[2]) weit hinter dieser zurückbleibt.

1) Wiedemann, Galvanismus, II.2 S. 720.

2) Die Genauigkeit der magnetischen und elektrischen absoluten Messungen übersteigt wohl nie 0,0001 des ganzen Werthes.



Entfernt man schliesslich das astatische Rollenpaar, und hängt an seiner Stelle einen Magneten beliebiger Form und Dimension in das Innere der Schale, so hat man ein vollständiges, genaues Tangenten-Galvanometer.

Bevor wir diesen Gegenstand gänzlich verlassen, mögen hier einige allgemeine Bemerkungen über die Erzeugung eines homogenen elektromagnetischen Feldes mittelst galvanischer Ströme Platz finden.

Man denke sich einen homogenen, magnetisirbaren Körper in ein gleichförmiges magnetisches Feld gebracht und durch Induction magnetisirt. Entspricht seine Form gewissen Gesetzen[1]), dann ist seine Magnetisirung gleichförmig, und auch das magnetische Feld im Innern des Körpers gleichförmig; somit erzeugt der magnetisirte Körper für sich auch ein homogenes Feld in seinem Innern[2]). Man kann aber den so magnetisirten Körper durch aequidistante, zur magnetisirenden Kraft verticale Schnitte in parallele, gleichdicke Lamellen theilen, deren magnetisches Moment ihrer Fläche direct proportional ist. Jede solche unendlich dünne Lamelle lässt sich aber nach bekannten Gesetzen durch einen galvanischen Strom substituiren, dessen Bahn mit dem Rande der Lamelle zusammenfällt.

Die magnetische Wirkung eines solchen gleichförmig magnetisirten Körpers auf innere und äussere Punkte, jedoch nicht für Punkte seiner Oberfläche, lässt sich durch diejenige einer unendlichen Anzahl gleichgerichteter, diese Fläche bedeckender Ströme von gleichem Ebenenabstand vollständig ersetzen. Damit ist eine einfache, allgemeine Methode zur Herstellung eines homogenen Feldes durch elektrische Ströme gegeben.

Der einzige bisher bekannte Körper, welcher im homogenen Felde gleichmässig magnetisirt wird, ist das Ellipsoid[3]).

Mit Leichtigkeit wird man eine solche Fläche in der angegebenen Weise mit einer Lage von Strömen resp. Stromträgern bedecken können; aber schon die Legung der zweiten Schicht ist mit ausserordentlichen Schwierigkeiten verbunden, denn die äussere Oberfläche

---

1) Maxwell, l. c. p. 62 und 63.
2) Thomson, Reprint of papers on electrostatics p. 470 Note, 1872.
3) Maxwell, l. c. p. 63 und p. 280.

der ersten, aus gleichdicken Drähten bestehenden Schicht ist keine Ellipsoidfläche mehr, da es bekanntlich keine zwei confocale, oder auch nur concentrische Ellipsoide gibt, die eine überall gleichdicke Schicht zwischen sich haben[1]). Ausserdem ist die Aussenwirkung einer strombedeckten Ellipsoidfläche, obwohl dessen Moment leicht zu bestimmen[2]), im Allgemeinen durchaus nicht gleich derjenigen eines unendlich kurzen Magneten von endlichem Momente, da auch die Attraction eines homogenen Ellipsoides nicht durch die einer in einem Punkte concentrirten Masse substituirt werden darf. Man wird sich daher auch wohl fernerhin auf den speciellen, jedoch für die praktische Ausführung vorzüglich geeigneten Fall der Kugel beschränken.

---

1) In letzter Zeit construirte E. Riecke, Carl's Repertorium Bd. 14 S. 703, ein Galvanometer, bei welchem zwei strombedeckte Halbellipsoidschalen zur Herstellung eines gleichförmigen Feldes dienen.

2) Beer, Elektrostatik p. 189, 1865.

Mechanische Bestimmung des Potentials und der Anziehung unregelmässig gestalteter, durch parallele Schnittebenen bestimmter Körper.

Von

Alfred Amsler.

(Hiezu Tafel XV Fig. 3.)

Bei manchen Problemen der Physik und deren Anwendungen in der Geodäsie ist es von Interesse, die nach gewissen Richtungen genommenen Componenten der Fernewirkung unregelmässig gestalteter Körper zu berechnen, deren Oberfläche nicht durch einen analytischen Ausdruck, sondern nur graphisch darstellbar ist.

Besteht die Fernewirkung in Anziehung oder Abstossung nach dem Newton'schen Gesetze, so lässt sich die Aufgabe näherungsweise auf folgendem Wege lösen.

Man denke sich den Körper, dessen anziehende oder abstossende Kraft auf eine im Punkt P concentrirt gedachte Masse m zu bestimmen ist, in einer passend gewählten Richtung durch parallele Ebenen in n Schichten zerschnitten, deren Dicken $h_1, h_2, \ldots h_n$ im Vergleich zu ihren beiden anderen Dimensionen klein sein sollen. Die Dichtigkeit der Masse wird in einer solchen Schicht im Allgemeinen von Punkt zu Punkt variiren; ich nehme aber an, dass die parallelen Schnitte so gewählt seien, dass man in jeder Schicht einen constanten mittleren Werth $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ statt der variablen Dichtigkeit ϱ in Rechnung bringen darf; ferner setze ich die Dicke jeder Schicht als so gering voraus, dass wenn man über einem Element einer der beiden parallelen Begrenzungsebenen einer Schicht einen senkrechten Cylinder errichtet, die in demselben enthaltene Masse des Schnittes in diesem Flächenelement concentrirt gedacht werden darf. Ich denke mir also den Körper ersetzt durch ein System von n parallelen Ebenen mit homogenen Massenbelegungen.

Nenne ich $d\omega_\lambda$ ein Element der λten Schnittfläche ω_λ und r seinen Abstand vom Punkt P, in dem die Masse m concentrirt sein soll, V

das Potential des Körpers in Bezug auf P, so sind die Attractionscomponenten X, Y, Z, bezüglich genommen nach den drei zu einander senkrechten Richtungen x, y, z bekanntlich:

$$X = -mf\frac{dV}{dx} \quad Y = -mf\frac{dV}{dy} \quad Z = -mf\frac{dV}{dz}$$

und

$$V = \sum_{\lambda=1}^{n} \int \frac{\varrho_\lambda h_\lambda d\omega_\lambda}{r}.$$

Jedes der diese Summe bildenden Integrale ist zu nehmen über die entsprechende Schnittfläche w_λ. f bedeutet die Attractionsconstante. Stellt die Zeichnung den Körper nicht in natürlicher Grösse, sondern im Verhältniss $1:k$ dar, so hat man den Ausdruck für V noch mit k zu multipliciren, um das Potential zu erhalten; X, Y, Z dagegen sind unabhängig von diesem Verhältniss.

Da nun h_λ und ϱ_λ für jede Schicht constant sein sollen, so ist

$$V = \sum_{\lambda=1}^{n} h_\lambda \varrho_\lambda \int \frac{d\omega_\lambda}{r} = \sum_{\lambda=1}^{n} h_\lambda \varrho_\lambda U_\lambda,$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$U = \int \frac{d\omega}{r}.$$

Wäre U durch einen analytischen Ausdruck darstellbar, so hätte man V einfach nach x, y, z zu differenciiren, um resp. X, Y, Z zu erhalten. Dieses ist aber im Allgemeinen nicht der Fall, sondern man wird sich in der Regel mit dem Zahlenwerth des Integrals begnügen müssen. Dieser drückt eine Länge aus. Um nun in letzterem Falle X zu erhalten, kann man V für einen P benachbarten, in der Richtung x liegenden Punkt P' berechnen; ist V' dieser neue Werth von V und Δx der Abstand zwischen P und P', so ist angenähert

$$X = -mf\frac{V' - V}{\Delta x}.$$

Ebenso verfährt man, um Y und Z zu berechnen.

Daraus erhält man dann die Gesammtanziehung R und die Winkel α, β, γ, welche R bez. mit X, Y, Z bildet, nach den Formeln

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{X}{R} \quad \cos\beta = \frac{Y}{R} \quad \cos\gamma = \frac{Z}{R}.$$

Ein hieher gehöriges Beispiel wäre die Berechnung des Einflusses, welchen ein Berg oder eine Gebirgsmasse auf die Lothrichtung ausübt. Ist der Berg durch Niveaukurven dargestellt, wie dies bei den neueren topographischen Aufnahmen immer der Fall ist, so betrachte man dieselben als die ebenen Schnittflächen ω_λ; die zwischen diesen eingeschlossenen Erdschichten haben alle dieselbe Höhe h, während man für jede einzelne Schicht eine der geognostischen Beschaffenheit entsprechende mittlere Dichtigkeit ϱ_λ anzunehmen hat. Im Punkte P hat man sich das Loth zu denken.

Die Aufgabe, das Integral U und daraus, wie oben angedeutet, X, Y, Z zu berechnen, lässt sich nun auf einfache Art mit Hilfe des im Folgenden beschriebenen Instrumentes lösen, wenn die Contouren der ebenen Schnittflächen, die senkrechten Projectionen P_1 von P auf diese und die Abstände $P P_1 = p$ bekannt sind.

Ein mit einer Theilung versehener Stab $a a$ Fig. 3 Taf. XV trägt am einen Ende die drei Führungsrollen R_1, welche dem zwischen ihnen gleitenden Stab $b b$ eine zu $a a$ stets senkrechte Richtung geben. Auf $a a$ lässt sich die Hülse h verschieben und mittelst der Klemmschraube k festklemmen. Diese Hülse dient einer in dem Rahmen $d_2 d_2$ befestigten verticalen Achse als Lager. In $d_2 d_2$ ist zwischen den Spitzen zweier Schrauben ein zweiter Rahmen $l_2 l_2$ so festgehalten, dass die Laufrolle L_2 stets durch ihr eigenes Gewicht und dasjenige des Ramens $l_1 l_1$ auf das Papier niedergedrückt wird. L_2 führt während der Bewegung des Instrumentes eine theils rollende, theils gleitende Bewegung aus. Die Anzahl ihrer vollen Umdrehungen wird auf dem Zählscheibchen Z_2 und die tausendstel Umdrehungen am Nonius N_2 abgelesen. Am Rahmen $d d$ sind drei Führungsrollen R_2 so angebracht, dass die zwischen ihnen gleitende Stange $c c$ stets parallel zur Achse der Laufrolle L_2 geführt wird.

Die Stangen $c c$ und $b b$ sind durch das Charnier D unter sich und mit dem Fahrstifte F verbunden, welcher gleichzeitig einer der drei Stützpunkte des Instrumentes ist. $c c$ trägt den Rahmen $d_1 d_1$, der den ganz ähnlich wie $l_2 l_2$ eingerichteten Rahmen $l_1 l_1$ mit der Laufrolle L_1 aufnimmt. An einem Arme f der Stange $a a$ sitzt ein Nadeleinsatz mit einer Nadel t, um welche sich das ganze Instrument dreht. Den dritten Stützpunkt bildet die Elfenbeinrolle u.

Die Punkte, in welchen die Laufrollen L_1 und L_2 auf dem Papier aufliegen, der Schnittpunkt Q der verlängert gedachten Drehaxe mit

der Zeichnungsebene, und die Spitze des Fahrstiftes F liegen in einer zur Stange cc parallelen Linie. Ferner ist die Verbindungslinie der Fahrstift- und Nadelspitze parallel zur Stange bb.

Um nun das Integral

$$U = \int \frac{d\omega}{r}$$

zu bestimmen, stelle man zunächst die Hülse h so ein, dass ihre Kante i mit dem $p$ten Theilstrich der auf aa angebrachten Theilung coincidirt; setze sodann das Instrument so auf die Zeichnungsfläche, dass die Nadel t auf den Punkt P_1 zu liegen kommt und drücke die Nadel ins Papier ein. Den Fahrstift F bringe man auf einen beliebig zu wählenden Ausgangspunkt der Contour von ω und lese den Stand der Rollen L_1, L_2 ab; die Ablesungen seien bezüglich u_1, u_2; umfahre dann mit F die Figur von links nach rechts (im Sinne des Uhrzeigers). Ist man mit F wieder beim Ausgangspunkt angekommen, so lese man den Stand der Rollen L_1, L_2 wieder ab; sind die bezüglichen Ablesungen v_1, v_2, so ist

$$U = v_1 + v_2 - (u_1 + u_2)$$

(in Millimetern ausgedrückt), wenn P_1 ausserhalb der Figur ω liegt; liegt dagegen P_1 innerhalb ω, so ist noch eine Constante C hinzuzufügen, welche jedoch gleich Null ist, wenn die Rolle L_1 gleich weit von F absteht, wie L_2 von Q.

Um $\frac{dU}{dx}$ zu finden, wobei x irgend eine Richtung bedeuten möge, wiederholt man dieselbe Operation für einen in der Richtung x nahe bei P liegenden Punkt P', dessen Projection P_1' und dessen Abstand von der Zeichnungsebene p' seien. So findet man U' und daraus

$$\frac{dU}{dx} = \frac{U' - U}{\Delta x},$$

wenn Δx die in Millimetern ausgedrückte Entfernung von P und P' bezeichnet. Bei der Bildung von $\frac{dU}{dx}$ fällt natürlich die Constante C ganz ausser Betracht.

Theorie des Instrumentes. Zunächst liege der Punkt P in der Ebene der Figur ω. In Fig. a wähle ich P als Pol eines Polarcoordinationssystems; ist r der Abstand eines Flächenelementes dw von P und φ der Winkel zwischen r und der beliebig gewählten Polarachse, so ist

$$d\omega = r\,dr\,d\varphi;$$

folglich:

$$U = \int \frac{dw}{r} = \int \int dr \cdot d\varphi = \int (r_2 - r_1)\, d\varphi,$$

wenn r_1 und r_2 die beiden zu φ gehörigen, durch die Contour s von ω bestimmten extremen Werthe von r bedeuten. Sind ds_1 und ds_2 die zwischen zwei auf einander folgenden Lagen von r liegenden Elemente der Contour s, $(r\,n_1)$ und $(r\,n_2)$ die Winkel zwischen der in der Figur durch einen Pfeil angedeuteten Richtung von r und den in ds_1 und ds_2 nach innen errichteten Normalen n_1 und n_2, so wird

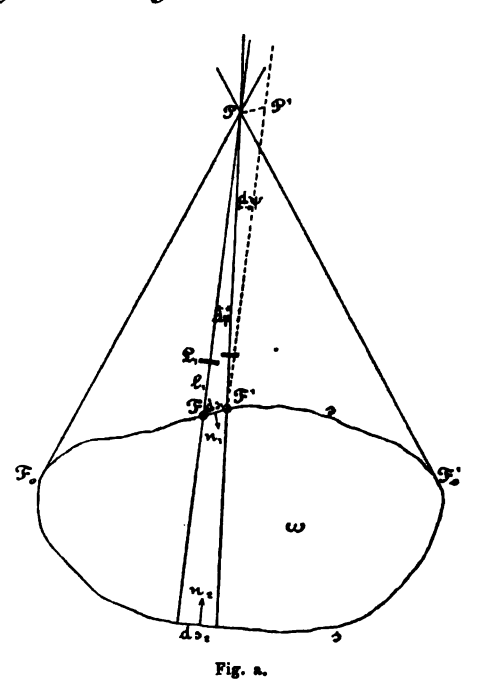


Fig. a.

$$r_1\, d\varphi = -\, ds_1 \cos(r n_1)$$
$$r_2\, d\varphi = -\, ds_2 \cos(r n_2),$$

mithin:

$$U = \int ds_1 \cos(r n_1) + \int ds_2 \cos(r n_2) = \int ds \cos(r n).$$

Das ursprünglich über ω auszudehnende Flächenintegral ist damit durch ein Randintegral ersetzt, welches sich über die ganze Contour s erstreckt.

Die Gerade PF denke ich mir nun beweglich und zwar so, dass sie stets durch P geht, während F, fest mit ihr verbunden, die Kurve s durchläuft. Statt nun PF direct in die unendlich benachbarte Lage PF' überzuführen, denke ich mir PF parallel zu sich selbst verschoben, bis F mit F' zusammenfällt und dann um F' gedreht um den Winkel $d\psi$, so dass sie in die Lage PF' kommt.

Stellt nun PF eine Stange vor, welche eine Laufrolle L_1 trägt, deren Achse die Richtung von PF hat, und im Abstande l_1 vom Rollenrande mit einem Fahrstift F versehen ist, so wickelt bei ihrer Ueberführung aus der Lage PF in die Lage PF' auf jenem indirecten Wege die Rolle L_1, bis auf ein unendlich Kleines höherer Ordnung

als der erstere, denselben Bogen ab, wie wenn PF direct nach PF' gebracht wird; der abgewickelte Bogen ist daher

$$ds_1 \cos(rn_1) + l_1 d\psi.$$

(Zu beachten ist, dass (rn_1) ein stumpfer Winkel, daher $ds_1 \cos(rn_1)$ eine negative Grösse ist.)

Ist die Tangente PF_0 die Anfangslage der Stange PF und bewegt man F in der Richtung des Pfeiles bis nach F_0', so wickelt die Rolle L_1 einen Bogen ab, der gleich ist

$$\int ds_1 \cos(rn_1) + l_1 \int d\psi.$$

Das erste Integral ist ausgedehnt über das durchlaufene Kurvenstück; das zweite Integral ist gleich ψ, und dieser Winkel ist, wie man leicht einsieht, der zwischen den beiden Tangenten PF_0 und PF_0' eingeschlossene $\sphericalangle F_0 P F_0'$.

Führt man F über F_0' weiter nach F_0 zurück, so wickelt jetzt L_1 einen Bogen ab, der gleich ist

$$\int ds_2 \cos(rn_2) - l_1 \int d\psi.$$

Das zweite Integral ist wieder gleich demselben Winkel ψ. Hat daher F die ganze Kurve s durchlaufen, so ist der gesammte von der Rolle L_1 abgewickelte Bogen gleich

$$\int ds_1 \cos(rn_1) + \int ds_2 \cos(rn_2) = \int ds \cos(rn),$$

und dieser Ausdruck ist, wie wir gesehen haben, gerade gleich U.

Liegt P innerhalb ω, wie in Fig. b, so ist

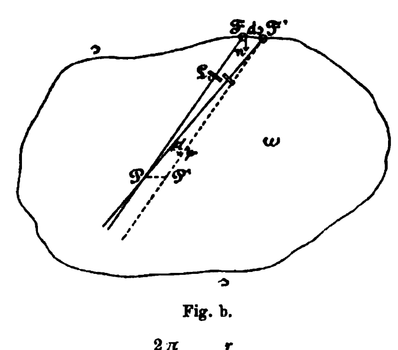


Fig. b.

$$U = \int \frac{d\omega}{r} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r dr = \int ds \cos(rn),$$

während der von der Rolle abgewickelte Bogen gleich ist

$$\int ds \cos(rn) - l_1 \int_0^{2\pi} d\psi = \int ds \cos(rn) - 2 l_1 \pi.$$

Um den wahren Werth von U zu erhalten, hat man daher noch die Constante $2 l_1 \pi$ zu der Rollenablesung zu addiren.

Die dem soeben behandelten Fall, wo P in der Ebene von ω liegt, entsprechende Aufstellung des oben beschriebenen Instrumentes ist folgende: Die Kante i der Hülse h muss mit dem Nullpunkte der Theilung auf aa coincidiren; die Nadel t ist im Punkte P einzusetzen; die Stangen bb und cc sind dann während des Umfahrens der Figur stets parallel, und die Punkte, in denen L_1 und L_2 das Papier berühren, liegen in der durch Nadel- und Fahrstiftspitze bestimmten Geraden. Die Rolle L_1 entspricht der gleichbezeichneten Rolle der Figuren a und b. Die Rolle L_2 bleibt bei dieser Messung ganz ausser Betracht.

Nun betrachten wir den Fall, wo der Punkt P im Abstande p von der Ebene der Figur ω sich befindet. Seine Projection auf letztere sei P_1. Durch von P_1 ausgehende gerade Linien denke ich mir ω in unendlich kleine Sectoren zerschnitten (Fig. c und d) und dem ent-

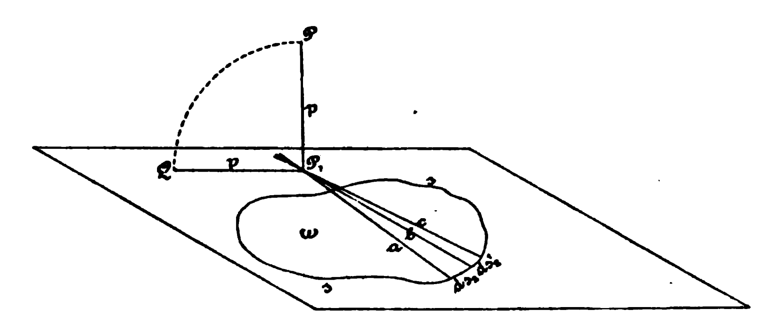


Fig. c.

sprechend das Integral U in unendlich viele über die einzelnen Sectoren ausgedehnte Integrale zerlegt. Fasse ich nun irgend einen Sector, der von den Seiten a, ds_1, b, ds_2 begrenzt sein mag, ins Auge, so ist es offenbar gleichgiltig, ob ich in dem darauf bezüglichen Integral $\int \frac{d\omega}{r}$ die Strecke r als den Abstand des Flächenelementes $d\omega$ von P oder von Q ansehe, wenn $QP = P_1 P = p$ ist, und QP_1

senkrecht auf b steht, da ja der zwischen a und b liegende Sector unendlich schmal sein soll. Dem benachbarten Sector wird ein anderer Punkt Q' in der Ebene von ω entsprechen, der so liegt, dass $Q'P_1$ senkrecht zu c und $Q'P_1 = p$ ist. So kann ich jedem der unendlich vielen Sectoren, in welche ich mir ω zerschnitten denke, einen Punkt Q zuordnen, und alle diese Punkte Q liegen auf einem um P_1 mit dem Radius p beschriebenen Kreisbogen. Jedes der unendlich vielen Integrale $\int \frac{d\omega}{r}$, in denen r nun nicht mehr die Entfernung des Elementes $d\omega$ von ein und demselben Punkte P, sondern die Entfernung von demjenigen Punkte Q bedeutet, welcher dem $d\omega$ enthaltenden Sector zugehört, kann ich jetzt in ein Randintegral verwandeln, welches sich über den Umfang des bezüglichen Sectors zu erstrecken hat.

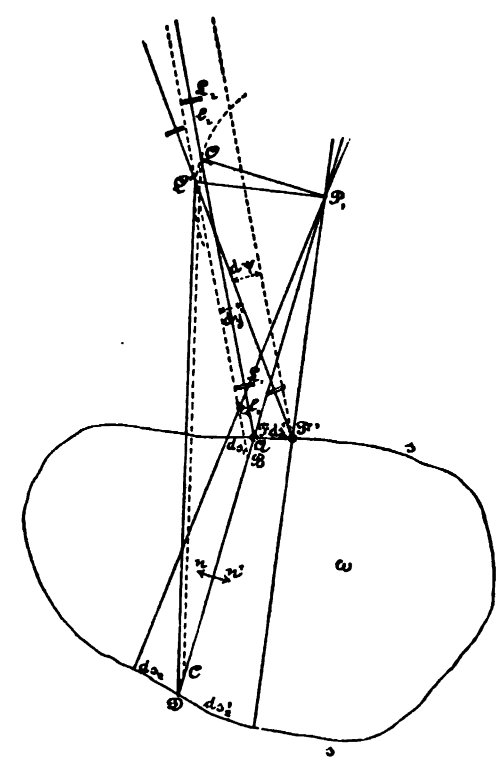


Fig. d.

Das auf den zwischen a und b liegenden Sector sich beziehende Integral wird

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{r} &= \int da \cos(nr) + ds_1 \cos(n_1 r) \\ &+ \int db \cos(nr) + ds_2 \cos(n_2 r), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

worin die Winkel (nr) ihre früher definirte Bedeutung haben. Für den benachbarten Sector erhält man ebenso

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{r'} &= \int db \cos(n'r') + ds_1' \cos(n_1'r') \\ &+ \int dc \cos(n'r') + ds_2' \cos(n_2'r'), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei r' nun von Q' aus zu nehmen ist.

Formt man die auf die übrigen unendlich vielen Sectoren bezüglichen Integrale $\int \frac{d\omega}{r}$ in der Art, wie es in (1) und (2) geschehen ist, um und addirt sie, so sieht man leicht ein, dass in dem resultirenden Ausdrucke je zwei Integrale vorkommen, welche auszudehnen sind über die Gerade, in welcher zwei benachbarte Sectoren zusammenstossen. Die Betrachtungen, welche ich z. B. an der Summe

$$\int db \cos(nr) + \int db \cos(n'r') \qquad (3$$

anstellen kann, werden sich daher sofort auf alle übrigen Integrale übertragen lassen, die über die endlichen Begrenzungslinien der Sectoren zu nehmen sind.

Um den Werth der Summe (3) zu ermitteln, trage ich die unendlich kleine Strecke QQ' von A und D aus auf b ab und erhalte so die Punkte B und C. Es ist nun

$$\int db \cos(nr) = \int_{1} db \cos(nr) + CD \cos(nr),$$

wobei sich das Integral auf der rechten Seite über AC erstreckt,

$$\int db \cos(n'r') = \int_{1} db \cos(n'r') + AB \cos(n'r'),$$

und letzteres Integral erstreckt sich über DB.

Da nun QQ' parallel zu b, also die Dreiecke QAC und $Q'BD$ congruent sind, und $\cos(nr)$ und $\cos(n'r')$ längs AC resp. BD einander gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen sind, weil die Normale n nach dem Innern des ersten Sectors und n' nach dem Innern des zweiten Sectors gerechnet ist, so ist

$$\int_{1} db \cos(nr) = -\int_{1} db \cos(n'r'),$$

mithin

$$\int db \cos(nr) + \int db \cos(n'r') = AB \cos(n'r') + CD \cos(nr).$$

Man denke sich jetzt an Stelle der Geraden QF eine Stange, welche im constanten Abstand l_1 vom Fahrstifte F eine Laufrolle L_1 und im ebenfalls constanten Abstand l_2 von Q eine zweite Laufrolle L_2, deren Achsen die Richtung QF haben, trägt, so beweglich, dass sie

immer durch den Punkt Q geht; Q selbst werde auf einem Kreisbogen vom Radius $QP_1 = p$ geführt, und ausserdem werde dafür gesorgt, dass die Verbindungslinien $P_1 F$ und $P_1 Q$ immer senkrecht auf einander bleiben. Umfährt man mit F die Contour von ω, so wickelt die Rolle L_1 einen Bogen ab, der gleich ist der Summe

$$ds_1 \cos(n_1 r) + ds_1' \cos(n_1' r') + \cdots \quad + ds_2 \cos(n_2 r) + ds_2' \cos(n_2' r') + \cdots$$

und L wickelt einen Bogen ab, der gleich ist

$$AB \cos(n' r') + \cdots \quad CD \cos(nr) + \cdots$$

Denkt man sich nämlich die Stange QF durch parallele Verschiebung und Drehung um F' in die neue Lage $Q' F'$ gebracht, was auf die Rollen L_1 und L_2 denselben Einfluss hat, wie die directe Ueberführung, so wickelt dabei L_1 einen Bogen ab, der gleich ist $ds_1' \cos(n_1' r') - l_1 d\psi$, wobei $d\psi$ ein unendlich kleiner Winkel ist. Da nun, was leicht einzusehen ist, $\int d\psi = o$ ist, wenn P_1 ausserhalb ω liegt, und $-l_1 \int d\psi = 2\pi l_1$, wenn P_1 innerhalb ω, so liefert wirklich die Rolle L_1 die Summe der Glieder von der Form $ds \cos(nr)$ in ersterem Falle.

Denkt man sich dagegen QF zuerst so parallel verschoben, dass Q nach Q' kommt, und dann um Q' um den Winkel $d\psi'$ gedreht bis zum Zusammenfallen mit $Q' F'$, und verschiebt man schliesslich noch die Stange in ihrer Längsrichtung, bis F mit F' zusammenfällt, so wickelt die Rolle L_2 den Bogen ab $AB \cos(n' r') + l_2 d\psi'$. Da wieder $\int d\psi' = o$ ist, wenn P_1 ausserhalb ω, und $l_2 \int d\psi' = -2\pi l_2$, wenn P_1 innerhalb ω liegt, so wird obige Behauptung auch in Bezug auf die Rolle L_2 bestätigt, für den Fall, dass P_1 ausserhalb ω liegt. Liegt P_1 innerhalb ω, so ist zu der Summe der Ablesungen von L_1 und L_2 noch die Constante $C = 2\pi(l_2 - l_1)$ hinzuzufügen; richtet man aber das Instrument so ein, dass $l_2 = l_1$ ist, so ist $C = o$, und die Behandlung ist dieselbe, ob P_1 innerhalb oder ausserhalb ω liegt.

Den Zusammenhang der Figuren 1 Tafel XV und d erkennt man ohne weiteres, da die gleichbedeutenden Stücke mit denselben Buchstaben bezeichnet sind.

Control-Barometer.

Von

H. Wild.

(Hiezu Tafel XVI.)

In Band 9 S. 389 des Repertoriums habe ich ein nach meinen Angaben von Turettini in Genf construirtes „neues Heberbarometer“ beschrieben, welches gegenüber den gewöhnlichen Heberbarometern gewisse Vorzüge besitzt und daher seither auf neu einzurichtenden meteorologischen Stationen vielfach eingeführt worden ist, ja auch anderwärts Eingang fand. Das Instrument, wie ich es damals beschrieben habe, zeigte indessen beim längeren Gebrauche noch mehrere Uebelstände, die allmählich durch kleine Veränderungen beseitigt wurden und die ich daher hier zunächst noch kurz erwähnen will.

Zunächst war namentlich für den Gebrauch als Reiseinstrument bei öfterm Anfassen des Barometers in der Mitte seiner Länge das Federn der beiden nur oben und unten verbundenen langen Messingröhren gegen einander für die unveränderte Erhaltung ihrer Geradheit bedenklich. Es wurden daher bei den neueren Instrumenten die beiden Röhren ungefähr in der Mitte ihrer Länge noch durch einen ∞-förmigen, klemmbaren Doppelring verbunden, wodurch das Ganze vollständige Festigkeit und Stabilität gewonnen hat. Ferner wurde die Klemmschraube sowohl dieses Ringes als des unteren Visirdoppelrings nicht mit ränderirtem Kopfe, sondern mit einem Viereck versehen, auf welches der zum Oeffnen des Hahns dienende Schlüssel passte, um nach Einstellung des Visirringes auf den Nullpunkt der Theilung eine unabsichtliche Verstellung des letzteren zu erschweren[1]).

1) Um die Gleichartigkeit der Ablesung oben und unten vollständig zu machen, ist es geboten, diesem Visirringe die gleiche Farbe wie dem Nonius oben zu geben, also entweder beide aus lackirtem Messing zu machen, oder beide zu versilbern, etc.



Endlich geschah es beim Transporte gefüllter Instrumente in umgekehrter Lage einige Male, dass die kurze Röhre, die nach oben zu keinen Anschlag hat und nur durch die Reibung des umpressten Leders in ihrer Fassung gehalten wird, bei Verminderung dieser Reibung in Folge Austrocknens des letzteren durch den Quecksilberdruck herausgedrängt wurde und so eine Entleerung des Barometers ohne Bruch erfolgte. Zur Verhinderung dessen liess ich in der Röhre über dem Hahne kurze verschiebbare Röhrchen mit Boden anbringen, welche nach erfolgter Zusammensetzung des Barometers gegen den Hahn geschoben und dann von aussen durch zwei seitliche Schrauben geklemmt werden.

Das Instrument zeigte aber noch einen anderen principiellen Uebelstand, der nur bei sehr exacter technischer Ausführung, wie sie zufällig bei den zuerst von mir untersuchten Exemplaren Nr. 0 und 1 (siehe die frühere Abhandlung S. 394) bestand, im Allgemeinen aber nicht erwartet werden darf und auch wirklich nicht erfolgte, verschwinden wird, es ist dies die Uebertragung des Anfangspunktes oder eines anderen Punktes der Theilung auf der die eigentliche Barometerröhre umhüllenden Messingröhre zum zweiten kurzen Schenkel des Barometers. Wenn nämlich der untere Theil der getheilten Röhre nicht genau parallel zur Röhren-Achse cylindrisch abgedreht oder die Achse der Schraube, mit der sie auf das Eisengefäss aufgeschraubt wird, ihrer Längsachse nicht parallel ist oder der Doppelring nicht exact gearbeitet ist, so wird nicht bloss jene Uebertragung absolut unrichtig erfolgen, sondern, was viel gewichtiger ist, beim Auseinandernehmen und Wiederzusammensetzen des Instrumentes relativ verschieden sein, wenn dabei, was sehr wahrscheinlich ist, nicht mehr alle Theile genau in dieselbe Lage wie vorher kommen. Ist also nach einer ersten Füllung des Barometers die Gesammtcorrection desselben durch Vergleichung mit einem Normalbarometer bestimmt worden, so muss man riskiren, dass diese Correction eine andere werde, wenn das Instrument, etwa behufs neuer Füllung, ganz zerlegt werden muss. Das ist nun in der That wiederholt bei Instrumenten dieser Art, die zu Inspectionsreisen benutzt wurden und auf der Reise in Folge Herausrutschens der kleinen Röhre oder Zerbrechens der langen neu gefüllt werden mussten, oder auch bloss behufs Reinigung aus einander genommen wurden, geschehen. So hat das Barometer Turettini Nr. 13, das Herr Dohrandt nach Nukuss mitnahm und wieder von dort

zurückbrachte, bloss in Folge einer Zerlegung behufs Reinigung einzelner Theile eine Aenderung seiner Correction von — 0,19 mm vor der Reise zu — 0,44 mm nach der Reise erfahren[1]). Das Barometer Turettini Nr. 15, das von mir im August 1875 (siehe die frühere Abhandlung S. 394) mit dem Normalbarometer des Observatoriums verglichen worden war, wurde, da durch eine Unvorsichtigkeit Luft ins Vacuum eingedrungen war, im Juni 1876 neu gefüllt, darauf von Herrn Rykatschew auf eine Inspectionsreise nach dem Süden mitgenommen, wobei es unterwegs zerbrach und wieder neu gefüllt wurde[2]). Die sorgfältigen Verificationen vor und nach der Reise im physikalischen Centralobservatorium haben für die absoluten Correctionen im Vergleiche zu der früheren folgende Werthe ergeben.

Turettini Nr. 15.

Datum	Absol. Correction mm	Mittl. Abw. mm	Zahl der Vergl.	Beobachter
1875 Aug.	— 0,34	± 0,05	15	Wild u. Mielberg
1876 Juni	— 0,82	± 0,04	17	Wild u. Rykatschew
„ Sept.	— 0,58	± 0,04	20	Rykatschew.

Das Barometer Turettini Nr. 58 endlich wurde im Juni 1877 mit dem Normalbarometer des Centralobservatoriums verglichen, darauf ins Observatorium nach Pawlowsk übergeführt, wo es bis Ende Januar 1878 als Beobachtungsbarometer diente, sodann zu einer neuen Verification ins Centralobservatorium nach St. Peterburg zurückgebracht, wo die Vergleichung im Februar 1878 genau dieselbe Correction ergab. Beim Rücktransport nach Pawlowsk rutschte leider die kurze Röhre heraus und es musste nun in St. Peterburg neu gefüllt und wieder verificirt werden.

Die Resultate der successiven Vergleichungen sind:

Turettini Nr. 58.

Datum	Absol. Correction mm	Mittl. Abw. mm	Zahl der Vergl.	Beobachter
1877 Juni	— 0,03	± 0,03	10	Dohrandt
1878 Febr.	— 0,02	± 0,03	14	Wild
„ „	+ 0,12	± 0,04	20	Dohrandt

1) F. Dohrandt, Bericht über die Inspection meteorologischer Stationen 1874 und 1875 in Jahresbericht des physikalischen Centralobservatoriums für 1875 und 1876. Beilage 2 S. 71.

2) Wild's Repertorium für Meteorologie Bd. 5 Nr. 12.

Die Veränderungen der absoluten Correction durch Auseinandernehmen des Instrumentes können also, wie wir sehen, bis nahe 0,5mm gehen. Zur Verhütung von Missverständnissen füge ich ausdrücklich hinzu, dass in allen diesen Fällen Veränderungen der Correction wegen Luft in der Toricelli'schen Leere ausgeschlossen sind.

Wenn hingegen das neue Heberbarometer als Standbarometer an ein und demselben Orte verbleibt, also keine Veranlassung zum Zerlegen desselben eintritt, da der kurze Schenkel nach Umkehrung des Barometers und Abschrauben des Bodens der Cisterne von dieser aus gereinigt werden kann, so hat der erwähnte Uebelstand weiter keine nachtheiligen Folgen. Eine entsprechende Erfahrung haben wir z. B. am früher schon erwähnten Barometer Turettini Nr. 0 gemacht, das seit 1. Januar 1874 bis jetzt als normales Beobachtungsbarometer im physikalischen Centralobservatorium gedient hat. Folgendes sind nämlich die von Zeit zu Zeit mit Hilfe eines Uebertragungsbarometers nach dem Normalbarometer neu bestimmten absoluten Correctionen desselben:

Turettini Nr. 0.

Datum		Absol. Correction	Mittl. Abw.	Zahl der Vergl.	Beobachter
		mm	mm		
1873	März	— 0,35	± 0,05	13	Mägis
„	April	— 0,37	± 0,06	8	Wild
„	Dec.	— 0,38	± 0,04	20	„
1875	Jan.	— 0,37	± 0,05	20	Wild u. Mielberg
1876	Jan.	— 0,50?	± 0,05	10	Wild u. dej. Beobacht.
„	Juni	— 0,35	± 0,03	10	„ „ „
„	Dec.	— 0,31	± 0,04	8	„ „ „
1877	Juni	— 0,37	± 0,02	10	Trautvetter.

Der ausnahmsweise grosse Werth der Correction vom Januar 1876 beruht sehr wahrscheinlich auf einer Unsicherheit des damals gebrauchten Uebertragungsbarometers, der erst später erkannt wurde. Schliessen wir daher dieses Datum aus, so lässt die Constanz des Barometers während der 5 Jahre nichts zu wünschen übrig.

Nach alledem empfiehlt sich das neue Heberbarometer der Einfachheit seiner Beobachtung und seiner anderen Vorzüge halber wohl als Standbarometer auf meteorologischen Stationen, nicht aber als Reisebarometer. Noch weniger kann es als Controlbarometer oder Uebertragungsbarometer 1. Classe zur sicheren Vergleichung der Baro-

meter 1. Classe entfernter Observatorien dienen, da es dazu zu enge Röhren besitzt, bei welchen die Variabilität der Capillarcorrection noch eine zu grosse Rolle spielt, resp. die hiefür festgesetzte mittlere Fehlergrenze von $\pm$ 0,025^{mm} (siehe meine Abhandlung „Ueber Normalbarometer und ihre Vergleichung"; dieses Repertorium Bd. 14 S. 129 in Bestimmung des Barometerstandes überschritten wird.

Ein solches Control- oder Uebertragungsbarometer 1. Classe hat zu dem Ende nach S. 151 ff. der eben erwähnten Abhandlung folgenden Bedingungen zu genügen:

a) Das Barometerrohr sollte nicht wohl einen geringeren inneren Durchmesser als 12^{mm} haben und darf caeteris paribus bei Heberbarometern etwas enger sein als bei Gefässbarometern, jedenfalls aber ist es nothwendig, dass das Quecksilber vor jeder Beobachtung in beiden Schenkeln des Barometers gehoben werden könne.

b) Die Abseh-Vorrichtnng und ihre Einrichtung soll für beide Quecksilberniveaus homogen sein, weshalb streng genommen nur Heberbarometer zulässig bleiben.

c) Sowohl der Massstab, als die Absehvorrichtung mit Vernier müssen durch solide und exacte Construction die Garantieen grosser Constanz darbieten, während eine Genauigkeit der Ablesung am Vernier bis zu 0,05^{mm} genügend sein dürfte.

d) Das Thermometer muss so angebracht sein, dass es vor allem die mittlere Temperatur des Quecksilbers in der gehobenen Säule möglichst sicher angibt; auch muss namentlich zu Anfang wiederholt seine Nullpunktscorrection neu bestimmt werden.

e) Das Instrument muss für den sicheren Transport in gefülltem Zustande eingerichtet sein, sollte die Prüfung auf das eventuelle Vorhandensein von Luft im Vacuum nach der Arago'schen Methode zulassen und durch die, im Falle eines Bruches der Röhre nothwendige Zerlegung behufs Ersatz und Neufüllung derselben keine Veränderung seiner absoluten Correction erfahren.

Diesen Bedingungen allen kann meines Erachtens nur durch folgendes Constructions-Princip genügt werden. Die beiden Schenkel des 11—12^{mm} weiten Heberbarometers müssen vertical unter einander liegen, so dass ihre Verlängerungen zusammenfallen, und centrisch von der, als Massstab dienenden getheilten Metallröhre umhüllt werden, so dass dieselbe Absehvorrichtung (Schieber mit Ausschnitt und Vernier) auf die Quecksilberkuppe oben und unten ein-

gestellt werden kann. Das Thermometer ist ebenfalls im Innern dieser Metallröhre, wo möglich auch centrisch, anzubringen.

Nachdem so das Constructionsprincip präcisirt war, hielt es nicht sehr schwer, dasselbe auch zu realisiren. Ich habe dies in zweierlei Weise versucht.

Ein erstes Instrument dieser Art hat meinen näheren Angaben gemäss Herr Turettini in Genf (Société genevoise de construction) mit gewohntem Geschick in seiner Werkstätte ausführen lassen. Dasselbe ist auf der Tafel XVI in Fig. 1—4 in $^1/_4$ der natürlichen Grösse dargestellt. Wenige Worte werden genügen, die Zeichnung verständlich zu machen.

Das Gefäss mit Ledersack und der eisernen Scheidewand d zwischen dem oberen und unteren Theil, um das Eindringen von Luft in die Barometerröhre zu erschweren, entsprechen ganz den bezüglichen Theilen des früheren Instrumentes. Dasselbe gilt von der Schraube u zum Nachfüllen von Quecksilber und von der Befestigungsweise der beiden Glasröhren durch gepresste Lederringe im Deckel des Gefässes.

In den Deckel des Eisengefässes sind drei Eisenstangen α, β, γ (Fig. 3) eingeschraubt, welche den Haltern der Glasröhren und des Thermometers, wie Fig. 3 dies anzeigt, zur Stütze dienen. Zunächst ist das die kurze Glasröhre am oberen Ende umfassende und abschliessende Hahnenstück ε, sodann der obere und untere Halter ζ und η des Thermometers, endlich die den erweiterten und centrischen Theil des Barometerrohrs oben und unten umfassenden, mit Kork gefütterten Lager ϑ und $\varkappa$ daran festgeklemmt.

Das eiserne Quecksilbergefäss mit den Glasröhren, dem Thermometer und das diese haltende eiserne Gestell bildet also einen ganz separaten Theil des Instrumentes und könnte nach Füllung und Einsetzung der Barometerröhre (ganz analog wie beim früheren Instrument) für sich als Barometer aufgestellt und benutzt werden, indem man etwa die Niveaudifferenz des Quecksilbers in beiden Schenkeln mit einem Kathetometer ausmessen würde.

Zu dieser Messung der Barometerhöhe dient nun für gewöhnlich das über das eiserne Gestell herunterzuschiebende und am Quecksilbergefäss aufzuschraubende in Millimeter getheilte Messingrohr, dessen Deckel μ einerseits die Suspensionsvorrichtung ν trägt und vermittelst dreier, in die Enden der Eisensäulen hineingehenden Schrauben δ

auch dem oberen Ende des Eisengestells Halt verleiht. Passende, diametral gegenüberstehende Schlitze gestatten die Ablesung des Thermometers und der Quecksilberkuppen. Auf diese wird zu dem Ende der obere Rand des mit einem Vernier versehenen Schiebers $\sigma\sigma$ eingestellt, der zur feineren Bewegung mit der Schraubenmutter ϱ am Rohre festgeklemmt und dann mit der Mutter τ mikrometrisch verschoben wird. Eine längs der Röhre heruntergehende Lamelle und eine dazu passende Nuth im Schieber verhindert die Drehung des letzteren beim Verschieben von unten nach oben, wenn zuerst das untere und darauf das obere Quecksilberniveau zur Messung der Höhendifferenz beider eingestellt wird. Dass hiebei die Ablesungs- und Einstellungsweise, etwa wie beim Kathetometer, oben und unten genau dieselbe und jeder Indexfehler und dergl. ausgeschlossen ist, erhellt hienach ohne weiteres, ebenso, dass bei einer Zerlegung des Instrumentes keine Aenderung der einmal bestimmten Correction erfolgen kann. Ja es kann sogar dieser Einrichtung zufolge, wenn die Theilung auf dem Messingrohre verificirt und das letztere genau als gerader Cylinder abgedreht und geschliffen worden ist, das Instrument bis auf die jedenfalls kleine Capillaritätscorrection zu absoluter Messung des Barometerstandes dienen, da ja der Einfluss der allfällig in der Toricelli'schen Leere noch vorhandenen Luft ebenfalls nach der Arago-schen Methode direct bestimmt werden kann.

Nur für den bequemeren Gebrauch des Instrumentes als Standbarometer ist der in Fig. 2 in der Seitenansicht und in Fig. 4 im Grundriss dargestellte, an einer beliebigen Stelle aufzuklemmende zweite Schieber ω mit Vernier dem Instrumente beigegeben. Nach Einstellung dieses Schiebers z. B. auf den Nullpunkt der Theilung wird das Quecksilber bei der Beobachtung dann jeweilen bis zur Berührung mit seinem Rande im kurzen Schenkel gehoben und darauf oben der Schieber σ eingestellt. Selbstverständlich muss in diesem Falle vermittelst eines Hilfsbarometers die durch die Indexdifferenz beider Schieber bedingte Correction besonders bestimmt werden.

Wie beim früheren Barometer, so ist auch hier nach vollständiger Füllung beider Schenkel mit Quecksilber durch Heben des Sackes das kurze Rohr für den Transport des Instrumentes durch den Stahlhahn abzuschliessen, zu dessen Viereck man mit dem Schlüssel durch die Oeffnung ξ (Fig. 2) im äusseren Rohre gelangt.

In dieser Weise ist das vorliegende Instrument bereits mehrfach von St. Petersburg nach Pawlowsk und von da wieder nach St. Petersburg zu neuer Vergleichung mit dem Normalbarometer des physikalischen Centralobservatoriums transportirt worden, ohne dass es dabei irgend welche Veränderung erfuhr.

Ich habe versucht, das neue Constructionsprincip noch in einer zweiten Weise zur Ausführung zu bringen, zu welcher der kürzlich verstorbene Dr. Geissler in Bonn mit gewohnter Kunstfertigkeit die nicht leicht herzustellenden Glastheile, und Herr Mechanikus Brauer dahier in eben so vollkommener Weise die Metalltheile angefertigt hat. Die letzteren unterscheiden sich nicht wesentlich von denen des eben beschriebenen ersten Instrumentes; statt des Ledersackes hat Herr Brauer im Eisengefäss einen Stempel verwendet; das besondere Eisengestell wurde durch die Form der Glastheile überflüssig, und eben so ermöglichte es die letztere, die getheilte Messingröhre enger zu wählen, so dass sie trotz grösserer Wandstärke einen äusseren Durchmesser von bloss 44^{mm} hat. Die Glastheile haben die in Fig. 5 (ebenfalls in $^1/_4$ der natürlichen Grösse) dargestellte Form. Die eigentliche Barometerröhre und der kurze Schenkel des Barometers sind nämlich fest mit einander verbunden, indem die an die weitere obere Röhre *a* angeschmolzene und seitlich abgebogene engere Verbindungsröhre *bb'* unten bei *a'* durch eine seitliche Oeffnung des kurzen Schenkels *dd'* — von gleicher Weite wie die Barometerkammer oben, innerer Durchmesser $= 12^{mm}$ — in diesen eingeführt, damit verschmolzen und dann längs seiner Achse noch ungefähr 20^{mm} über das Ende *d'* desselben hinaus bis *c* verlängert ist. Der kurze Schenkel *dd'* ist unten bei *d'* offen und oben bei *d* durch den eingeschliffenen Glashahn *h* (mit seitlicher Durchbohrung und Viereck zum Aufstecken eines Schlüssels) verschliessbar. Zur Verstärkung sind die weitern Theile *a* und *d* des Barometerrohres vis-à-vis der Verbindungsröhre *b* noch durch einen angeschmolzenen Glasstab *gg'* verbunden. Zwischen diesem Glasstabe und der Glasröhre ist ungefähr bei *t* das Thermometer centrisch mit *a* und *d* angebracht. Es wird durch zwei Korkscheiben gehalten, welche ihrerseits mit zwei anderen bei *bg* über den oberen und bei *dh* über den unteren erweiterten Theil des Barometerrohrs geschobenen Korken durch Messingstäbchen fest verbunden sind. Der Kork bei *dh* verhindert zugleich das Herausrutschen des Hahnes *h*. Diese Korke alle entsprechen in ihrem äusseren Umfange dem inneren Durch-

messer der getheilten Messingröhre und geben also zugleich dem Barometerrohr in dieser seinen Halt. Dasselbe stützt sich ausserdem noch gegen einen Kork im Deckel der letzteren und ist mit dem unteren offenen Ende *d'* des kurzen Schenkels in die entsprechende Tubulatur des Eisengefässes quecksilberdicht durch umgepresste Lederringe eingesetzt.

Durch diese Construction ist also der Vortheil einer einzigen centralen Tubulatur im Eisengefäss erzielt und damit zugleich auch die Möglichkeit einer grösseren Annäherung der excentrischen Verbindungsröhre an den kurzen Schenkel des Barometers geboten, wodurch wieder die centrisch umhüllende Massröhre in ihrem Durchmesser eine wünschenswerthe Beschränkung erfahren kann. Abgesehen nämlich von der dadurch bedingten Verminderung des Gewichtes und Volumens des Instrumentes ist ein nicht allzugrosser Durchmesser des Massrohres auch deshalb erforderlich, weil sonst das gleichzeitige scharfe Erkennen von vorderem und hinterem Rande des Visirringes bei der Einstellung auf die Quecksilberkuppe erschwert und damit die Genauigkeit der letzteren vermindert wird.

Dagegen besitzt diese zweite Constructionsweise den Nachtheil einer schwierigen Herstellung der Glasröhrencombination und einer grösseren Zerbrechlichkeit der letzteren. Von drei, durch Herrn Dr. Geissler angefertigten und glücklich hier angelangten Exemplaren desselben haben nach einiger Zeit zwei bei ruhigem Liegen in einem Schranke von selbst, wahrscheinlich wegen ungleicher Ausdehnung der verbindenden Röhre *b* und des Glasstabes *g*, Risse (die eine bei *b*, die andere bei *g*) erhalten. Dem letzteren Umstande könnte allerdings dadurch abgeholfen werden, dass der Glasstab nur unten angeschmolzen würde und oben bloss mit einer angekitteten Metallklammer die weite Röhre umfasste und stützte.

Herr Ch. F. Geissler in Berlin, dem ich seiner Zeit bei seiner Anwesenheit in St. Petersburg das neue Constructionsprincip ebenfalls mittheilte, hat dasselbe nach eigenen Ideen analog wie das zweitbeschriebene von mir zur Ausführung gebracht. Um dem Instrument eine noch schlankere Gestalt geben zu können, hat er den stützenden Glasstab ganz weggelassen, durch das gläserne Thermometer eine zweite verstärkende Verbindung zwischen den erweiterten Theilen der Barometerröhre oben und unten hergestellt und sodann die letztere in der umhüllenden Messing-Massröhre excentrisch angebracht. In

Folge davon wurde der äussere Durchmesser der letzten allerdings auf 32 mm heruntergebracht, leider aber auf Kosten der Genauigkeit der Messungen. Wie sich nämlich bei längere Zeit fortgesetzten Beobachtungen an einem von Herrn Geissler im Herbste 1876 hieher gebrachten Instrumente dieser Art ergab, beeinträchtigt die excentrische Stellung der Glasröhre zur Messingröhre sehr die Sicherheit der Einstellung, indem in Folge dessen je nur die eine Hälfte der Quecksilberkuppe sichtbar bleibt. Man wird sich also durchaus an eine Constructionsweise mit centrischer Stellung der Barometerröhre zu halten haben, wenn auch dadurch der Durchmesser des Instrumentes etwas grösser wird.

Die Erfahrungen an den beiden ersten ausgeführten Instrumenten haben mir im Uebrigen gezeigt, dass die durch das neue Constructionsprincip angestrebten Vortheile in der That erreicht worden sind und dass wir so in den Besitz zuverlässiger und unveränderlicher Controlbarometer gelangen können[1]).

---

1) Während des Druckes dieses Aufsatzes ist mir von Herrn Mechaniker R. Fuess (vorm. J. G. Greiner jun. und Geissler) in Berlin ein, auf meine Einladung hin von ihm nach dem neuen Constructionsprincip angefertigtes Stationsbarometer (mit bloss 8 mm weiter Röhre) zur Einsicht zugeschickt worden, bei dem durch eine noch andere Art der Glasconstruction in kleinem Raum und mit bloss einer centralen Tubulatur im Eisengefässe den Bedingungen des Constructionsprincips Genüge geleistet ist. Das in jeder Hinsicht vorzüglich ausgeführte Instrument lässt sich auch leicht füllen und zusammensetzen und dürfte daher, wenn die etwas complicirte Glasconstruction sich bei weiterer Erfahrung nicht als ein Hinderniss herausstellen wird, das Stations- und Reisebarometer der Zukunft werden.

Beobachtungen über die elastische Nachwirkung am Glase.

Von

Ignaz Klemenčič,

Assistenten am physikalischen Institute zu Graz.

(Hiezu Tafel XVI Fig. 6–8.)

(Aus den Wiener Sitzungsberichten vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Die bisherigen Untersuchungen über die elastische Nachwirkung beziehen sich auf Coconfäden (W. Weber, Pogg. A. Bd. 34), Glas, Messing, Silber (Kohlrausch, Pogg. A. Bd. 119, 128, 158) und Kautschuk (Kohlrausch l. c. und Neesen, Pogg. A. Bd. 158). Die Untersuchungen erstreckten sich zumeist auf eine Art der Deformationen, nur am Kautschuk sind von Kohlrausch Messungen, sowohl über Dehnungs-, als auch Torsionsnachwirkungen, jedoch nicht an einem und demselben Objecte angestellt worden. Für die Verificirung einer Theorie der elastischen Nachwirkung sind jedoch Messungen über verschiedenartige Nachwirkungen, an einem und demselben Objecte ausgeführt, gewiss nicht ohne Interesse. Ich suchte dies dadurch zu erreichen, dass ich beim Glase die Stabform zur Untersuchung wählte, da die bisher übliche Drahtform nur bei der Torsion eine beobachtbare Nachwirkung liefert. Die Stabform erlaubt bei einer passenden Beobachtungsmethode Messungen über Torsions- und Biegungsnachwirkungen. Im Nachfolgenden werden einige solche an einem langen Glasstabe ausgeführte Messungen mitgetheilt.

Noch ein Umstand ist bei der Untersuchung der Körper bezüglich der elastischen Nachwirkung zu berücksichtigen. Bereits W. Weber (l. c.) hat auf die Möglichkeit einer Erklärung der Dämpfung der Schwingungen fester Körper durch die elastische Nachwirkung hingewiesen, und seitdem hat dieser Gedanke überall festen Boden gefasst. Ich bestimmte daher auch das logarithmische Decrement der Schwingungen des Glasstabes.

Einige Messungen an einem Glasfaden bezüglich der Torsionsnachwirkung und des logarithmischen Decrements erlaube ich mir am Schlusse mitzutheilen.

Die von der Untersuchung gelieferten Daten über die Nachwirkung rechnete ich nach der von Kohlrausch aufgestellten Formel:

$$y = Ce^{-at^m}.$$

Die gerechneten Werthe stimmten mit den beobachteten in den meisten Fällen sehr gut überein.

Bisher ist das Glas nur von Kohlrausch (l. c.) und Boltzmann (Nachtrag zu seiner Theorie der elastischen Nachwirkung, Wiener Sitzungsber. Bd. 70) untersucht worden. Am Schlusse seiner Abhandlung: „Ueber die elastische Nachwirkung“ (Pogg. A. Bd. 157), spricht auch Neesen von Versuchen mit einem Glasfaden; Ausführliches darüber ist jedoch meines Wissens nicht veröffentlicht worden.

Die Anregung zu dieser Arbeit, sowie die Angabe der unten beschriebenen Beobachtungsmethode, bekam ich vom Herrn Dir. Boltzmann, dem ich dafür, sowie für die vielen Rathschläge während der Arbeit meinen besten Dank ausspreche.

Beschreibung des Apparates und der Beobachtungsmethode.

In einer Zimmerecke war $2^1/_2$ m hoch über dem Boden ein sehr solider eiserner Träger eingemauert, der vorn eine mittelst Schrauben anzuziehende Klemme trug. Das eine Ende des zu untersuchenden Glasstabes wurde mittelst Siegellack in eine Messingfassung eingekittet und diese letztere in der Klemme befestigt, nachdem der Stab früher mittelst eines Senkels vertical gestellt worden war. Nahe am zweiten Ende des Glasstabes wurde ebenfalls mittelst Siegellack ein in der Mitte senkrecht zu seiner Achse durchbohrtes Messingprisma von 23 mm Länge, 9 mm Breite und 11 mm Höhe (Gewicht = 29,7 gr) aufgekittet, welches zur Vermittlung einer festen Verbindung zwischen einem eisernen Hebel und dem Glasstabe diente. Der Hebel bestand aus einer 430 mm langen, 14,5 mm breiten und 4 mm dicken Eisenschiene (Gewicht = 257,5 gr), welche in ihrer Mitte auf das früher erwähnte Prisma mittelst Schrauben befestigt werden konnte, so dass eine feste Verbindung zwischen dem Hebel und dem Messingprisma hergestellt war. An dem einen Arme des Hebels war in einer Entfernung = 190,7 mm von der Mitte des Glasstabes eine auf Glas geritzte Scala angebracht.

(Eine Auswerthung dieser auf einer Theilmaschine angefertigten Scala mittelst eines Schraubenmikroskopes ergab für die mittlere Entfernung zweier Theilstriche den Werth 0,0766^{mm}. Jeder zehnte Theilstrich war durch eine Ziffer bezeichnet.) Auf diese mittelst eines hinten aufgestellten Spiegels vom Tageslichte beleuchtete Scala wurde ein Mikroskop von 61facher Vergrösserung eingestellt. Eine stärkere Vergrösserung erwies sich als unvortheilhaft, da man bei einer solchen die einzelnen Theilstriche und die Ziffern nicht gleichzeitig sehen konnte.

Im Verlaufe der Beobachtungen zeigte sich das Siegellack als kein gutes Kittungsmaterial, da es namentlich bei stärkeren Torsionen zuweilen sprang und so die feste Verbindung zwischen den Messingstücken und dem Glasstabe lockerte. Um nun in einem solchen Falle einerseits den Ort des Sprunges, ob oben oder unten, ausfindig zu machen und andererseits die Gewissheit zu gewinnen, dass das obere Stabende bei der Torsion oder Biegung keine dauernden Verschiebungen annahm, wurde auch oben unter der Messingfassung an den Glasstab ein Holzstäbchen gekittet, welches eine ebenfalls mittelst eines Spiegels beleuchtete auf Glas geritzte Scala trug: auf diese wurde wie unten ein Mikroskop eingestellt. Sowohl das untere als das obere Mikroskop waren an in die Wand eingemauerten Eisenstäben befestigt. Damit der Stab bei der Ertheilung der Torsion nicht seitliche Verschiebungen erhielt, wurde das untere Ende desselben in ein Führungsloch gebracht, welches in einen an einer verticalen Messingsäule befestigten Holzstab gebohrt und so weit war, dass es die freie Beweglichkeit des untordirten Glasstabes in keiner Weise hinderte. Das Führungsloch bildete zugleich das Centrum eines an demselben Holzstabe befestigten, von fünf zu fünf Graden getheilten horizontalen Kreises. Als Index für die Grösse der gegebenen Torsion spielte über dieser Kreistheilung ein am Glasstabe befestigter Zeiger. Die Ertheilung der Torsion geschah durch Drehung des Hebels; um dieselbe einige Zeit hindurch constant zu erhalten, wurde das Zurückgehen des Hebels durch das Vorschieben eines Anschlagstiftes verhindert.

Für die Biegungsbeobachtungen blieb der Apparat oben ebenso wie bei den Torsionsbeobachtungen; unten jedoch wurde der Hebel weggenommen und die Scala direct an das Messingprisma parallel der Biegungsebene und senkrecht auf den Glasstab befestigt, und das Mikroskop darauf eingestellt. Natürlich wurde auch der Stab mit dem Führungsloche und dem Theilkreise entfernt. Nun wurde zwischen

der früher erwähnten Messingsäule und der Zimmerecke eine ziemlich starke hölzerne Leiste horizontal und ganz nahe am Glasstabe angebracht. An dieser befanden sich zwei Stifte, die zur Fixirung der dem Stabe ertheilten Biegung dienten.

Neben dem Glasstabe hing ein Thermometer.

Der Vorgang bei den Torsionsbeobachtungen war folgender: Jedesmal vor Beginn der Torsion wurde die Temperatur abgelesen und die Ruhelage an der Scala oben und unten bestimmt; sodann wurde eine Secunde vor Beginn der als Torsionsdauer gerechneten Zeit der Hebel erfasst, in die tordirte Lage gebracht und fixirt. Dieses letztere erforderte eine Zeit von 1—2 Secunden. Eine Secunde vor Ablauf der Torsionsdauer wurde der Hebel wieder erfasst und in die Ruhelage zurückgeführt. Dies erforderte ebenfalls eine Zeit von 1—2 Secunden[1]). Natürlich pendelte der Stab noch um seine Ruhelage und musste mit der Hand erst sorgfältig beruhigt werden. Dies gelang auch gewöhnlich insoweit, dass man bereits $^1/_2$ Minute nach dem Aufhören der Torsion mit dem Beobachten beginnen konnte. Es war der Stab auch da noch nicht ganz ruhig; es konnte jedoch die Ruhelage für eine gewisse Zeit aus zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten leicht bestimmt werden. Die Umkehrpunkte wurden so erfasst, dass einer vor, der andere hinter die angegebene Zeit fiel. Die Schwingungsdauer des Stabes betrug weniger als eine Secunde. Die bei dieser Art der Ruhelagenbestimmung gemachten Fehler sind daher nicht einmal in den ersten Zeiten von Belang.

Bei der Beobachtung konnten Zehntel eines Scalentheiles ganz gut geschätzt werden.

Für die Beobachtung der Biegungnachwirkungen gilt dasselbe, nur dass der Stab in diesem Falle an seinem unteren Ende erfasst und in die gebogene Lage gebracht wurde.

Einige Bemerkungen über den Einfluss der Temperatur.

Den bedeutenden Einfluss der Temperatur auf die elastische Nachwirkung hat Kohlrausch zuerst beobachtet und bei einer näheren Untersuchung denselben für einen Silberdraht innerhalb der Grenzen + 3,5 bis + 22,5° proportional der Temperatur selbst gefunden. Auch beim Glase zeigte sich dieser Einfluss in sehr merklicher Weise; ich konnte mich jedoch auf eine nähere Untersuchung desselben nicht

1) Die Zeitbestimmung geschah mittelst einer Uhr mit springendem Secundenzeiger.

einlassen, da ich mir nicht längere Zeit hindurch beliebige constante Temperaturen herstellen konnte. Um nun die Resultate der einzelnen Beobachtungsreihen unter einander vergleichen zu können, suchte ich das Gesetz für den Temperatureinfluss wenigstens innerhalb der durch die normalen äusseren Einflüsse bedingten Temperaturschwankungen zu bestimmen. Es stellte sich die elastische Nachwirkung beim Glase innerhalb der Grenzen $+15^0$ bis $+24^0$ mit der Temperatur proportional steigend heraus. Im Uebrigen bewegten sich die während der einzelnen Beobachtungen herrschenden Temperaturen zum grössten Theile innerhalb der Grenzen $+19^0$ bis $+21^0$, so dass es um so mehr erlaubt schien, das arithmetische Mittel der Resultate als dem arithmetischen Mittel der Temperaturen entsprechend anzunehmen.

Da auch eine Aenderung der Temperatur während der Beobachtung auf den Verlauf der elastischen Nachwirkung von Finfluss ist, so wurde immer zu einer Zeit beobachtet, während der die Temperatur durch einige Stunden ziemlich constant blieb.

Eine Erhöhung der Temperatur während der Beobachtung konnte auch insoferne im Resultate einen Fehler zur Folge haben, als sich die Eisenstange, an der das Mikroskop befestigt war, ausdehnte und die Einstellung des Mikroskops änderte. Dieser Fehler konnte sich jedoch erst bei einer Temperaturänderung von $1{,}5^0$ in den Zehnteln des Resultats bemerkbar machen.

Der Stab war, wie früher erwähnt, mittelst Siegellack in Messingstücke eingekittet. Bei stärkeren Deformationen ereignete es sich zuweilen, dass das Siegellack kleine Risse bekam; um dann wieder eine feste Verbindung des Stabes und der Messingfassung herzustellen, musste die betreffende Stelle mässig erwärmt werden. Natürlich konnte mit dem Beobachten erst bei vollständiger Abkühlung wieder begonnen werden, dann zeigte der Stab aber jedesmal eine grössere Nachwirkung für einen bestimmten Fall, als vor dem Erwärmen. Diese grössere elastische Nachwirkung verminderte sich jedoch langsam und kam in einigen Tagen wieder auf den normalen Werth. Es ist selbstverständlich, dass in den Resultaten nur solche Messungen enthalten sind, die den normalen Werthen der elastischen Nachwirkung entsprechen.

Torsionsnachwirkungen.

Die Länge des untersuchten Glasstabes von der oberen Messingfassung bis zum Messingprisma betrug 1318^{mm}; der Durchmesser des-

selben war im Mittel = 3,83 mm. Der Stab war sehr gut cylindrisch, denn sein grösster Durchmesser hatte den Werth 3,85 mm und sein kleinster den Werth 3,82 mm. Vor Beginn der Untersuchung wurde der Stab einige Male um einen grösseren als die späteren Torsionswinkel hin und her gedreht; nichtsdestoweniger zeigte er anfänglich einen von der Erwärmung der Kittungsstellen herrührenden, höheren, allmählich erst constant werdenden Werth der elastischen Nachwirkung.

Die Nachwirkung verschwand, je nach der Dauer und Stärke der Torsion, früher oder später vollständig, sobald man mit der nachfolgenden Beobachtung genügend lange gewartet hat; zuweilen jedoch wurde mit einer neuen Beobachtung begonnen, wenn noch von der früheren Deformation eine kleine Nachwirkung vorhanden war, jedoch nur in einem solchen Falle, wo sich innerhalb des Zeitraumes der zweiten Beobachtung die von der vorhergehenden herrührende Nachwirkung nicht um so viel vermindern konnte, dass dies auf das Resultat von Einfluss gewesen wäre.

Die einzelnen Daten in den unten angeführten Tabellen sind das Mittel aus je sechs Beobachtungen und beziehen sich auf eine Temperatur von 20° C. Es konnten nämlich für die einzelnen der sechs Beobachtungen immer solche Temperaturen gewählt werden, dass das Mittel derselben nahezu 20° ergab. Die Abweichungen davon betrugen weniger als ein Zehntel eines Grades.

Die erhaltenen Resultate suchte ich nach den für die elastische Nachwirkung bereits aufgestellten Formeln zu rechnen; dabei erwies sich als die beste die schon erwähnte von Kohlrausch aufgestellte Formel. Sie gibt den zur Zeit t nach dem Aufhören der Torsion noch vorhandenen Abstand y von der Ruhelage als Function dieser Zeit und enthält drei Constante m, a und C.

In den unten vorkommenden Tabellen bedeutet φ den Torsionswinkel, T die Torsionsdauer, t die Beobachtungszeit in Minuten vom Zeitpunkte des Aufhörens der Torsion an gerechnet. Unter y beob. ger. sind die beobachteten und gerechneten Abstände von der Ruhelage in Scalentheilen angegeben. (Werth eines Scalentheiles im Winkelm. = 1,38 Min.) Jeder Reihe sind unten die zur Rechnung benützten Werthe der Constanten a, m und C beigefügt. Die Bestimmung von m geschah aus je drei Drillingen von y, nämlich aus den für $1/2$, 3 und 7, 1, 4 und 10, endlich 2, 5 und 15 Minuten. Die

beiden anderen Constanten wurden mit Hilfe des so gerechneten *m* nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgewerthet.

Tabelle I.

$T = 4$ Min.

t Min.	$\varphi = 55^0$		$\varphi = 45^0$		$\varphi = 35^0$		$\varphi = 25^0$	
	y		y		y		y	
	beob.	ger.	beob.	ger.	beob.	ger.	beob.	ger.
½	16,15	16,06	13,48	13,41	10,58	10,64	7,54	7,77
1	12,16	12,15	10,16	10,12	8,07	7,85	5,74	5,65
2	8,73	8,74	7,29	7,29	5,64	5,53	4,02	3,97
3	7,06	7,02	5,92	5,88	4,4	4,4	3,22	3,16
4	5,95	5,93	4,97	4,98	3,72	3,70	2,68	2,67
5	5,13	5,16	4,31	4,36	3,18	3,21	2,31	2,33
7	4,04	4,06	3,44	3,51	2,58	2,56	1,9	1,88
10	3,17	3,18	2,75	2,74	2,00	2,03	1,46	1,48
15	2,35	2,31	2,01	2,02	1,43	1,45	1,1	1,1
20	1,88	—	1,64	1,60	1,15	1,14	—	—
30	1,42	—	—	—	—	—	—	—

	$\varphi = 55^0$	$\varphi = 45^0$	$\varphi = 35^0$	$\varphi = 25^0$
$m =$	0,238	0,216	0,2	0,156
$a =$	1,835	2,027	2,351	3,102
$C =$	76,095	76,782	82,393	125,655.

Tabelle II.

$T = 2$ Min.

t Min.	$\varphi = 55^0$		$\varphi = 45^0$		$\varphi = 35^0$	
	y		y		y	
	beob.	ger.	beob.	ger.	beob.	ger.
½	12,04	12,13	9,62	9,87	7,7	7,9
1	8,58	8,46	6,95	6,77	5,37	5,37
2	5,7	5,68	4,67	4,5	3,57	3,5
3	4,42	4,41	3,63	3,5	2,68	2,62
4	3,62	3,65	2,88	2,9	2,18	2,2
5	3,1	3,14	2,51	2,51	1,86	1,88
7	2,42	2,48	1,99	1,99	1,47	1,47
10	1,89	1,9	1,49	1,54	1,1	1,12
15	1,34	1,38	1,11	1,14		
20	1,13	1,09				

	$\varphi = 55^0$	$\varphi = 45^0$	$\varphi = 35^0$
$m =$	0,144	0,107	0,12
$a =$	3,797	5,289	4,915
$C =$	376,79	1340,6	730,86.

Tabelle III.

$T = 1$ Min.

t	$\varphi = 55^0$	
	y	
	beob.	ger.
½	8,05	8,06
1	5,18	5,18
2	3,26	3,19
3	2,37	2,36
4	1,82	1,89
5	1,54	1,58
7	1,24	1,20
10	0,91	
15	0,65	

$m =$ 0,12

$a =$ 5,5655

$C =$ 1350,9.

Tabelle I und II geben die Nachwirkung in ihrer Abhängigkeit von der Grösse des Torsionswinkels. Die Constante m fällt, a und C steigen mit abnehmendem Torsionswinkel; eine Gesetzmässigkeit lässt sich nicht erkennen. In Tabelle II erscheint m für 35^0 grösser als für 45^0; dies rührt daher, dass ich für alle jene Beobachtungsreihen, wo die Angaben nicht bis zu 15 Min. hinaufreichten, für m einen gleichen Werth 0,12 annahm. Dieses gilt auch für die unten folgenden Biegungsbeobachtungen. Rechnet man für $\varphi = 55^0$ und $T = 1$ Min. mit Zuhilfenahme der unter 1 reichenden Werthe für 10 und 15 Min. die Constante m, so bekommt man für dieselbe den Werth 0,0325 und sodann $C = 24672 \times 16^6$.

Die elastische Nachwirkung ist dem Torsionswinkel einfach proportional; denn dividirt man die den einzelnen Torsionswinkeln entsprechenden Nachwirkungen durch den Torsionswinkel oder eine ihm proportionale Grösse, also respective durch 11, 9, 7 und 5, so bekommt man für jede Zeit t einen nahezu constanten Quotienten, wie dies aus Tabelle IV ersichtlich ist.

Tabelle IV.

t Min.	$\varphi = 55^0$	$\varphi = 45^0$	$\varphi = 35^0$	$\varphi = 25^0$	Mittel
	$\frac{y}{11}$	$\frac{y}{9}$	$\frac{y}{7}$	$\frac{y}{5}$	
$^1/_2$	1,468	1,497	1,511	1,508	1,496
1	1,105	1,129	1,153	1,148	1,134
2	0,793	0,810	0,806	0,804	0,803
3	0,642	0,657	0,630	0,644	0,643
4	0,541	0,552	0,531	0,536	0,540
5	0,466	0,479	0,454	0,462	0,465
7	0,358	0,382	0,369	0,380	0,372
10	0,288	0,305	0,286	0,292	0,293
15	0,213	0,223	0,204	0,220	0,215
20	0,171	0,182	0,164		0,172

An einigen Beobachtungsreihen suchte ich auch die zweite von Kohlrausch angegebene Formel $y = \frac{c}{t^a}$ anzuwenden; sie gab jedoch in keinem Falle ein so befriedigendes Resultat wie die erste.

Biegungsnachwirkungen.

Es wurde bei zwei verschiedenen Biegungen beobachtet. Bei der grösseren betrug der horizontale Abstand, um den der Stab aus seiner

Ruhelage gebracht wurde, gemessen in einer Enfernung = 1248 mm von der oberen Messingfassung, 137,4 bei der kleineren 69,7 mm.

Die Nachwirkungen wurden in diesem Falle von der Schwere des Glasstabes und des Messingprismas beeinflusst. Auch bei der Biegung zeigte der Stab anfänglich eine grössere Nachwirkung, trotzdem er vor Beginn der Beobachtungen mehrmals stärker als später hin und her gebogen wurde. Die Beruhigung der Schwingungen nach dem Aufhören der Biegung gelang gewöhnlich so gut, dass man schon nach $^1/_4$ Min. mit dem Beobachten beginnen konnte.

Die in den Tabellen angeführten Daten beziehen sich auf die Anzahl der Scalentheile, um die der Stab zur betreffenden Zeit von der Ruhelage entfernt war. Um diesen Abstand in Millimetern zu bekommen, muss man also die Zahlen mit 0,0766 multipliciren. Die Daten beziehen sich ferner auf 20° C. und sind das Mittel aus je sechs Beobachtungen. Tabelle V gibt die der grösseren, Tabelle VI die der kleineren Biegung entsprechende Nachwirkung. Im Uebrigen gilt dasselbe wie für die Torsion.

Tabelle V.

t Min.	$T = 16$ Min.		$T = 8$ Min.		$T = 4$ Min.		$T = 2$ Min.		$T = 1$ Min.	
	y		*y*		*y*		*y*		*y*	
	beob.	ger.	beob.	ger.	beob.	ger.	beob.	ger.	beob.	ger.
$^1/_4$	15,75	15,35	12,92	13,14	10,36	10,52	7,97	8,49	5,74	5,75
$^1/_2$	13,43	13,18	10,53	10,62	8,21	8,11	5,93	5,96	3,92	3,87
1	10,91	10,85	8,32	8,26	6,11	6	4,15	4,05	2,56	2,51
2	8,65	8,64	6,27	6,16	4,37	4,24	2,78	2,67	1,56	1,57
3	7,35	7,40	5,09	5,07	3,43	3,38	2,07	2,06	1,16	1,17
4	6,5	6,56	4,39	4,37	2,85	2,85	1,69	1,69		
5	5,89	5,94	3,87	3,88	2,46	2,49	1,45	1,45		
7	4,97	5,06	3,22	3,17	1,94	1,97				
10	4,08	4,19	2,53	2,53	1,48	1,53				
15	3,19	3,31	1,92	1,91	1,12	1,12				
20	2,71	2,75	1,5	1,54						
30	2,07	2,07								
50	1,47	1,38								

$m =$ 0,266   0,229   0,204   0,12   0,12
$a =$ 1,1257   1,706   2,28   4,824   5,412
$C =$ 33,428   45,507   58,692   504,84   562,47

Tabelle VI.

t Min.	$T = 16$ Min.		$T = 8$ Min.	
	y		y	
	beob.	ger.	beob.	ger.
1/4	8,01	8,04	6,69	6,76
1/2	6,81	6,87	5,59	5,61
1	5,63	5,68	4,59	4,48
2	4,6	4,51	3,41	3,41
3	3,9	3,86	2,84	2,83
4	3,42	3,41	2,43	2,45
5	3,07	3,08	2,17	2,17
7	2,61	2,61	1,76	1,78
10	2,17	2,15	1,43	1,42
15	1,69	1,68	1,03	1,06
20	1,37	1,39		
30	1,01			

$m =$ 0,277 0,277
$a =$ 1,088 1,289
$C =$ 16,874 16,262.

Das Verhältniss der Verbiegungen ist gleich 1,971. Bildet man sich die Verhältnisse der Nachwirkungen für die gleiche Dauer und Beobachtungszeit, aber bei verschiedener Verbiegung, so liegen dieselben sämmtlich unter dem Werthe 1,971.

Bestimmung des logarithmischen Decrements.

Zur Beobachtung der Schwingungen des Glasstabes wurde an das Messingprisma ein langer Holzhebel mittelst Schrauben befestigt. An die Enden des Hebels wurden Bleikugeln von 61^{mm} Durchmesser und je 1310^{gr} Gewicht aufgesteckt. Die Entfernung der Mittelpunkte der Kugeln betrug 661^{mm}. Der Hebel war cylindrisch (Durchmesser $= 14^{mm}$), nur in der Mitte hatte er zur leichteren Verbindung mit dem Messingprisma eine prismatische Verstärkung; sein Gewicht sammt den Schrauben war $= 99^{gr}$. Es wurde beachtet, dass nach hergestellter Verbindung die Mittelpunkte der beiden Kugeln mit der Mitte des Glasstabes in eine Gerade fielen.

Da sich die Zimmerecke, in der bisher beobachtet wurde, für den langen Hebel als zu schmal erwies, so wurde der Stab vom Träger heruntergenommen und an einem anderen in der Mitte des Zimmers auf einem Grundpfeiler errichteten, ebenfalls sehr soliden

Träger aufgehängt. Natürlich wurde er vor dem Anbringen des Hebels mit den Bleikugeln vertical gestellt.

Neben dem Stabe war ein Thermometer aufgehängt. Es wurde nur dann beobachtet, wenn die Temperatur bereits durch einige Zeit hindurch constant war.

Die Bestimmung des logarithmischen Decrements λ geschah als Mittel aus je sechs aufeinanderfolgenden, um 40 Schwingungen auseinanderliegenden Ablesungen, die mit Fernrohr, Spiegel und Scala gemacht wurden. Der Spiegel war ganz nahe am Glasstabe mit Klebwachs befestigt und hatte eine rechteckige Gestalt von 32 und 27^{mm} Seite. Die Scala war in Millimeter getheilt, ihre Entfernung vom Spiegel $= 1680^{mm}$. Die Schwingungsdauer des Stabes betrug 2,651 Secunden.

Zu Beginn der Beobachtungen überraschte die Thatsache, dass das logarithmische Decrement nicht nur grösser war als bei anderen untersuchten Glasstäben, sondern dass es auch mit abnehmender Amplitude ganz bedeutend zunahm. Die Vermuthung, dass dies in einem durch das Anhängen des schweren Gewichtes bewirkten Risse des Siegellacks seinen Grund hätte, fand ihre volle Bestätigung, nachdem durch ein mässiges Erhitzen der Kittungsstellen und neuerliches sorgfältiges Anhängen der Gewichte die frühere Störung vollkommen behoben wurde.

Die Beobachtungen mögen hier in ihrer chronologischen Aufeinanderfolge wiedergegeben werden. Unter M. Schw. ist die mittlere Schwingungsweite in Scalentheilen zu verstehen, wie sie sich ergibt, wenn man in der betreffenden Beobachtungsreihe aus dem ersten und sechsundvierzigsten Ausschlage das Mittel nimmt.

Beob. 7. 5. Temp. = 20,1. Die Kittungsstellen wurden erwärmt, nach vollständiger Abkühlung gleich beobachtet.

M. Schw. = 309, λ = 0,002807,
„ 439, „ 15.

Beob. 10. 5. 10—12^h v/m. Temp. = 19,5.

M. Schw. = 734, λ = 0,002733,
„ 462, „ 35,
„ 258, „ 26,
„ 160, „ 26.

Beob. 13. 5. 11—12^h v/m. Temp. = 18,8.

M. Schw. = 741, λ = 0,002704,
„ 435, „ 13,
„ 184, „ 00,
„ 74,5, „ 04.

Beob. 14. 5. 11—12^h v/m. Temp. = 20,3.

M. Schw. = 597, λ = 0,002762,
„ 390, „ 78,
„ 227, „ 73,
„ 140, „ 69.

Beob. 14. 5. 3^h n/m. Temp. = 19,7.

M. Schw. = 552, λ = 0,002736,
„ 401, „ 36,
„ 281, „ 46,
„ 178, „ 39.

Mit Ausnahme der Beobachtung am ersten Tage variiren die übrigen nur unter dem Einflusse der gewöhnlichen Temperaturschwankungen. Am ersten Tage war die Beobachtung noch von der vorhergegangenen Erwärmung der Kittungsstellen beeinflusst und ergab daher ein höheres logarithmisches Decrement. Zur Ueberzeugung, dass eine Erwärmung wirklich ein erhöhtes logarithmisches Decrement zurücklässt, untersuchte ich einen anderen Glasstab. Nachdem das logarithmische Decrement desselben constant = 0,002427 gefunden worden war, erwärmte ich ihn mässig seiner ganzen Länge nach mit einem Bunsen'schen Brenner. Nach vollständiger Abkühlung ergab die Beobachtung $\lambda = 0{,}002651$; dieses sank jedoch nach 4 Tagen wieder auf den ursprünglichen Werth zurück.

Nimmt man hier ebenso wie bei der elastischen Nachwirkung zwischen der Temperatur und dem logarithmischen Decrement die Proportionalität an, so ergibt sich aus den Beobachtungen vom 14. 5. für dasselbe einen Mittelwerth

$$\lambda = 0{,}002755,$$

in welchem jedoch noch die vom Luftwiderstande herrührende Dämpfung enthalten ist.

Beobachtungen an einem Glasfaden.

Beschreibung des Apparates.

Der Deckel eines würfelförmigen (400^{mm} Seite) Kastens aus Zinkblech trug ein 1250^{mm} langes und 40^{mm} weites Glasrohr, an dessen

oberes Ende eine Messingfassung aufgekittet war; in diese war ein durchbohrter Konus eingesetzt. In die Durchbohrung wurde ein zu einem Glasfaden ausgezogener Glasstab eingekittet. In der Mitte des Kastens war der Faden abgebrochen und an das Ende eine Kupferkugel *K* (Fig. 6 und 7 Taf. XVI) von 374,7^{gr} Gewicht und 43,5^{mm} Durchmesser mit etwas Siegellack befestigt. Der Befestigungsstelle diametral gegenüber liegend war in die Kugel ein T-förmiger Messingdraht *A A* eingeschraubt. Die Beobachtungen geschahen mit Fernrohr, Spiegel und Scala, daher war in die Kugel auch ein kleiner quadratischer Spiegel *s* von 6^{mm} Seite eingesetzt. Am Boden des Kastens war ein eiserner Bügel *B B* befestigt, der an seinem horizontalen Theile ein Führungsloch für eine Achse *S* hatte, die sich mit dem einen Ende gegen den Boden stützte. Die Achse war im Führungsloche mittelst einer Schraube festgestellt. An der Achse war ein Cylinder *C* mit zwei diametral gegenüberliegenden Zäpfchen, die vom Ende des Hebels *H* gefasst wurden, verschiebbar. Ober diesem Cylinder war eine Schnurscheibe mit einer Doppelgabel *G G* angebracht. Fig. 8 gibt eine zweite Ansicht der Doppelgabel. Um die Scheibe wurde eine Schnur gelegt und die Enden derselben zum Beobachter geführt. Mittelst des Hebels *H* konnte die Gabel so weit gehoben werden, dass sie in den Arm *A A* eingriff. Auch das Heben der Gabel wurde mittelst einer um das freie Ende des Hebels gelegten Schnur von dem Beobachter bewirkt. Die Senkung der Gabel geschah durch das eigene Gewicht. Auf diese Weise konnte die Kugel und mit ihr der Glasfaden nach einer durch Drehen der Gabel ertheilten Torsion plötzlich frei gemacht und sich selbst überlassen werden. Die darauf eintretenden Schwingungen dämpfte ich durch einen hufeisenförmigen Elektromagnet *M M*, dessen Enden etwas gegen einander gebogen und halbkugelförmig ausgehöhlt waren, so dass sie die Kugel etwas umfassten. Die Dämpfung war vorzüglich, die Kugel schwang nahezu aperiodisch. Allerdings brauchte dann die Kugel bis zu der durch die Nachwirkung bedingten Detorsion eine Zeit von 12—15 Secunden, wodurch die Torsionsdauer eigentlich etwas verlängert wurde; allein es ist durch diese Anordnung in den Verlauf der Detorsion für alle Fälle eine Gleichmässigkeit gelegt worden, die sonst nicht leicht erreicht worden wäre.

Bei der Beobachtung der Torsionsnachwirkungen war danach der Vorgang folgender: Vor allem wurde die Ruhelage und die Schwingungsdauer der Kugel bestimmt, dann die Gabel so gestellt,

dass sie in der gehobenen Stellung in den horizontalen Arm *AA* eingriff. 5 Secunden vor Beginn der Torsionsdauer wurde die Gabel gehoben und in dieser Lage festgestellt, hierauf die Gabel mittelst der Schnur so lange gedreht, bis im Spiegel derselbe Theilstrich wie vor der Drehung erschien, also um 360°. Zu Beginn der Torsionsdauer war die Kugel nahezu in der gewünschten Torsionslage angelangt. Gegen das Ende der Torsionsdauer wurde der Elektromagnet durch das Schliessen eines von einer Smee'schen Batterie gelieferten Stromes erregt. Genau mit Ablauf der Torsionsdauer wurde die Gabel gesenkt, 22 Secunden später der Strom unterbrochen und bald darauf die Zeit eines Umkehrpunktes bestimmt[1]); der gleich darauf folgende, sowie die weiteren bis zum 71. wurden notirt. Da die Schwingungsdauer bekannt war, so wusste man auch die Zeit eines jeden Umkehrpunktes.

Am Kasten war ein Thermometer. Betreffs der Temperatur gilt dasselbe wie vorher.

Der Kasten sowohl als das Beobachtungsfernrohr standen auf Stativen, die auf Grundpfeilern aufgestellt waren.

Torsionsnachwirkungen.

Aus je drei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten der notirten Reihe wurde die Ruhelage bestimmt und als der Zeit des mittleren Umkehrpunktes entsprechend angenommen. Diese Bestimmungsweise enthält allerdings einen kleinen Fehler, da ja die Aenderung der Ruhelage während zweier aufeinanderfolgender Schwingungen nicht als gleich angesehen werden kann. Aus der Betrachtung der Umkehrpunkte für die Torsionsdauer von 16 Min., die ich in Tabelle VIII S. 426 anführe, ergibt sich jedoch leicht, dass dieser Fehler selbst in der ersten Zeit kaum einen Theilstrich beträgt, was bei der Grösse der zu dieser Zeit noch vorhandenen Nachwirkung auf das Resultat von keinem grossen Einflusse ist. Von 10 Min. ab wurde die Ruhelage für die einzelnen Zeiten, wenn die Kugel noch nicht zur Ruhe gekommen war, aus je zwei aufeinanderfolgenden Umkehrpunkten be-

1) Trotz der vorzüglichen elektromagnetischen Dämpfung blieb nach der Unterbrechung des Stromes doch noch eine kleine schwingende Bewegung zurück, die daher rührte, dass die Kupferkugel vom erregten Elektromagnet um einige Theilstriche abgelenkt wurde.

stimmt, die so gewählt wurden, dass einer vor, der andere hinter die angegebene Zeit fiel. Zu bemerken ist, dass der Faden jedesmal auf seine alte Ruhelage zurückkehrte, wenn man ihm nur die nöthige Zeit dazu liess; freilich zählte diese Zeit bei längeren Torsionsdauern nach Tagen.

Die in den Tabellen angeführten Daten sind das Resultat je einer einzigen Beobachtung. Es wurden zwar mehrere Beobachtungen bei einer und derselben Torsionsdauer ausgeführt, allein die Resultate stimmten so gut unter einander, dass ich nur je eine Beobachtungsreihe wiedergebe. In der Tabelle sind auch die nach Kohlrausch's Formel gerechneten Werthe enthalten. Die Auswerthung von m geschah wieder aus mehreren Drillingen, die aber die ganze Reihe umfassten, die von a und C nach der Methode der kleinsten Quadrate. Die Bedeutung der Buchstaben ist wie vorher. y ist in Scalentheilen, auf den Bogen reducirt, angegeben.

Die Schwingungsdauer der Kugel = 5,511 Secunden.

Das logarithmische Decrement bei unerregtem Elektromagnet = 0,00175.

Die Entfernung der Millimeterscala vom Spiegel = 1680^{mm}.

In Tabelle VIII bezieht sich die Zeit 37,5 Secunden auf den daneben stehenden Umkehrpunkt 206.

Die Uebereinstimmung zwischen der Rechnung und Beobachtung in Tabelle VII auf S. 425 ist namentlich bei längeren Torsionsdauern nicht besonders gut. Die Abhängigkeit der Constanten von der Torsionsdauer ist qualitativ dieselbe wie beim Glasstabe.

Bestimmung des logarithmischen Decrements.

Aus dem Kasten wurde die Torsionsvorrichtung und der Elektromagnet entfernt und dann das logarithmische Decrement auf dieselbe Weise wie beim Glasstabe bestimmt.

Schwingungsdauer = 5,493.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Temp.} = 20{,}4,\ \lambda = 0{,}001545 \\ \text{,,} \qquad\qquad 48 \\ \text{,,} \qquad\qquad 44 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Mittel}\\ = 0{,}001546,\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Temp.} = 21{,}2,\ \lambda = 0{,}001578 \\ \text{,,} \qquad\qquad 82 \\ \text{,,} \qquad\qquad 90 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Mittel}\\ = 0{,}001583,\end{array}$$

In diesen Werthen ist jedoch auch das logarithmische Decrement der Luftreibung enthalten.

Um dieses Decrement zu bestimmen, scheint es mir am zweckmässigsten, dieselbe Kugel an sehr feinen Drähten bifilar aufzuhängen und in Luft von normaler und sehr geringer Dichte schwingen zu lassen. Die bisher nach dieser Methode angestellten Vorversuche ergaben für dasselbe den beiläufigen Werth 0,00005, welcher jedoch weder mit der von Lampe (Programm des städtischen Gymnasiums zu Danzig, 1866), noch mit der von Kirchhoff (Vorl. über math. Physik, 26. Vorl.) entwickelten theoretischen Formel in Uebereinstimmung steht.

Tabelle VII.

$\varphi = 360^0$.

$T = 1$ Min. Temp. $= 20,4$			$T = 2$ Min. Temp. $= 20,4$			$T = 4$ Min. Temp. $= 20,3$			$T = 8$ Min. Temp. $= 20,8$			$T = 16$ Min. Temp. $= 20,3$		
t Min.	y beob.	y ger.	t Min.	y beob.	y ger.	t Min.	y beob.	y ger.	t Min.	y beob.	y ger.	t Min.	y beob.	y ger.
0,75	57,8	58,6	0,752	90,5	90,6	0,83	129,7	132,2	0,717	193	194	0,717	255,5	252,3
1,025	48,6	48,8	1,028	78,4	76,8	1,014	120,5	120,9	0,992	175,9	174	0,992	237,5	232,8
2,037	32,1	31,9	2,04	54,7	53,1	2,024	89,5	86,9	2,002	138,5	133,9	2,002	196,3	190,6
3,047	24,5	24,2	2,962	43,7	42,7	3,035	73	70,4	3,012	117,1	112,9	3,013	171,8	166,6
3,965	20,5	20,5	3,975	36,2	35,6	4,045	62,2	60,2	4,022	102,6	99,1	4,023	154,5	150
4,975	17,3	17,5	4,988	31,3	30,8	5,065	54,7	53	5,032	91,8	89,1	5,033	141,1	137,6
6,995	13,6	13,7	7,017	24,6	24,5	6,984	44,7	43,9	7,051	76,5	75,2	6,947	122,1	120,3
10	10,4	10,5	10	19	19,2	10	35	35,1	10	62,1	62,2	10	101,9	101,9
15	7,5	7,6	15	13,8	14,2	15	26,2	26,9	15	48	46,9	15	81,1	83
20	6	6	20	11,3	11,4	20	21,2	21,8	20	39,1	40,9	20	68,1	70,7
30	4,3	4,3	30	8,2	8,2	30	15,6	16,4	30	29,1	31,1	30	52,1	55,3
50	2,8	2,7	50	5,4	5,3	50	10,4	11	50	19,6	21,3	50	36	38,9
						80	7,3	7,4	80	13,4	14,4	80	25	26,9
						120	5,2	5,2	120	9,5	10	120	17,8	18,9
						215	3,2	3	180	6,9	6,7	180	13	12,9
									270	5,1	4,3	270	9,4	8,1
									1020	2,7		1020	3,3	
												2520	1,6	

$m =$	0,109	0,139	0,148	0,209	0,266
$a =$	5,4445	3,733	3,0595	1,659	0,9758
$C =$	11469,8	3276,8	2593,25	911,55	616,4

Tabelle VIII.

T = 16 Min. Ruhelage = 500,5. Temp. = 20,3.

37,5 Sec.	206	272,5	18 Sec.	319,2	370,4
1	221	284,6	19	322,4	373
2	233	295	20	325,2	375,3
3	243	304	21	328	377,5
4	252	312	22	330,4	379,6
5	260	318,5	23	333	381,9
6	266,8	324,8	24	335,4	383,8
7	373,2	330,5	25	337,5	385,7
8	279	335,5	26	340	387,5
9	284,2	340,2	27	342	389,2
10	289,2	344,5	28	344,3	391
11	293,7	348,4	29	346,4	392,8
12	298	352	30	348,2	394,3
13	302,3	355,8	31	350	395,7
14	306	359	32	352	397
15	309,4	362	33	354	398,5
16	313	365	34	355,4	400
17	316,2	367,8	35	357,3	

Ueber die Reibung der Dämpfe.

Von

Dr. J. Puluj,

Privatdocent und Assistent am physikalischen Cabinet der Wiener Universität.

(Hiezu Tafel XVII.)

(Aus den Wiener Sitzungsberichten vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Versuche über die Reibung der Gase führten zu wichtigen Resultaten über die Abhängigkeit der Reibungsconstante von Druck und Temperatur und einigen beachtenswerthen Beziehungen zwischen jener Constante, den mittleren Weglängen, Brechungsexponenten und dem Molekularvolumen der Gase. Es schien mir daher wünschenswerth, auch Dämpfe der bei gewöhnlicher Temperatur flüchtigen Stoffe in den Bereich dieser Untersuchungen zu ziehen.

Apparat.

Der Apparat, welcher mir zu meinen Versuchen diente, wurde im hiesigen physikalischen Cabinet ausgeführt und ist von derselben Construction wie der von Professor Kundt vereinfachte Maxwell'sche Apparat, den ich in der Abhandlung: „Ueber die Abhängigkeit der Reibung der Gase von der Temperatur" beschrieben habe[1]).

Zur Suspension verwendete ich einen sehr feinen Platindraht von $0,06314^{mm}$ Durchmesser. Die schwingende Glasscheibe von $0,1068^{cm}$ Dicke und $5,495^{cm}$ Halbmesser hatte ein Gewicht von $25,63^{gr}$. Senkrecht zur Scheibe war an dieselbe ein Messingstab von $9,6^{cm}$ Länge, $0,3351^{cm}$ Durchmesser und $6,984^{gr}$ Gewicht angeschraubt. Am oberen Ende des Stabes lässt sich ein Aufsatz mit Spiegel und Rolle von $2,862^{gr}$ Gewicht mittelst einer Schraube befestigen (Taf. XVII, Fig. 1). Da das Aufhängen des sehr feinen Drahtes umständlich ist, so wird

1) Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. Bd. 73 S. 589. 1877. — Carl's Repertorium Bd. 13 S. 293.



beim Auseinandernehmen des Apparates nur der Stab vom Aufsatzstücke abgeschraubt. Aus den obigen Zahlen berechnet sich das Trägheitsmoment der Scheibe zu $387{,}09^{\mathrm{gr.cm}^2}$.

Die Zusammenstellung des Apparates ist aus der Zeichnung ersichtlich. Auf einer Steinplatte, welche in einer Fensternische eingemauert ist, ruht der Messingteller *aa*, auf welchem unter einer kupfernen Glocke *g* der Schwingungsapparat steht. Der breite Rand der Glocke, der mit dem Teller sehr sorgfältig zusammengeschliffen, ist mittelst Rose'schen Metalls verlöthet und nachher mit dem in Alkohol aufgelösten Siegellack verschmiert. Bei *b* ist in die Glocke ein an einem Ende verschlossenes Messingrohr von 8^{mm} Durchmesser eingelöthet, welches bis ungefähr in die Mitte der Glocke reicht und $1-2^{\mathrm{mm}}$ über der fixen Scheibe des Schwingungsapparates zu stehen kommt. Die Röhre dient zur Aufnahme des Thermometers. Bei *c* ist eine Durchbohrung von $1{,}8^{\mathrm{cm}}$ Durchmesser, an welche ein eben abgeschliffener Ring angelöthet und an denselben eine planparallele runde Glasplatte mittelst eines zweiten Ringes angeschraubt und mit Minium verkittet ist. In den Boden des Tellers mündet ein zweites Messingrohr *l* mit dem Metallhahn *m* und einem T-Stück, in welches eine Glasröhre mit den Hähnen *d*, *e* und eine Glasfeder mittelst Siegellack eingekittet sind. Die Glasröhre taucht in ein verkorktes Fläschchen mit der zu verdampfenden Flüssigkeit. Das Fläschchen steht in einer Schale mit Wasser, um die verdampfende Flüssigkeit auf einer tieferen Temperatur zu erhalten als die Zimmertemperatur. An die Glasfeder *f*, welche den Zweck hat, den Apparat vor Erschütterungen der Pumpe zu schützen, ist ein Verbindungsstück angeschmolzen, das in den Trichter *r* konisch eingeschliffen ist. Das Verbindungsstück ist mit Hahnfett geschmiert, und in den Trichter werden einige Tropfen Glycerin hineingegeben. Die Verbindung ist vollkommen luftdicht und zum Auseinandernehmen sehr bequem.

Zur Messung sehr kleiner Drucke habe ich an der Quecksilberpumpe (von Alvergniat Frères in Paris) das Manometer *opq* angebracht, welches im Principe vom Mac Leod'schen Manometer nicht verschieden ist.

Dasselbe besteht aus einer U-förmigen Röhre *pq*, bestehend aus zwei Schenkeln von 30^{cm} Länge, welche bei *p* mittelst Kautschuk verbunden und mit Quecksilber gefüllt sind. Im weiteren Schenkel von 3^{cm} Durchmesser steckt ein in der Achse durchbohrter Holzcylinder,

der sich längs des Eisenstabes verschieben und mittelst einer Klemmschraube *u* festklemmen lässt. Durch Drehen des Knopfes *v* kann man dem Holzcylinder noch sehr kleine Verschiebungen ertheilen. In den engeren Schenkel von 1,1 cm Durchmesser mündet bei *p* eine Barometerröhre, welche oben eine Kugel mit einer kurzen Glasröhre *y* trägt. Die Schenkel *w* und *y* sind vom gleichen Querschnitt; die Verbindung zwischen Manometer und Pumpe wurde auf folgende Weise hergestellt: Ueber das Ende des Ansatzrohres der Pumpe wurde ein 1 cm langes Kautschukrohr geschoben, an den Boden des Trichters *o* angedrückt und der letztere etwas erwärmt, dass das geschmolzene Hahnfett sich anlegen kann. Nachdem das Hahnfett fest geworden ist, wurden in den Trichter noch einige Tropfen Glycerin hineingegeben. Diese Art der Verbindung ist vollkommen luftdicht und bietet noch den Vortheil, dass das Manometer sehr leicht aus einander genommen werden kann, was bei Versuchen mit Dampf öfters geschehen muss.

Ist die Verdünnung so weit gediehen, dass man kleine Drucke an der Barometerprobe *x* nicht ablesen kann, so wird der Holzcylinder hinuntergedrückt und die Schraube *u* festgeklemmt. Das Quecksilber, welches im Manometer ungefähr bei *z* steht, steigt in die Kugel und den Schenkel *w*.

Die Luft in der Kugel wird bis auf den kleinen Raum der Röhre *y* zusammengedrückt, und in Folge dessen steigt die Quecksilbersäule im Schenkel *w* höher als in *y*. Die genaue Einstellung der Kuppe auf die Marke *y* geschieht durch Drehen des Knopfes *v*. Ist V das Volumen der Kugel, v das der Röhre *y*, x der unbekannte Druck und p die Höhe der Quecksilbersäule im Schenkel *w*, so ist

$$(V + v)\,x = v\,(p + x), \quad x = \frac{v}{V}\,p.$$

Für das beschriebene Manometer ist

$$x = 0{,}032\,p.$$

Das Manometer habe ich auch zur Messung grösserer Drucke verwendet. Zu diesem Zwecke wurde der Holzcylinder herausgenommen und in den Schenkel *q* ein mit Millimetertheilung versehener Glasstab, der in eine Spitze ausgezogen war, vertical auf das Niveau des Quecksilbers eingestellt. Der Stand der Quecksilbersäule im Manometer wurde mit einem Fernrohr abgelesen.

Vor dem Recipienten der Pumpe ist ein Gefäss A mit Schwefelsäure und dient einerseits dazu, um die Pumpe trocken zu erhalten, andererseits, um einige Dämpfe, mit denen der Apparat gefüllt wurde, durch Absorption wegzuschaffen.

Die Distanz der Scala vom Spiegel des Apparates betrug 336^{cm}, und ein Scalentheil war $= 2^{mm}$.

Versuche.

Ich habe zuerst einige Vorversuche mit trockener Luft beim vollen Atmosphärendruck bei zwei verschiedenen Distanzen der fixen Scheiben ausgeführt. Ich lasse hier die Resultate folgen, welche nach der von Maxwell entwickelten Formel aus den Versuchszahlen berechnet worden sind.

Es ist

$$\eta = \frac{2MD\lambda}{m\tau\pi R^4\left(1 + \frac{4\alpha}{R}\right)},$$

$$\alpha = \frac{2b}{\pi} \log \text{nat } 10 \left(\log \text{br } 2 + \log \text{br } \sin \frac{\pi D}{2b}\right),$$

worin η die Reibungsconstante, M das Trägheitsmoment der schwingenden Scheibe, R ihren Halbmesser, D den Abstand der inneren Flächen der festen und beweglichen Scheibe, $2b$ den der inneren Flächen der festen Scheiben, λ das logarithmische Decrement (in Brig. Log.), $m = 0{,}43429$ und τ die Schwingungsdauer bedeutet.

Im Nachstehenden ist t die Temperatur, bei welcher der Versuch angestellt worden ist.

Luft.

$$2b = 0{,}7004^{cm} \quad D = 0{,}2968^{cm} \quad \frac{4\alpha}{R}\ 0{,}010779$$

	t	τ	λ	η
27. Januar	16,9° C.	15,9″	0,017465	0,000183
30. „	16,8 „	15,9	0,017427	0,000183
30. „	17,2 „	15,9	0,017468	0,000183

$$2b = 0{,}4340^{cm} \quad D = 0{,}1636 \quad \frac{4\alpha}{R} = 0{,}064894$$

	t	τ	λ	η
1. Februar	17,0° C.	16,45	0,031305	0,000182
2. „	17,0 „	—	0,031332	0,000182
2. „	16,5 „	—	0,031044	0,000180
4. „	15,6 „	—	0,032765	0,000190

Beim letzten Versuch war der Apparat neu zusammengestellt. Es ergibt sich als Mittel

$$\eta = 0{,}000183 \text{ bei } 16{,}7^{0}\,\text{C.},$$

welcher Werth nur um 3% kleiner ist als der von Kundt und Warburg[1]) bei 15° gefundene Werth $\eta = 0{,}000189$.

O. E. Meyer[2]) fand aus Schwingungsversuchen mit Messingscheiben 0,000182, A. v. Obermayer[3]) aus Transpirationsversuchen 0,000175, und meine Versuche ergaben 0,000185[4]), sämmtliche Constanten bei derselben Temperatur von 15° C.

Versuche mit Luft bei sehr kleinen Drucken.

Bisherige Versuche lieferten bekanntlich das Resultat, dass die Reibung innerhalb Grenzen 750mm und 1mm vom Drucke unabhängig ist[5]). Diese Unabhängigkeit der Reibungsconstante vom Drucke ist selbstverständlich nicht auf beliebige Grenzen auszudehnen, weil im absoluten Vacuum die Reibung gleich Null sein muss. Diesbezügliche Versuche sind bereits von Kundt und Warburg angestellt worden, und ich habe sie bei der sich darbietenden Gelegenheit wiederholt. Der Apparat wurde neu zusammengestellt und von nun an an demselben während der ganzen Dauer der Versuche gar nichts geändert.

$$2b = 0{,}5640^{\text{cm}} \quad D = 0{,}2286 \quad \frac{4\alpha}{R} = 0{,}084716$$

	p	τ	t	λ	η
25. Februar	7,54mm	16,227″	16,7° C.	0,022409	0,000181
27. „	0,13	16,294	17,8 „	0,011310	091
28. „	0,13	16,572	17,5 „	0,012981	103
28. „	0,11	16,567	17,7 „	0,012321	098
1. März	0,07	16,567	17,6 „	0,011002	087
2. „	0,03	16,579	18,5 „	0,009356	074
3. „	0,03	16,573	17,5 „	0,009644	076
4. „	0,03	16,573	17,8 „	0,0089681	071

Vor den Versuchen am 3. und 4. März wurde sieben- bis achtmal gepumpt. Es gelang mir nicht, durch weiteres Pumpen den

1) Pogg. Ann. Bd. 155 S. 539.
2) Pogg. Ann. Bd. 148 S. 226.
3) Ber. d. Wr. Akad. Bd. 73. 1877. — Repertorium Bd. 13 S. 130.
4) Ber. d. Wr. Akad. Bd. 69 S. 287.
5) Pogg. Ann. Bd. 155 S. 547.

Druck zu verkleinern, indem es, wie auch Versuche von Kundt und Warburg zeigen, schwer ist, die letzten Spuren Wasserdampf wegzuschaffen, welcher an den Wänden haftet und im Vacuum verdampft.

Während der Druck von 754^{mm} auf 0,03^{mm} abgenommen hat, ist die Reibungsconstante um etwas mehr als die Hälfte des ursprünglichen Werthes kleiner geworden, woraus ersichtlich ist, dass die Gasmenge, die im besten Vacuum, das wir erhalten können, zurückbleibt, verhältnissmässig sehr gross sein muss, da sie so bedeutende Bewegungsgrössen übertragen kann. Das ist in bester Uebereinstimmung mit dem Ergebniss der kinetischen Theorie der Gase, nach welcher in einem Cubikcentimeter Luft von ein Milliontel Atmosphärendruck 19 Billionen Moleküle enthalten sein sollen[1]).

Kundt und Warburg[2]) erhielten für

Luft		Kohlensäure	
$p = 750^{mm}$	$\lambda = 0{,}0800$	$p = 750^{mm}$	$\lambda = 0{,}0387$
4. Vacuum	0,0301	4. Vacuum	0,0121

Dämpfe.

Das Füllen des möglichst evacuirten Apparates mit Dämpfen geschah auf folgende Weise: Nachdem ich die Hähne *m* und *e* abgedreht hatte, liess ich, den Hahn *d* behutsam öffnend, etwas von der zu verdampfenden Flüssigkeit aufsteigen und öffnete nachher den Hahn *e*. Durch den sich entwickelnden Dampf wurde das Bischen Luft, welche sich unterhalb des Hahnes *d* befand und mit der Flüssigkeit hinaufstieg, in die Verbindungsröhre hinausgetrieben und beim abgesperrten Hahn *e* durch Pumpen weggeschafft. Nach drei- bis viermaliger Wiederholung dieser Manipulation wurde der Hahn *s* abgesperrt, die Hähne *m* und *e* geöffnet und die Glasröhre oberhalb und unterhalb *e* mit der Hand erwärmt, wodurch erzielt wurde, dass beim Verdampfen keine Flüssigkeit in den Apparat hineingerissen wurde. War der Apparat auf diese Weise mit Dampf gefüllt, so wurde der Hahn *e* abgesperrt, der Hahn *s* zu wiederholten Malen auf- und zugedreht, wobei der Dampf durch die Schwefelsäure im Trockenapparate *A* absorbirt und

1) G. Johnstone Stoney, Phil. Mag. (5.) IV p. 222. 1877. Beiblätter zu Ann. d. Phys. Chem. Bd. 1 S. 551. S. Telver Preston, Ueber die Natur des Vacuums.

2) Pogg. Ann. Bd. 155 a. a. O.

die letzten Reste Luft durch Pumpen weggeschafft wurden. Dämpfe, die sich durch SO_3 nicht absorbiren liessen, wurden gepumpt und der Apparat nachher noch einmal mit dem betreffenden Dampfe gefüllt.

Auf diese Weise gelang es mir, mit möglichst reinen Dämpfen zu arbeiten.

Sämmtliche Flüssigkeiten mit Ausnahme des Aethers wurden von Herrn Dr. Z. Skraup chemisch gereinigt, wofür ich ihm meinen verbindlichsten Dank ausdrücke.

a) Abhängigkeit der Reibung der Dämpfe vom Drucke.

Bekanntlich haben zahlreiche Versuche bestätigt, dass die Reibung der Gase vom Drucke unabhängig ist. Um dieses Gesetz bei Dämpfen zu prüfen, habe ich eine Reihe von Versuchen angestellt, die im Folgenden mitgetheilt werden.

Den bis auf $0{,}03^{mm}$ evacuirten Apparat füllte ich auf beschriebene Weise zuerst mit Aetherdampf. Der Metallhahn *m* hat aber nicht gehalten, musste daher mit Fett geschmiert werden. Nachdem nachher der Apparat bis auf $0{,}12^{mm}$ evacuirt wurde, erhielt ich

$$\text{bei } t = 15{,}8^{0}\,\text{C.} \qquad \eta = 0{,}000087,$$
$$\eta = 0{,}000088.$$

Nachher wurde das Gemisch aus Luft und Dampf so weit ausgepumpt, dass das Manometer keinen Druck anzeigte, und der Apparat auf obige Weise mit Aetherdampf gefüllt.

Ich lasse hier die Versuchszahlen und ihre Berechnung folgen. Die Scalentheile sind bereits auf Bögen reducirt.

Aetherdampf.

13. März.

Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5
147,6	144,6	147,6	110,9	141,8
141,5	138,7	141,7	106,7	135,9
135,7	132,7	135,7	101,9	130,5
129,8	127,5	129,9	97,9	124,8
124,7	121,9	124,8	93,9	119,6
119,5	116,9	119,7	89,8	114,7
114,7	111,9	114,7	85,9	109,7
109,7	107,6	109,7	82,1	105,1
105,1	102,9	105,2	78,9	100,9

	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5
	100,8	98,7	100,9	75,7	96,8
	96,8	94,6	96,9	72,2	92,7
	92,7	90,7	92,8	69,2	88,7
	88,8	86,9	88,9	66,2	84,9
	85,1	83,1	85,0	63,3	81,1
	81,6	79,9	81,7	60,9	78,0
=	16,45° C.	16,45° C.	16,4° C.	16,2 ° C.	16,2° C.
τ =	16,573″	16,573″	16,573″	16,573″	16,573″
p =	338,9^{mm}	338,9^{mm}	338,9^{mm}	340,3^{mm}	341,3^{mm}

	14 März Nr. 6	Nr. 7	Nr. 8	Nr. 9	Abends Nr. 10
	145,5	144,8	138,6	134,6	145,6
	139,7	138,7	132,7	128,9	139,9
	133,7	132,9	127,6	123,7	134,1
	128,6	127,7	121,9	118,7	128,7
	123,1	122,6	116,9	113,7	123,7
	117,9	117,1	112,0	109,0	118,6
	113,0	112,6	107,6	104,8	113,7
	108,6	107,8	102,9	100,4	108,8
	103,9	103,6	98,9	96,1	104,6
	99,7	99,0	94,7	92,1	100,1
	95,7	94,9	90,9	88,7	96,1
	91,7	91,0	87,1	84,9	92,1
	87,8	87,2	83,8	81,2	88,7
	84,1	83,8	81,0	78,0	84,9
	80,7	80,1	77,0	75,0	81,6
t =	15,2° C.	14,6° C.	14,15° C.	13,8° C.	9,1° C.
τ =	16,567″	16,567″	16,567″	16,567″	16,570″
p =	341,5^{mm}	341,5^{mm}	341,5^{mm}	340,5^{mm}	277,3^{mm}

Nr. 11	Nr. 12	Nr. 13	Nr. 14	Nr. 15
147,6	147,4	145,6	147,7	130,7
141,7	141,5	139,7	141,7	125,6
135,8	135,7	133,9	135,8	120,0
130,5	130,0	128,6	130,2	115,5
125,0	124,8	123,0	124,8	110,6
119,9	119,8	117,9	119,7	106,0
115,1	114,8	112,9	113,8	101,9

	Nr. 11	Nr. 12	Nr. 13	Nr. 14	Nr. 15
	110,5	109,8	108,7	108,8	97,7
	105,9	105,8	104,0	105,7	93,7
	101,9	101,6	99,8	101,0	89,8
	97,7	97,1	95,8	96,9	86,0
	93,7	93,2	91,8	93,0	82,7
	89,8	89,6	87,8	90,0	79,2
	86,1	85,8	84,2	85,7	76,0
	82,6	82,1	80,9	81,9	72,9
$t =$	9,3° C.	9,3° C.	9,2° C.	9,2° C.	9,5° C.
$\tau =$	16,570″	16,570″	16,570″	16,570″	16,584″
$p =$	277,3 mm	277,3 mm	268,7 mm	268,7 mm	212,5 mm

16. März.

	Nr. 16	Nr. 17	Nr. 18	Nr. 19	Nr. 20
	146,6	143,7	136,8	142,7	145,2
	140,8	137,9	131,6	136,7	139,6
	134,9	132,5	125,9	131,0	133,6
	129,6	126,8	120,8	125,8	128,0
	124,1	121,8	115,8	120,6	122,8
	119,0	116,8	111,0	115,8	117,8
	114,3	111,8	106,7	110,8	112,8
	109,6	107,7	102,0	106,5	108,1
	105,0	103,0	97,9	102,0	103,9
	100,9	89,9	94,0	97,8	99,7
	96,8	94,9	90,0	93,9	95,7
	92,9	90,9	86,9	89,9	91,7
	88,9	87,1	82,9	86,2	87,7
	85,2	83,9	79,7	82,8	84,0
	81,9	80,0	76,7	79,3	80,8
$t =$	9,5° C.	5,9° C.	7,2° C.	6,9° C.	7,0° C.
$\tau =$	16,584″	16,546″	16,546″	16,561″	16,561″
$p =$	212,5 mm	53,7 mm	53,7 mm	25 mm	25 mm

19. März.

Nr. 21	Nr. 22	Nr. 23	Nr. 24
148,6	145,6	143,9	148,6
142,5	139,7	137,9	142,6
136,5	134,2	132,3	136,6

	Nr. 21	Nr. 22	Nr. 23	Nr. 24
	130,7	128,7	125,8	130,8
	125,1	123,1	121,6	125,7
	119,8	117,9	116,6	120,0
	114,8	113,2	111,6	115,0
	110,0	108,7	107,0	110,5
	105,7	104,1	102,7	105,8
	101,1	99,7	98,1	101,6
	97,0	95,7	94,1	97,1
	93,0	91,8	90,0	93,0
	89,2	87,8	86,6	89,1
	85,8	84,1	82,8	85,7
	82,0	80,8	79,4	82,0
$t =$	15,4° C.	15,7° C.	14,7° C.	14,8° C.
$\tau =$	16,572″	16,572″	15,572″	16,572″
$p =$	329,8 mm	329,8 mm	1 mm	1 mm

Hier folgt die Berechnung der voranstehenden Versuchszahlen; p bedeutet den Druck des Dampfes.

Nr.	p	t	λ	η
1	338,9 mm	16,45° C.	1,0091883	0,0000727
2	338,9	16,4	92912	730
3	338,9	16,5	91678	726
4	340,3	16,2	92665	733
5	341,3	16,2	92311	731
6	341,5	15,2	91194	722
7	341,6	14,6	91574	725
8	341,5	14,15	91490	724
9	340,5	13,8	91131	722
10	277,3	9,2	90339	715
11	277,3	9,3	89868	711
12	277,3	9,3	90396	716
13	268,7	9,2	91218	722
14	268,7	9,2	91507	724
15	212,5	9,5	90509	717
16	212,5	9,5	90280	715
17	53,7	5,9	90234	714
18	53,7	6,2	90290	715

Nr.	p	t	λ	η
19	25,0mm	6,9 °C.	1,0091147	0,0000722
20	25,0	7,0	90948	720
21	329,8	15,4	92583	733
22	329,8	15,7	91156	722
23	1,0	14,7	92234	730
24	1,0	14,8	92184	730

Vor dem Versuche 13 wurde etwas Aetherdampf durch Schwefelsäure absorbirt. Beim Versuche 9 begann die Condensation des Dampfes und war nicht unbedeutend bei Versuchen 10, 11, 12. Vor dem Versuche 21 wurde der Apparat noch einmal mit Dampf gefüllt.

Aus den Versuchen 1—5 und 7—10, welche bei nahezu derselben Temperatur angestellt worden sind, ersieht man, dass die einzelnen Werthe der Reibungsconstante um 1% von einander differiren können. Vergleicht man die Werthe für p und η bei den Versuchen 10—20 und 21—24, so zeigt sich auch hier eine Constanz der Reibungsconstante innerhalb der Fehlergrenzen. Es bestätigt sich somit auch bei Dämpfen das von der kinetischen Theorie verlangte Gesetz, dass die Reibungsconstante vom Drucke unabhängig sein soll. Dieses Gesetz gilt jedoch nur bis zum Sättigungspunkte, weil, wie Lothar Meyer bemerkt, der Druck eines gesättigten Dampfes nicht ohne Aenderung der Temperatur verändert werden kann, mit dieser aber auch der Reibungscoëfficient veränderlich ist. Derselbe findet auch aus Transspirationsversuchen durch eine Capillarröhre, dass die Reibungsconstante des gesättigten Benzoldampfes (und voraussichtlich aller gesättigten Dämpfe) der Quadratwurzel aus der Spannkraft des Dampfes proportional ist[1]).

b) Abhängigkeit der Reibungsconstante von der Temperatur.

Transspirationsversuche von A. v. Obermayer[2]) und meine[3]) Schwingungsversuche lieferten das übereinstimmende Resultat, dass, während die Reibungsconstante der sogenannten permanenten Gase

1) Ber. d. deutschen chem. Gesellsch. Jahrg. XI Nr. 2 S. 208.

2) Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien Bd. 73 S. 433. 1877. — Repertorium Bd. 13.

3) Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien Bd. 73 S. 589. 1877. — Repertorium Bd. 13. — Gleichzeitige Versuche von Warburg (Pogg. Ann. Bd. 159) und Eilh. Wiedemann (Arch. des Sc. phys. et nat. T. 56) führten zu demselben Resultate.

nahezu der Potenz $^3/_4$, jene der compressiblen Gase nahe der Potenz 1 der absoluten Temperatur proportional ist. Da aber die Dämpfe nur leichter compressible Gase sind, so ist es zu erwarten, dass bei denselben die Reibung der absoluten Temperatur direct proportional ist. Um diese Abhängigkeit von der Temperatur zu prüfen, ist die hier folgende Beobachtungsreihe mit Aetherdampf angestellt worden.

Nachdem die Hähne frisch geschmiert worden, wurde der Apparat bis auf $p = 0{,}07^{mm}$ evacuirt. Ich erhielt $\eta = 0{,}000089$ bei 16,3°C. Nachher wurde der Apparat auf bekannte Weise mit Aetherdampf bis $p = 237{,}3^{mm}$ gefüllt und der Hahn m abgesperrt.

Aetherdampf.

	20. März		21. März		
	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5
	140,8	142,1	148,6	144,2	145,6
	135,3	136,5	142,5	138,5	139,9
	129,5	130,7	136,7	132,7	134,0
	124,0	125,0	130,9	127,0	128,7
	118,9	119,8	125,8	122,9	123,7
	113,9	114,8	120,6	117,0	118,6
	109,9	109,9	115,8	112,0	113,8
	104,7	105,2	110,9	107,9	109,2
	100,2	100,9	106,5	103,3	104,8
	96,0	96,7	102,1	99,0	100,2
	92,0	92,7	98,0	95,1	96,6
	88,1	88,7	93,9	91,1	92,7
	84,6	84,9	90,0	87,7	88,9
	81,0	81,0	86,7	84,1	85,0
	77,7	77,7	82,9	80,7	81,8
$t =$	15,65°C.	15,65°C.	9,9°C.	10,05°C.	7,15°C.
$\tau =$	16,582".	16,582"	16,565"	16,565"	16,565"

Nr. 6	Nr. 7	Nr. 8	Nr. 9	Nr. 10
146,6	136,7	148,9	146,8	144,1
140,9	130,8	142,7	140,7	137,8
135,4	125,0	136,5	134,5	131,7
129,0	119,8	130,7	128,7	125,8
123,8	115,7	124,9	122,8	120,2
118,7	109,6	119,6	117,5	114,9

	Nr. 6	Nr. 7	Nr. 8	Nr. 9	Nr. 10
	113,9	104,8	114,5	112,0	109,8
	109,2	100,6	109,4	107,1	105,0
	104,9	96,1	104,6	102,7	100,6
	100,7	92,0	100,0	97,9	96,0
	96,6	87,9	95,9	93,8	91,7
	92,7	84,0	91,8	89,9	87,8
	88,9	80,7	87,7	85,8	83,8
	85,0	77,2	83,9	82,9	80,1
	81,7	74,0	80,7	78,2	76,7
	78,5				
$t =$	7,25° C.	25,75° C.	26,25° C.	31,4° C.	32,0° C.
$\tau =$	16,565″	16,572″	16,572″	16,579″	16,579″

22. März.

	Nr. 11	Nr. 12	Nr. 13	Nr. 14	Nr. 15
	144,8	143,6	143,6	146,7	146,8
	138,6	136,9	137,7	140,8	140,8
	131,9	130,8	131,7	134,8	134,9
	126,0	124,9	126,1	129,1	129,4
	120,6	119,5	120,9	123,8	123,8
	114,9	113,9	115,8	118,6	118,8
	109,7	108,8	110,9	113,7	113,8
	104,8	104,0	106,2	108,9	108,8
	100,0	99,2	101,8	104,0	104,2
	95,7	94,8	97,7	99,8	99,9
	91,1	90,7	93,6	95,7	95,8
	87,1	86,7	89,4	91,7	91,8
	83,0	82,7	85,8	87,7	87,8
	79,4	78,9	82,0	84,2	84,0
	76,0	75,2	78,8	80,6	80,7
$t =$	36,75° C.	37,1° C.	18,8° C.	18,95° C.	19,1° C.
$\tau =$	16,594″	16,594″	16,580″	16,580″	16,580″

23. März		24. März	
Nr. 16	Nr. 17	Nr. 18	Nr. 19
146,6	147,6	148,5	148,6
140,7	141,7	142,1	142,5
134,7	135,7	136,0	136,7

	Nr. 16	Nr. 17	Nr. 18	Nr. 19
	129,1	129,9	129,7	130,7
	122,8	124,7	125,1	125,5
	118,8	119,4	119,9	120,0
	113,7	114,6	115,0	115,0
	108,9	109,6	110,0	110,5
	104,4	105,0	105,7	105,9
	99,9	100,7	101,1	101,5
	95,9	96,7	96,9	97,1
	91,8	92,1	91,9	93,0
	87,9	88,7	89,0	89,1
	84,1	84,9	86,6	85,8
	80,8	81,0	81,9	82,1
t =	16,6° C.	16,6° C.	16,2° C.	16,2° C.
τ =	16,577″	16,577″	16,572″	16,572″

Die nachfolgende Tabelle enthält die aus voranstehenden Versuchszahlen gerechneten logarithmischen Decremente λ und die Reibungscoëfficienten η.

Nr.	t	λ	η
1	15,65° C.	0,0092199	0,0000729
2	15,65	93064	736
3	9,90	90519	717
4	10,05	90405	716
5	7,15	89210	706
6	7,25	90829	719
7	25,75	95437	755
8	26,25	95465	756
9	31,40	96941	767
10	32,00	98017	776
11	36,75	100240	793
12	37,10	100150	792
13	18,80	93297	738
14	18,95	92720	734
15	19,10	92701	733
16	16,60	92446	731
17	16,60	92313	731
18	16,20	92775	734
19	16,20	92178	730

Die nachfolgende Zusammenstellung enthält die Mittelwerthe der Reibungsconstanten, welche nahezu gleichen Temperaturen entsprechen. Die erste Columne bedeutet die Reihenfolge der Versuche. Die Mittelwerthe 1 und 9 dieser Tabelle stimmen ganz gut überein, zum Beweise, dass in den Apparat während der Versuchsreihe keine fremden Gase hineingekommen sind. Die Temperaturen sind bereits auf das Normalthermometer reducirt.

Nr.	t	η
3	7,2°C.	0,0000712
2	10,0	716
1	15,5	732
9	16,1	732
8	16,5	731
7	18,9	735
4	25,8	755
5	31,4	771
6	36,5	793

Aus den zusammengehörigen Werthen von t und η findet man nach der Methode der kleinsten Quadrate

$$\eta = 0{,}0000689\,(1 + 0{,}0041575\,t)^{0{,}94}.$$

Den Ausdehnungscoëfficienten des Aetherdampfes

$$\alpha = 0{,}0041575$$

berechnete ich aus Herwig's Angaben[1]), die ich einer grösseren Tabelle entnommen habe. Er beobachtete bei

$$t = 6{,}1^0\,\text{C.} \qquad v = 73{,}46 \qquad p = 225{,}88^{\text{mm}}$$

und bei

$$t = 35^0\,\text{C.} \qquad v = 72{,}85 \qquad p = 256{,}80^{\text{mm}}$$

t ist Temperatur, v Volumen und p der Druck einer und derselben Dampfmenge. Ich wählte Volumina entsprechend den Drucken, welche vom Drucke $237{,}3^{\text{mm}}$, bei welchem ich die Versuche ausführte, nicht weit entfernt waren.

Wie aus der obigen Formel zu ersehen, ist der Exponent 0,94 von der Einheit nur wenig verschieden.

1) Pogg. Ann. Bd. 137 S. 595.

Bei Aetherdampf und voraussichtlich auch bei allen Dämpfen ist somit die Reibungsconstante der absoluten Temperatur direct proportional.

In der nachfolgenden Tabelle sind die beobachfeten und die nach der obigen Formel berechneten Werthe der Reibungsconstante, sowie der Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung zusammengestellt.

Beobachtet	Berechnet	B.—R.
0,0000712	0,0000708	+ 4
716	716	± 0
732	730	+ 2
732	732	± 0
731	733	— 2
735	740	— 5
755	758	— 3
771	772	— 2
793	787	+ 6

Die Differenzen sind nicht grösser als die möglichen Beobachtungsfehler.

Ich versuchte auch die Reibung des Aetherdampfes bei sehr kleinen Drucken zu beobachten, aber auch hier löste sich der condensirte Wasserdampf von den Wänden los und vergrösserte die Reibung, weil die Reibungsconstante des Wasserdampfes grösser ist als die des Aethers.

Ich erhielt bei

$$p = 32{,}9^{\mathrm{mm}} \qquad \eta = 0{,}0000733$$

und bei

$$p = 0{,}03^{\mathrm{mm}} \qquad \eta = 0{,}0000832.$$

Weiter lasse ich die Versuchszahlen anderer Dämpfe folgen.

Alkoholdampf.

17. April		18. April		
Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5
148,4	143,6	143,6	144,9	143,4
140,8	136,5	136,5	137,9	135,9
133,8	129,5	129,7	130,9	129,5

	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4	Nr. 5
	127,0	122,8	123,5	124,6	122,9
	120,7	116,7	117,0	118,6	116,8
	114,6	110,7	111,1	112,6	110,9
	108,8	105,1	105,0	107,0	105,6
	103,6	99,7	100,7	101,9	100,1
	98,0	94,7	95,7	96,7	95,1
	92,9	89,9	89,9	92,1	90,4
	88,2	85,0	86,5	87,4	85,9
	83,9	80,9	82,0	82,9	81,7
	79,6	76,7	78,0	78,9	77,7
	75,8	72,7	74,0	74,9	73,8
	71,7	69,0	70,6	72,2	70,0
$t =$	17,2° C.	17,2° C.	16,4° C.	16,4° C.	16,8° C.
$\tau =$	16,572″	16,572″	16,572″	16,572″	16,572″
$p =$	32,5^{mm}	32,5^{mm}	29,9^{mm}	29,9^{mm}	11,4^{mm}

19. April

	Nr. 6	Nr. 7	Nr. 8	Nr. 9	Nr. 10
	149,6	145,6	143,6	133,7	144,8
	141,9	138,0	136,0	126,9	137,7
	134,7	131,6	129,4	120,5	130,7
	128,0	124,8	122,9	114,4	124,1
	121,8	118,7	116,7	108,6	117,8
	115,6	112,7	110,7	103,0	111,8
	109,7	107,0	105,1	97,9	106,2
	104,1	101,8	99,9	92,9	100,9
	98,9	96,7	94,9	88,0	95,9
	93,9	91,8	89,9	83,8	90,9
	89,0	87,0	85,7	79,6	86,6
	84,8	82,7	81,1	75,6	82,7
	80,5	78,7	77,2	71,8	78,8
	76,6	74,6	73,1	68,0	74,0
	72,6	70,9	69,5	64,7	70,0
$t =$	16,7° C.	16,7° C.	16,7° C.	17,4° C.	17,4° C.
$\tau =$	16,572″	16,572″	16,572″	16,572″	16,572″
$p =$	11,9^{mm}	11,9^{mm}	11,9^{mm}	29,5^{mm}	29,5^{mm}

20. April

Nr. 11		Nr. 12	
139,9	97,7	143,6	100,1
132,9	92,8	136,5	94,9
126,6	87,9	129,7	90,2
120,0	83,8	123,0	85,8
114,0	79,3	116,8	81,4
108,2	75,2	110,9	77,2
102,9	71,8	105,6	73,1
68,0		69,7	
$t = 16{,}4^{\circ}$ C.		$16{,}5^{\circ}$ C.	
$\tau = 16{,}572''$		$16{,}572''$	
$p = 34{,}2^{mm}$		$34{,}2^{mm}$	

Die Berechnung ergab folgende Werthe der logarithmischen Decremente und der Reibungsconstante.

Nr.	t	λ	η
1	17,2° C.	0,011256	0,0000891
2	17,2	12330	897
3	16,4	11078	877
4	16,4	10952	867
5	16,8	11124	880
6	16,7	11227	889
7	16,7	11146	882
8	16,7	11268	892
9	17,4	11280	892
10	17,4	11171	884
11	16,4	11162	883
12	16,6	11211	887
	16,8° C.	Mittel	0,0000885

Vor dem Versuche 5 wurde etwas Alkoholdampf durch Schwefelsäure absorbirt, daher etwas kleinerer Druck. Vor den Versuchen 9 und 10 und ebenso vor 11 und 12 wurde der Apparat mit Dampf neu gefüllt. Wurde etwas Dampf im Gefässe A abgesperrt, so wurde er vollständig absorbirt; derselbe war somit luftfrei.

Wasserdampf.

Der Apparat wurde sehr gut getrocknet, die Hähne sorgfältig geputzt und mit Hahnfett geschmiert, die Glasfeder *f* und die Dampfröhre *de* mittelst Siegellack frisch eingekittet und schliesslich der Apparat bis auf 0,03^{mm} evacuirt und auf die beschriebene Weise mit Wasserdampf gefüllt.

28. April.

	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr 4.
	143,3	142,5	149,6	149,6
	135,5	134,5	141,5	141,5
	127,9	126,9	133,8	133,7
	120,9	120,0	126,6	126,6
	114,3	113,8	119,6	119,7
	107,9	107,3	113,0	113,1
	102,2	101,7	107,0	107,0
	96,7	95,9	101,2	101,2
	91,2	90,8	95,8	95,8
	86,1	85,8	90,7	90,7
	81,7	80,9	85,7	85,7
	77,1	76,9	81,0	81,0
	72,9	72,2	76,8	76,8
	68,9	68,2	72,6	73,0
	65,0	64,7	68,6	68,6
$t =$	16,2° C.	16,2° C.	17,2° C.	17,2° C.
$p =$	13,0″	13,0	12,7	12,7
$\tau =$	16,569	—	—	—

Nr.	t	λ	η
1	16,2° C.	0,012147	0,0000962
2	16,2	12163	963
3	17,2	12248	970
4	17,2	12287	973
	16,7° C.	Mittel	0,0000967

Versuche von Kundt und Warburg[1]) ergaben für die Reibungsconstante des Wasserdampfes $\eta = 0,0000975$ bei $t = 20,6°$ C. und $p = 16,1^{mm}$ oder auf 16,7° C. reducirt 0,0000960, welcher Werth mit dem obigen sehr gut übereinstimmt.

1) Pogg. Ann. Bd. 155 S. 541.

Benzoldampf.

Der Apparat wurde abermals getrocknet und mit Benzoldampf gefüllt. Nachstehend die Versuchszahlen.

	2. Mai		3. Mai	
	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4
	149,6	145,1	144,3	144,1
	142,9	138,8	138,0	137,8
	136,7	132,9	132,0	131,7
	130,8	127,3	126,6	126,1
	125,3	121,7	120,8	120,8
	119,8	116,4	115,7	115,6
	114,6	111,1	110,7	110,6
	109,7	106,7	106,0	105,7
	104,9	101,9	101,7	101,1
	100,3	97,6	97,0	96,9
	95,9	93,1	92,9	92,8
	91,9	89,1	88,9	88,8
	87,8	85,3	85,0	84,9
	84,0	81,8	81,7	81,1
	80,2	78,0	78,1	77,9
$t =$	16,2° C.	16,2° C.	17,3° C.	17,3° C.
$\tau =$	16,570″	16,570″	16,570″	16,570″
$p =$	Maximum	Maximum	40,5^{mm}	41,5^{mm}

Nr.	t	λ	η
1	16,2° C.	0,009651	0,0000764
2	16,2	9595	759
3	17,3	9556	756
4	17,3	9583	758
	16,8° C.	Mittel	0,0000759

Acetondampf.

21. Mai.

Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4
147,7	143,8	139,7	146,7
141,5	137,7	133,6	140,8
134,9	131,8	127,6	134,4
129,0	126,7	121,8	128,3
123,2	119,8	116,5	122,9

	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4
	117,9	114,7	110,0	117,1
	112,6	109,5	106,2	112,0
	107,7	104,7	101,7	107,0
	102,8	99,9	97,0	102,2
	98,0	95,7	92,8	97,8
	93,8	91,1	88,7	93,3
	89,5	87,1	84,7	89,2
	85,7	83,3	80,8	85,3
	81,8	79,6	77,4	81,4
	78,1	76,0	74,0	78,0
$t =$	17,8° C.	17,8° C.	18,2° C.	18,2° C.
$\tau =$	16,572″	16,572″	16,572″	16,572″
$p =$	118,0^{mm}	118,0^{mm}	132,5^{mm}	132,5^{mm}

Nr.	t	λ	η
1	17,8° C.	0,0098497	0,0000780
2	17,8	98439	779
3	18,2	98802	782
4	18,2	98184	777
	18,0° C.	Mittel	0,0000780

Schwefelkohlenstoffdampf.

26. Mai.

Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3
151,4	149,4	148,9
143,2	141,0	140,5
135,3	133,3	132,6
127,5	125,7	125,3
120,6	118,8	118,6
113,7	112,1	111,6
107,5	105,8	105,7
100,6	99,9	99,6
95,7	94,5	94,3
90,5	89,4	89,7
85,5	84,4	84,0
80,7	79,7	79,6
76,0	75,1	74,1

	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3
	71,7	71,0	70,5
	67,7	67,0	66,5
$t =$	17,2° C.	17,1° C.	17,0° C.
$\tau =$	16,575″	16,575″	16,575″
$p =$	219,4	219,4	219,4

27. Mai.

	Nr. 4	Nr. 5	Nr. 6
	146,6	149,3	128,8
	138,7	141,1	121,4
	130,8	133,1	114,6
	123,6	125,9	108,0
	116,8	118,8	102,1
	109,8	112,0	96,3
	103,9	105,8	90,9
	98,0	99,9	85,9
	92,7	94,3	80,9
	87,5	89,0	76,7
	82,5	84,0	72,1
	78,0	79,1	68,0
	73,7	74,8	64,1
	69,3	70,7	60,8
	65,5	66,7	57,1
$t =$	16,7° C.	16,7° C.	16,7° C.
$\tau =$	16,589″	16,589″	16,589″
$p =$	228,6	228,6	228,6

Nr.	t	λ	η
1	17,2° C.	0,012450	0,0000985
2	17,1	12436	984
3	17,0	12462	986
4	16,7	12604	997
5	16,7	12513	989
6	16,7	12601	996
	16,9° C.	Mittel	0,0000990

Chloroformdampf.

6. Juni.

Nr. 1	Nr. 2
142,5	143,8
134,3	135,6

Nr. 1	Nr. 2
126,6	127,7
119,0	119,9
112,0	113,0
105,9	106,7
99,7	100,6
93,9	94,6
88,6	88,9
83,5	82,9
78,9	79,0
74,2	74,3
69,8	70,9
65,9	65,9
62,0	61,9
$t = 17{,}4^\circ$ C.	$17{,}4^\circ$ C.
$\tau = 16{,}580''$	$16{,}580''$
$p = 74{,}9^{mm}$	$74{,}9^{mm}$

Nr.	t	λ		η
1	$17{,}4^\circ$ C.	0,013001		0,0001028
2	17,4	13021		1030
	$17{,}4^\circ$ C.		Mittel	0,0001029

Wasserstoff.

Das Gas wurde aus Zink und verdünnter Schwefelsäure gewonnen und in einer Waschflasche mittelst concentrirter Schwefelsäure getrocknet. Der Apparat wurde zweimal nach einander mit H beim Atmosphärendrucke von $750{,}9^{mm}$ gefüllt. Die Schwingungsdauer war $16{,}579''$.

27. Juni.

Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4
146,3	146,6	144,9	148,8
138,9	139,3	137,7	141,5
131,7	131,7	130,5	133,8
124,8	125,0	123,8	126,9
118,5	118,5	117,2	120,5
111,8	112,0	111,0	114,0
106,0	106,7	105,2	108,3
100,8	100,9	99,9	102,9

	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3	Nr. 4
	95,6	95,8	94,8	97,3
	90,6	90,8	89,8	92,2
	85,9	85,9	83,9	87,6
	81,1	81,7	80,9	81,9
	77,0	77,1	76,7	78,8
	72,9	73,1	72,8	74,6
	69,1	69,2	68,9	70,8
$t =$	21,6° C.	21,6° C.	21,3° C.	21,2° C.

28. Juni.

	Nr. 5	Nr. 6	Nr. 7
	147,6	142,4	142,4
	140,0	135,0	134,9
	132,7	128,2	127,9
	125,8	121,6	121,5
	119,1	115,0	114,9
	112,9	109,0	108,9
	107,1	103,7	103,6
	101,7	98,1	98,0
	96,1	93,1	92,9
	91,2	88,7	88,1
	86,6	83,7	83,7
	82,0	79,1	79,1
	77,9	75,1	75,0
	73,8	71,2	71,0
	69,9	67,7	67,7
$t =$	20,4° C.	20,5° C.	20,8° C.

Nr.	t	λ	η
1	21,6° C.	0,011594	0,0000917
2	21,6	11589	917
3	21,3	11548	914
4	21,2	11538	913
5	20,4	11594	917
6	20,5	11543	913
7	20,8	11585	917
	21,1° C.	Mittel	0,0000915

Vor dem Versuche 6 wurde der Apparat noch einmal mit H gefüllt. — In der nächstfolgenden Tabelle bedeutet ϱ die Dichte, η den

Mittelwerth der Reibungsconstante bei der Temperatur t, η_0 die Reibungsconstante bezogen auf 0° C.

Bei der Reduction wurde angenommen, dass die Reibung aller Dämpfe der absoluten Temperatur direct proportional ist, und der Ausdehnungscoëfficient sämmtlicher Dämpfe = 0,0042 gesetzt; u_0 ist die Molekulargeschwindigkeit in Metern und l_0 die mittlere Weglänge in Centimetern.

	ϱ	t	η	η_0	u_0	l_0
Luft	1,0000	16,7° C.	0,0001830	0,0001750	485,0	0,0000082
Wasserstoff (H_2) . . .	0,0692	21,1	915	870	1841,0	151
Wasserdampf (H_2O) . .	0,6230	16,7	967	904	613,5	58
Schwefelkohlenstoff (CS_2)	2,631	16,9	990	924	298,3	29
Chloroformdampf ($CHCl_3$)	4,138	17,4	1029	959	238,1	24
Alkoholdampf (C_2H_5OH) .	1,593	16,8	885	827	382,9	33
Acetondampf (C_3H_6O) .	2,008	18,0	780	725	341,8	26
Benzoldampf (C_6H_6) . .	2,695	16,8	759	709	295,4	22
Aetherdampf ($C_4H_{10}O$) .	2,562	16,0	729	683	303,1	22

Die mittlere Weglänge des H_2 0,0000151 ist in guter Uebereinstimmung mit dem Werthe 0,0000153, welchen Herr Director Stefan in seiner Abhandlung: „Ueber die dynamische Theorie der Diffusion der Gase" aus der mittleren Weglänge für Luft 0,0000083 und der Verhältnisszahl der Reibungsconstanten von Luft und H_2, welche sich aus den Graham'schen Versuchen ergibt, berechnet hat[1]).

Beziehung zwischen dem Brechungsexponenten und der mittleren Weglänge.

In der erwähnten Abhandlung hat Herr Director Stefan auch auf eine merkwürdige Beziehung hingewiesen, welche zwischen dem Brechungsexponenten und der mittleren Weglänge stattfinden muss. Die Ansicht, dass Moleküle Kugeln mit verdichteten Aetherhüllen darstellen, führt consequenterweise zu folgender Betrachtung: Das Licht pflanzt sich im leeren Raume mit einer grösseren Geschwindigkeit fort als in irgend einem Medium, z. B. in Gasen. Nach Fresnel liegt die Ursache davon darin, dass die mittlere Dichte des Aethers innerhalb

1) Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien Bd. 65, Jahrg. 1872.

eines Körpers grösser ist als im leeren Raume. Sind nun Gasmoleküle von Aetherhüllen umgeben, so ist eine Beziehung zwischen dem Brechungsexponenten der Gase und der Grösse ihrer Moleküle zu erwarten. Gase mit grösseren Molekülen müssen das Licht stärker brechen als Gase mit kleineren Molekülen. Da andererseits durch die Grösse der Moleküle die mittlere Weglänge bestimmt ist, so müssen Gase mit grösserer mittlerer Weglänge kleinere Brechungsexponenten besitzen. Diese erwartete Beziehung zwischen jenen Constanten hat Herr Director Stefan bei Gasen nachgewiesen.

Leider sind von Dulong die Brechungsexponenten nur für zwei der von mir untersuchten Dämpfe bestimmt worden, für Schwefelkohlenstoff und Aether; es sind die grössten bisher beobachteten Brechungsexponenten. Wie aus der hier folgenden Zusammenstellung zu ersehen ist, zeigen die Brechungsexponenten dieser (und wahrscheinlich auch aller) Dämpfe dieselbe Beziehung zu den mittleren Weglängen wie die der Gase.

	l	n	$10^{11}(n-1)l_0$
Wasserstoff	0,0000151	1,000138	208
Luft	82	1,000294	241
Schwefelkohlenstoff	29	1,001500	435
Aether	22	1,001530	334

Es möge hier noch die Zusammenstellung der betreffenden Constanten für andere Gase, wie sie in der erwähnten Abhandlung angegeben ist, Platz finden.

	l	n	$10^{11}(n-1)l_0$
Wasserstoff	0,0000139	1,000138	192
Sauerstoff	74	1,000272	201
Luft	71	1,000294	209
Kohlenoxyd	65	1,000340	221
Sumpfgas	59	1,000443	271
Kohlensäure	50	1,000449	224
Stickoxydul	42	1,000503	221
Schwefelige Säure	39	1,000665	259

Aus den letzten Columnen ersieht man noch, dass, während das Product $10^{11}(n-1)\,l_0$ für einige Gase eine nahezu constante Zahl ist, dieses bei Dämpfen nicht mehr der Fall ist. Die Differenzen sind auch zu gross, dass dieselben durch Ungenauigkeit in der Bestimmung des n und l erklärt werden könnten.

Beziehung zwischen dem Molekularvolumen und der Reibungsconstante.

Nach der kinetischen Gastheorie wird bekanntlich ein Theilchen desto öfters mit einem andern zusammenstossen, je grösser beide sind. Theilchen von kleineren Dimensionen werden öfters vorbeifliegen, ohne sich gegenseitig zu treffen, und daher auch grössere mittlere Weglängen haben, als Theilchen von grösseren Dimensionen. Je grösser aber die mittlere Weglänge, desto schneller erfolgt die Uebertragung der Bewegung von Stelle zu Stelle des mit Gas erfüllten Raumes. Daraus ist es ersichtlich, dass es möglich ist, aus den Bewegungserscheinungen der Gase auf die Grösse ihrer Theilchen zu schliessen. Lothar Meyer[1]) und Alexander Naumann[2]) benützten die Reibung, um die Molekularvolumina für die von Graham untersuchten Stoffe zu berechnen. Es ist nämlich nach der kinetischen Theorie der Gase die Reibungsconstante

$$\eta = \frac{mu}{4\pi s^2},$$

wo m die Masse des Theilchens, u seine Geschwindigkeit, s den Halbmesser der Wirkungssphäre des Moleküls bezeichnet. Für das Molekularvolumen, worunter der von einem Molekül erfüllte Raum zu verstehen ist, in welchen andere Massen nicht eindringen können, ohne das Molekül in seinem bisherigen Bestand zu zerstören, ergibt sich

$$v = \frac{4}{3}\pi s^3 = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}\left(\frac{mu}{\eta}\right)^3},$$

und da bei derselben Temperatur für alle Gase

$$\frac{mu^2}{2} = \text{const. ist,}$$

$$v = C\sqrt{\left(\frac{\sqrt{m}}{\eta}\right)^3},$$

wo C eine für alle Gase bei derselben Temperatur gleiche Constante bedeutet. Für das Verhältniss der Molekularvolumina zweier Gase ergibt sich daher

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\sqrt[4]{\frac{m_1}{m_2}} \cdot \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}\right)^3.$$

1) Ann. d. Chem. u. Pharm. 1867 Bd. 5 Suppl. S. 129.

2) Daselbst S. 152.

$\frac{m_1}{m_2}$ ist durch das Verhältniss der Molekulargewichte gegeben. Setzt man $m_2 = 2$, $\eta_2 = 0{,}000087$, so lässt sich nach der letzten Formel v_2 des Wasserstoffes berechnen, wenn v_1 auf anderem Wege experimentell bestimmt ist. Die so berechneten Werthe v_2 enthält die siebente Columne der nachfolgenden Tabelle.

Wird $v_2 = 1$ gesetzt, so erhält man nach der obigen Formel die Molekularvolumina, bezogen auf das Molekularvolumen des Wasserstoffes. m ist das Molekulargewicht, n die Anzahl der Atome.

Dämpfe	Zusammensetzung	m	n	v_1 beobachtet	v_1 berechnet	v_2	$\frac{v_1}{v_2}$
Wasserstoff . . .	H_2	2	2	—	—	—	1
Wasser	H_2O	18,0	3	18,8	18,8	3,84	4,9
Schwefelkohlenstoff	CS_2	76,0	3	62,2— 62,4	62,3	4,45	14,0
Chloroform . . .	$CHCl_3$	119,5	5	84,8— 85,7	84,9	4,56	18,6
Alkohol	C_2H_6O	46,0	9	61,8— 62,5	62,8	5,56	11,3
Aceton	C_3H_6O	58,0	10	77,3— 77,6	78,2	4,78	16,4
Benzol	C_6H_6	78,0	12	96,0— 99,7	99,0	4,67	21,2
Aether	$C_4H_{10}O$	74,0	15	105,6—106,4	106,8	4,94	21,6
					Mittel	4,68	

In der Columne v_1 sind die beobachteten und berechneten Werthe für die Molekularvolumina flüssiger Verbindungen bei deren Siedepunkten zusammengestellt. Die Berechnung geht von der Annahme aus, dass den Atomen der Elemente folgende Volumina beizulegen sind[1]:

$$\begin{aligned} v(H &= 1) &= 5{,}5 \\ v(C &= 12) &= 11{,}0 \\ v(S &= 32) &= 22{,}6 \\ v(Cl &= 35{,}5) &= 22{,}8 \\ v(Oa &= 16) &= 7{,}8 \\ v(Oi &= 16) &= 12{,}2 \end{aligned}$$

Oa ausserhalb des Radicals, *Oi* im Radical. Auffallend ist es, dass das Molekularvolumen des Wasserstoffes in flüssigen Verbindungen

1) H. Kopp, Zur Stöchiometrie der physikalischen Eigenschaften chemischer Verbindungen. Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. 96 S. 1, 153, 303.



(11,0) mehr als doppelt so gross ist als das aus der Reibung berechnete Molekularvolumen des freien Wasserstoffes (4,68)[1].

Nach Lothar Meyer[2]) liegt der Grund dieses Unterschiedes in folgendem Umstande. Bei der Bestimmung des Molekularvolumens aus der Dichte der flüssigen Verbindungen wird der leere Raum mitgemessen, welcher den Atomen für ihre Bewegungen offen steht; dagegen wird aus der Grösse des Hindernisses, welches ein Theilchen für das andere bildet, nur das Volumen des Gastheilchens selbst bestimmt.

Die Vorstellung, dass das freie Wasserstoffmolekül ein kleineres Volumen einnimmt als dasjenige in flüssigen Verbindungen, kann noch einen anderen Erklärungsgrund haben. Sind Moleküle Kugeln mit Aetherhüllen von veränderlicher Dichte umgeben, so werden zwei solche Moleküle etwa beim centralen Stosse auf einander einwirken, sobald sie in eine Distanz gleich der Summe der Radien der wirklichen Wirkungssphären gelangen. Die Action dauert so lange, bis die lebendige Kraft vernichtet und umgekehrt wird. Moleküle mit grösseren Geschwindigkeiten im gasförmigen Zustande werden sich einander mehr nähern und gegenseitig mit ihren Aetherhüllen mehr durchdringen als Moleküle mit kleineren Geschwindigkeiten im flüssigen Zustande. Im ersten Falle muss daher der Radius der scheinbaren Wirkungssphäre, somit auch das Molekularvolumen kleiner sein als im letzteren.

Zu derselben Annahme wird man noch durch eine andere Thatsache geführt, wie Herr Director Stefan[3]) in der erwähnten Abhandlung gezeigt hat.

Bekanntlich ergaben die Versuche über die Reibung der gasförmigen Körper das Resultat, dass die Reibungsconstante leichter compressibler Gase nahezu der absoluten Temperatur proportional ist. Für die schwerer compressiblen Gase ist die Potenz der absoluten Temperatur grösser als $^1/_2$. Die Theorie der inneren Reibung liefert

1) Aus den Reibungsconstanten, welche O. E. Meyer aus den Transpirationszeiten der von Graham untersuchten Stoffe berechnete, ergab sich nach der Rechnung von Loth. Meyer als Molekularvolumen des freien Wasserstoffes 6,0, welcher Werth etwas grösser ist als der von mir gefundene 4,7. Ann. d. Chem. u. Pharm. 5. Suppl.-Bd. S. 140.

2) Ann. d. Chem. u. Pharm. 5. Suppl.-Bd. S. 144.

3) Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien Bd. 65, Jahrg. 1872.

für die Reibungsconstante η eines Gases, welches unter dem Drucke p steht, die Formel

$$\eta = \frac{p}{a},$$

worin a die Zahl der Stösse bedeutet, welche ein Molekül in diesem Gase in der Zeiteinheit erleidet. Nach Clausius ist ferner

$$a = \frac{4}{3} N_0 \pi s^2 c,$$

darin N_0 die für alle Gase gleiche Zahl Moleküle in der Volumeinheit bei 0° C. und 760^{mm}, c die Molekulargeschwindigkeit und s der Radius der Wirkungssphäre.

p ist der absoluten Temperatur und a der Quadratwurzel derselben proportional; daher müsste η auch der Quadratwurzel der absoluten Temperatur proportional sein. Um die Theorie mit der Erfahrung in Uebereinstimmung zu bringen, müsste man annehmen, dass

$$s^2 c = \text{const.}$$

ist[1]), somit dass s mit der Geschwindigkeit, resp. Temperatur abnimmt, und dieses hätte den mechanischen Sinn, dass die Aethersphären zusammenstossender Moleküle sich gegenseitig durchdringen.

Durch Multiplication der letzten Columne mit 4,68 erhält man die hier folgenden Werthe der Molekularvolumina, die mit den von Kopp berechneten zusammengestellt sind.

Dämpfe aus	v	
	Reibung	nach Kopp
Wasserstoff	4,7	—
Wasser	22,9	18,8
Schwefelkohlenstoff	65,5	62,3
Chloroform	87,1	84,9
Alkohol	52,9	62,8
Aceton	76,8	78,2
Benzol	99,2	99,0
Aether	101,1	106,8

1) Für sämmtliche bisher untersuchte Gase muss $s^2 = \frac{\text{const}}{T^n}$ und n grösser als Null, aber höchstens $= 1/2$ sein.

Die Uebereinstimmung ist eine solche, wie sie bei derartigen Versuchen überhaupt erwartet werden kann.

Von Interesse wären Versuche über innere Reibung in Gasgemischen und Dämpfen, welche einer homologen Reihe angehören, und diese beabsichtige ich zum Gegenstande meiner nächsten Untersuchungen zu wählen.

Nachschrift.

In der erwähnten Abhandlung: „Ueber dynamische Theorie der Diffusion der Gase“ hat Herr Director Stefan den Widerstand, welchen ein Gastheilchen bei der Bewegung in einem zweiten Gase erfährt, als Function der Massen und Durchmesser der Moleküle und ihrer Temperatur berechnet.

Mit Hilfe der dort gefundenen Formeln ist es möglich, aus den Diffusionscoëfficienten die mittlere Weglänge zu berechnen. Versuche über Verdampfung (Ber. d. k. Wiener Akademie 1873 Bd. 68 S. 389) lieferten für Aetherdampf-Luft die Diffusionsconstante = 0,082 und für Schwefelkohlenstoff-Luft = 0,099, welche Zahlen auf Centimeter als Längen-, Secunde als Zeit-Einheit bezogen sind. — Unter Annahme der mittleren Weglänge für Luft = $0{,}0000071^{cm}$, welcher Werth sich aus den Loschmidt'schen Diffusionsversuchen ergibt, berechnet Herr Director Stefan aus den obigen Diffusionscoëfficienten die mittlere Weglänge für

Aetherdampf . . $l =$ 0,0000023
Schwefelkohlenstoff 0,0000032,

welche Werthe mit den Resultaten meiner Versuche:

Aetherdampf . . $l =$ 0,0000022
Schwefelkohlenstoff 0,0000029

sehr gut übereinstimmen, wiewohl dieselben auf zwei ganz verschiedenen Wegen gefunden worden sind.

Es wäre von Interesse, die Stefan'schen Verdampfungsversuche auch mit anderen Dämpfen auszuführen, um die so erhaltenen Resultate mit denen der inneren Reibung zu vergleichen.

Kleinere Mittheilungen.

Projectionswellenmaschine.

Von

A. Weinhold.

(Hiezu Tafel XVIII.)

Veranlasst durch den Aufsatz von Terquem[1]) über einen Apparat zur Demonstration der Schallfortpflanzung in Gasen hat Herr Mechaniker Stöhrer in Leipzig einen Luftwellen-Projectionsapparat construirt, der sich von dem Terquem'schen dadurch unterscheidet, dass anstatt der geradlinigen Bewegung rechteckiger Glasplatten eine rotirende kreisförmiger Platten angewandt ist; der relativ grosse freie Raum zwischen Condensor und Projectionskopf beim Skioptikon macht die Aufstellung des Rotationsapparates sehr bequem.

Die von Herrn Stöhrer zuerst hergestellten Platten waren, von der Veränderung des Coordinatensystems abgesehen, ganz den Terquem-schen nachgebildet; dem entsprechend hatte sich auch eine Ungenauigkeit aus einer Terquem'schen Figur eingeschlichen. In Fig. 7 Taf. IX des Terquem'schen Aufsatzes ist die Reflexion eines elementaren Stosses an den offenen Enden einer Röhre dargestellt. Dabei fällt, wenn die Verdichtung an das Ende der Röhre gelangt ist, das vorletzte Molekül mit dem letzten, das seine Stellung gar nicht ändert, dauernd zusammen, es entsteht also eigentlich eine unendlich starke Verdichtung; so kommt die Verdünnung auf eine nicht wirklich mögliche Weise zu Stande, und nachdem sie die Röhre rückwärts durchlaufen hat, sind alle Moleküle gegen ihre ursprüngliche Lage bedeutend nach der Seite verschoben — sollte in ähnlicher Weise die Reflexion mehrfach wiederholt werden, so würde eine förmliche Vorwärtsbewegung der Moleküle zu Stande kommen.

Eine wirklich correcte Darstellung einer Reflexion solcher elementaren Stösse am freien Ende einer Reihe von Molekülen ist deshalb

---

1) Diese Zeitschrift Bd. 10 (1874) S. 80 ff.

nicht möglich, weil sie in Wirklichkeit nicht existirt; bei den Luftwellen ist die Art der Bewegung eine wesentlich andere, bei einer am Ende freien Reihe loser elastischer Kugeln (Billardkugeln) gibt es weder eine Reflexion der Bewegung am Ende für den Verdichtungsstoss, noch überhaupt eine Fortpflanzung des Verdünnungsstosses, und bei einer Reihe durch elastische Kräfte (Federn) verbundener Kugeln erhält man immer Verdichtung und Verdünnung zusammen.

Da es nun doch bedenklich ist, für Demonstrationen Annahmen zu machen, die an sich unmöglich sind, so wird man zur Erläuterung der Reflexion von Luftwellen besser Darstellungen von Bewegungen nehmen, die der Wirklichkeit entsprechen, wenn sie auch etwas complicirter sind.

Herr Stöhrer hat nun auf Veranlassung des Verfassers nach Zeichnungen desselben die in Fig. 1—6 Taf. XVIII, dargestellten Platten herstellen lassen. (Die Zeichnungen sind negativ dargestellt, d. h. der in der Zeichnung helle Grund ist auf den wirklichen Platten schwarz, während die schwarzen Linien der Zeichnung in Wirklichkeit durchsichtig sind.) Die Figg. 1—4 geben, vor einem radial liegenden Spalt in einem undurchsichtigen Schirme gedreht, die Reflexion eines elementaren Stosses in einer beiderseits geschlossenen Röhre, eine fortschreitende Longitudinalwelle, die Luftbewegung in einer beiderseits offenen Röhre, welche ihren Grundton gibt, und die in einer einerseits geschlossenen Röhre, welche den ersten Oberton (die Duodecime des Grundtons) gibt.

Für die Darstellung der Reflexion einer einzelnen Welle wurde die rechteckige Plattenform mit geradliniger Bewegung gewählt, weil bei einer kreisförmigen Platte von der Grösse der Figg. 1—4 die Krümmung der Curven in der Nähe des Centrums zu stark oder die Grösse der Elongationen zu gering hätte werden müssen, die Anwendung grösserer, nur am peripherischen Theile benutzter Platten aber den Apparat unnöthig vertheuern würde.

Fig. 5 gibt die Reflexion am geschlossenen Ende einer Röhre. Zieht man die entsprechende Platte von einem gegen die Längsrichtung der Platte rechtwinkligen, der Breitenrichtung parallelen Spalte vorbei, so beobachtet man, wie die erste Hälfte der Verdünnung, die Verdichtung und die zweite Hälfte der Verdünnung vom offenen Ende nach dem geschlossenen hinwandert, wie am geschlossenen Ende Verdünnung und Verdichtung an Intensität zunehmen und dann sich rückwärts fortpflanzen. (Natürlich könnte man auch die Verdichtung

vorangehen und die Verdünnung nachfolgen lassen; man hätte nur dann die Figur so zu zeichnen, dass die den Elongationen entsprechenden Ordinaten der Curven nach der entgegengesetzten Seite lägen wie in Fig. 5).

Fig. 6 gibt die Reflexion am offenen Röhrenende. Verschiebt man die entsprechende Platte von dem Spalte in der Richtung des Pfeiles, so sieht man, wie die erste Hälfte der Verdichtung, die Verdünnung und die zweite Hälfte der Verdichtung von einem Ende der Röhre nach dem andern wandert, wie in dem einer Viertelwellenlänge gleichen, letzten Röhrenstück die Elongationen zunehmen, wie das um eine Viertelwellenlänge vom Ende entfernte Theilchen (bei stehenden Wellen dem Knoten entsprechend) während einer halben Schwingungsdauer in Ruhe bleibt, endlich wie die Verdichtung in Verdünnung übergeht, so dass in der reflectirten Welle Hälfte der Verdünnung, Verdichtung, Hälfte der Verdünnung auf einander folgen[1]). Verschiebt man die Platte in der dem Pfeile entgegengesetzten Richtung, so geht bei der directen Welle die erste Hälfte der Verdünnung vorauf, dann folgt die Verdichtung und die zweite Hälfte der Verdünnung, und umgekehrt ist dann natürlich auch die Folge bei der reflectirten Welle.

Der Stöhrer'sche Apparat trägt auf einem schweren, auf den Tisch des Skioptikons zu stellenden Fussgestell eine verticale Platte mit verticalem Spalte. Ein in einer Führung horizontal beweglicher Rahmen dient zur Aufnahme der rechteckigen Platten. Die runden Platten werden an einer horizontalen, über dem oberen Spaltende liegenden Achse befestigt. Dieselben erhalten ihre Drehung entweder durch Verschieben der Peripherie mittelst des aufgelegten Fingers oder durch einen kleinen Schnurlauf mit Kurbelbewegung. Der Preis des Stöhrerschen Apparates ist 40 Mark, ohne die beiden rechteckigen Platten für Reflexion der einzelnen Welle 30 Mark.

---

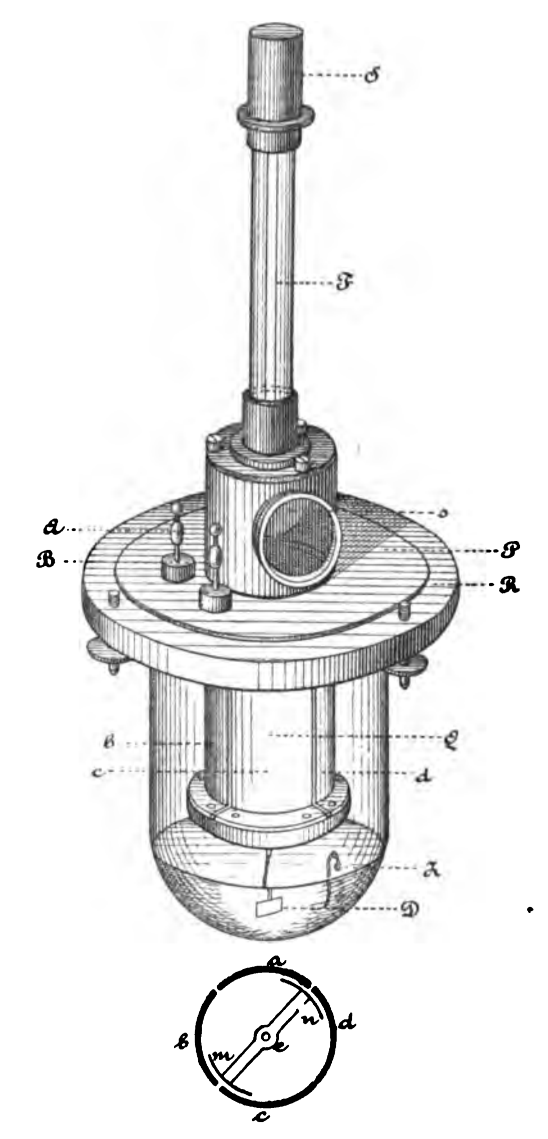
1) Beiläufig sei hier daran erinnert, wie es unstatthaft ist, Verdichtungs- und Verdünnungswelle bei Longitudinalwellen mit Wellenberg und Wellenthal bei Transversalwellen zu vergleichen; während Verdichtung und Verdünnung am festen Ende unverändert reflectirt, am freien in das Gegentheil verkehrt werden, verhält es sich bei Wellenberg und Wellenthal umgekehrt; von Verdichtung und Verdünnung entspricht je eine Hälfte einer Hälfte des Wellenberges und einer Hälfte des Wellenthales.



Cylinderquadranten-Elektrometer.

Aus dem physikalisch-mechanischen Institute
von
M. Th. Edelmann, München.

Das vorliegend in Kürze beschriebene Iustrument ist eine neue Constructionsart der Thomson'schen Quadrantenelektrometer; es besteht hier, wie aus der nebenstehenden Abbildung ersichtlich, der elektrometrische Theil aus einem vertical stehenden Cylinder *Q*, der in die vier Manteltheile *a, b, c, d* gespalten ist; diese vier Theile sind an den beiden Stirnseiten auf Hartgummiringe aufgeschraubt; die einander gegenüberliegenden Mantelstücke *b* und *d*, *a* und *c* sind unter sich leitend verbunden und stehen mit je einer von den Klemmschrauben *A* und *B* in Zusammenhang, durch welche jedem Sectorenpaare die zu messende Elektricität zugeführt werden kann.



Im Innern des eben beschriebenen Hohlcylinders *Q* hängt an der Bifilarsuspension *F, S* die mit Spiegel *s* vorgerichtete Aluminiumnadel *mn*.

Die Form dieser Nadel entspricht der Form der Quadranten; zwei einander gegenüberliegende Cylindermantelabschnitte (*m* und *n*), unter sich durch

Querarme *l* verbunden, schwingen in der Nähe der Sectoren *a*, *b*, *c*, *d*. Die Nadel endigt nach unten in eine Platinfahne *D*, welche in Schwefelsäure eintaucht und dadurch die Bewegungen der Nadel dämpft.

Von unten her ist über die Quadranten ein Glassturz in Bajonettschluss gestülpt. Ein Platindraht *Z* dringt durch ihn, führt der Schwefelsäure von einer Zamboni'schen Säule aus Elektricität zu, wodurch auch die Nadel geladen wird.

Ein Quadrantenpaar wird bei dem Versuche zur Erde abgeleitet, das andere mit der zu untersuchenden Elektricitätsquelle in Verbindung gebracht, worauf eine Drehung der Nadel erfolgt, welche Bewegung mit Spiegel und Scala zur Messung gelangt.

Das Ganze ist auf der Messingplatte *P* situirt, die drehbar in den Ring *R* eingelassen ist; der letztere ruht mit zwei Stellschrauben auf einem durchbrochenen Wandconsol, das dem Instrumente beigegeben wird.

Der Fadenabstand der Bifilarsuspension ist verstellbar, wodurch die Empfindlichkeit des Instrumentes innerhalb erforderlicher Grenzen verändert werden kann.

Das Instrument zeigt bei vorzüglicher Constanz der Angaben die bis jetzt erreichte höchste Empfindlichkeit (ein Daniell = 400^{mm} Ausschlag bei 3^{m} Scalenabstand; freie Spannung eines Neusilber-Eisen-Elementes messbar); ferner findet strenge Proportionalität zwischen Spannung und Ausschlag statt. Die Aufstellung und der Gebrauch des Instrumentes ist äusserst einfach. Eine ausführliche Beschreibung der Einrichtung und Behandlung des Instrumentes wird im zweiten Hefte des Buches „Edelmann's neuere Apparate für naturwissenschaftliche Schule und Forschung, Stuttgart" enthalten sein.

Preis sammt Consol und Zamboni'scher Säule 250 Mark.

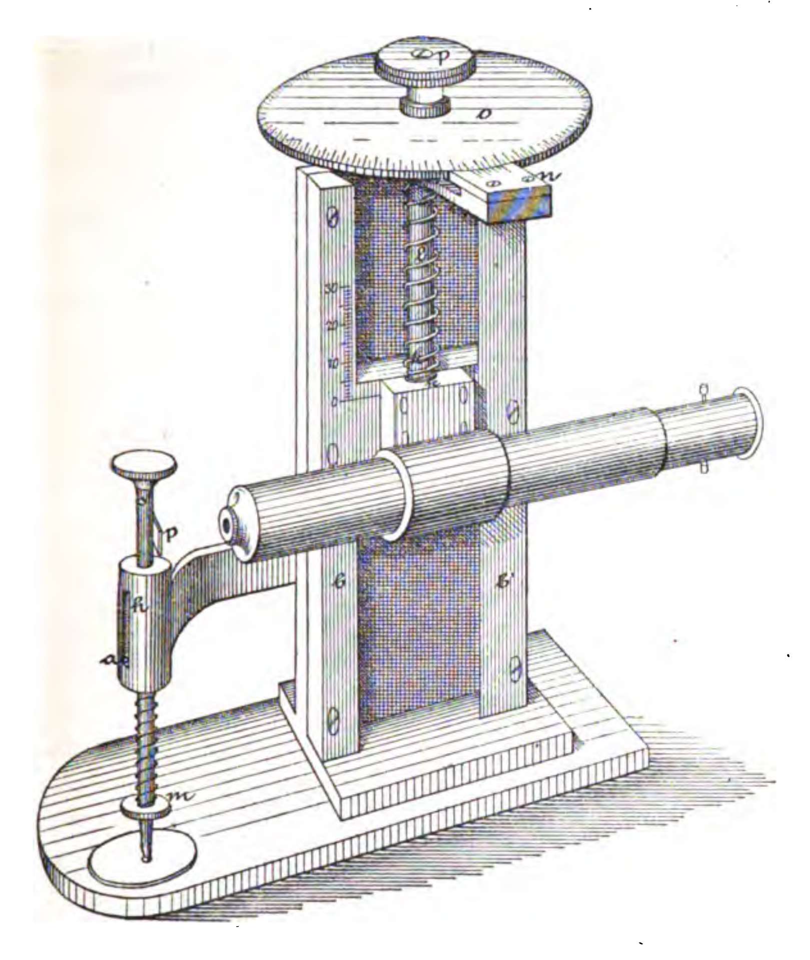
Neues Sphärometer mit Mikroskop.

Von

F. W. Breithaupt & Sohn.

In der Hülse *h* verschiebt sich senkrecht und leichtgehend der genau cylindrische stählerne Messstift *s*; die Hülse ist entsprechend längs geschlitzt, und ein Stiftchen *a* verhindert die Drehung des Messstiftes in seiner Hülse; eine schwache Spiralfeder, welche auf der

unteren Mutter *m* ruht, drückt den übrigens von selbst fallenden Messstift auf das Objectentischchen (Planglas) bezüglich das zu messende Object. Oben ist am Stift ein Silberblättchen *p* befestigt,



welches mit einem feinen Querstrich versehen ist, der als Index für das mit Parallelen versehene Mikroskop dient.

Der Mikroskophalter geht schlittenförmig zwischen den beiden Backen *b*, *b′* und besitzt die Mutter *k* für die Messschraube *l*. Letztere geht oben in einem Lager, nimmt weiterhin die getheilte Scheibe *o* und den Knopf *p* zum Drehen der Scheibe, beziehungsweise der Messschraube auf. In gleicher Höhe mit der Scheibe ist der Nonius *n* angebracht. Zur sicheren Führung ist die Messschraube mit einer Spiralfeder umgeben.

Die Mutter der Schraube besteht aus zwei Hälften, die eine ist aufgeschraubt und kann mittelst der vier Schrauben der Gang regulirt werden.

Die Messschraube hat $^1/_2{}^{mm}$ Steigung, die Scheibe ist in 100 Theile und der Nonius 4 in 5 getheilt, mithin Ablesung 0,001 ^{mm}. Als Umdrehungszähler ist eine Millimeterscala am linken Backen *b* und ein Indexstrich am Mikroskophalter angebracht.

Monatmittel der magnetischen Declination und der Horizontal-Intensität zu Prag im Jahre 1878.

(Hornstein, astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1878.)

1878	Declination	Horizontale Intensität
Januar	11° 10,81′	1,9543
Februar	10,84	544
März	10,73	549
April	8,65	551
Mai	7,76	554
Juni	7,66	552
Juli	8,27	561
August	7,06	556
September	6,54	554
October	6,51	559
November	5,70	559
December	4,08	1,9548
Jahr	11° 7,88′	1,9553

Bibliographische Mittheilung.

Rob. H. Thurston. Friction and Lubrication. New York, published by the Railroad Gazette, 73 Broadway.

Dr. **E. Wrobel.** Die Physik in elementar-mathematischer Behandlung. Rostock, Wilh. Werther's Verlag.

Ludw. Ballauf. Die Grundlehre der Physik in elementarer Darstellung. Langensalza, Herm. Beyer & Söhne. Lfg. 1 und 2.

Berichtigung.

Seite 301 Zeile 12 von oben lies ± 0,01° C. anstatt + 0,001° C.

Bezugsquellen-Liste.

Wir empfehlen den verehrlichen Instituten zur Verfertigung von physikalischen Apparaten etc. die Einschaltung Ihrer werthen Firma unter dieser Rubrik. Preis pro Zeile und Jahr M. 5. —.

Hochachtungsvoll

München,
Glückstrasse Nr. 11.

Die Expedition des Repertorium für Experimental-Physik
R. Oldenbourg.

Bezeichnung der Firma	Fabrikate und Angabe der Specialität
***Albert**, Frankfurt a. M., Mainzerstrasse.	Physikalische Vorlesungsapparate.
***Anstalt**, optische, astro-physikal. Werkstätte, Würzburg (Eugen Hartmann).	Specialität: Optische Gläser, Präcisions-Instrumente für Physik.
Baur, Gustav, Stuttgart, Blumenstrasse 13.	Physikalische Apparate, elektro-medicinische Apparate, Apparate für Galvanoplastik, Haustelegraphen etc.
Breithaupt, F. W., & Sohn, Cassel.	Astronomische u. geodätische Instrumente.
Cleff, C. & F., Remscheid-Hasten.	Elektrische u. speciell magnet-elektrische Apparate.
Ducretet, E., & Co., rue des Feuillantines, Paris.	Cailletet's Apparate für Liquefaction der Gase.
Edelmann, M. Th., München.	Physikalische, meteorologische, physiologische, medicin. etc. Instrumente und Apparate für elektrisches Licht.
Eiss, Joseph, Mechaniker, Wien VI, Stümpergasse 10.	Puluj's Apparat zur Bestimmung des mechan. Aequivalents der Wärme.
Ertel, T., & Sohn, München, Louisenstrasse 12.	Astronomische, mathematische u. geodätische Instrumente.
Fein, C. & E., Stuttgart, Kasernenstr. 43 b.	Galvanische Batterien und elektrische Vorlesungsapparate.
Hasler, G., Telegr.-Werkstätte, Bern.	Meteorologische Registrir-Instrumente.
Heller, Mechan. Werkstätte, Nürnberg.	Physik. Apparate für Vorlesungszwecke.
Houdek, Dr. & **Hervert**, Prag, Karpfengasse.	Egger'sche elektro-magnetische Motoren.
***Kappeller**, Heinr., jun., Wien V, Kettenbrückengasse 9.	Barometer, Thermometer, Psychrometer, Aräometer etc.
Kohl, Max, Chemnitz, Flossstrasse 20.	Physikalische Instrumente und Apparate neuester Constructionen. Preiscourant neu.
Lessing, Dr., Nürnberg.	Fabrik galvanischer Kohlen.
Lorenz, G., Mech. Werkstätten, Chemnitz.	Apparate zu Weinhold's Vorschule der Experimentalphysik.
Merz, G. & S., München, Müllerstr. 11.	Optische und astronomische Instrumente.
***Miller**, F., Universit.-Mechan., Innsbruck.	Physikalische u. mathemat. Instrumente.
Oertling, Aug., Berlin, Oranienburgerstrasse 57 u. 58.	Chemische Waagen, Sextanten, mathematische Instrumente, Kreistheilungen.
Riefler, Clemens, Maria Rain u. München, Karlsplatz 29.	Fabrik mathemat. Instrumente, Reisszeuge.
Schmidt, Franz, & **Haensch**, Berlin S., Stallschreiberstrasse 4.	Spectral-Apparate, Polarisations-Apparate, Mikroskope.
***Schuckert**, Sigmund, Nürnberg.	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Galvanoplastik u. Lehranstalten.
Steinheil, C. A., & Söhne, München, Landwehrstrasse 31.	Optische und astronomische Instrumente.
Stöhrer, E., jun., Leipzig.	Apparate für Projection phys. Versuche.
Stollnreuther, C., & Sohn, München.	Physikalische Instrumente.
Vogel, C. & J., Berlin, Ritterstrasse.	Uebersponnene Drähte.
Weisser, J. G., Söhne, St. Georgen (bad. Schwarzwald).	Drehbänke für physikal. Laboratorien.
Wesselhöft, Mechaniker, Halle a. d. Saale.	Elektrische und akustische Apparate.

* Ein ausführliches Inserat befindet sich im Inseratentheile.

Zeitschrift für Angewandte Elektricitätslehre

mit besonderer Berücksichtigung

der Telegraphie, des elektrischen Beleuchtungswesens, der Galvanoplastik und verwandter Zweige.

Herausgegeben von

Dr. Ph. Carl,

Professor der Physik an der königl. Kriegs-Akademie in München,
Herausgeber des „Repertorium für Experimental-Physik".

Druck und Verlag von Rudolph Oldenbourg in München.

I. Band. **1879.** Mit Tafel XVII bis XXI. **Nr. 8.**

Abonnements.
Erscheint monatlich wenigstens einmal. — 12 Nummern bilden einen Band. — Preis pro Band 20 Mark.
Das Abonnement kann stattfinden: bei der *Verlagshandlung R. Oldenbourg* selbst, München, Glückstrasse 11,
sowie bei allen Buchhandlungen und Postämtern Deutschlands und des Auslandes.

Inserate.
Die ganze Octavseite 24 Mark, jede achtel Octavseite oder deren Bruchtheil 3 Mark. Bei Wiederholungen die Hälfte.
Inserate für 12 Nummern werden mit 10 Mark, solche für 6 Nummern mit 12 Mark für die Seite berechnet.
Beilagen bei vorheriger Einsendung eines Probe-Exemplars nach Uebereinkunft.

Inhalt:

REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE & ASTRONOMISCHE INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN.

FÜNFZEHNTER BAND.

Inhalt des 8. Heftes

(mit Tafel XIX bis XXI).

MÜNCHEN, 1879.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Bei Correspondenzen, Bestellungen etc. an die hier anzeigenden Firmen bitten wir das Repertorium für Experimentalphysik gefl. als Quelle zu nennen.

Ueber die specifische Zähigkeit der Flüssigkeiten und ihre Beziehung zur chemischen Constitution.

Von

Dr. **Richard Přibram** und Dr. **Al. Handl,**

Professoren an der Universität in Czernowitz.

(Hiezu Tafel XIX u. XX.)

(Im Auszuge aus dem 78. Bande der Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. II. Abth. Juni-Heft Jahrg. 1878 mitgetheilt von den Herrn Verfassern.)

Poiseuille[1]) folgerte aus seinen Versuchen über das Durchströmen von Flüssigkeiten durch sehr enge Röhren das Gesetz, dass durch ein enges Rohr von kreisförmigen Querschnitte, dessen Durchmesser $= D$ und dessen Länge $= L$ ist, unter dem Drucke einer Quecksilbersäule von der Höhe $= H$ in einer Zeiteinheit die Raummenge $= Q$ einer das Rohr benetzenden Flüssigkeit hindurchströmt, welche durch die Formel

$$Q = K\frac{H \cdot D^4}{L}$$

ausgedrückt werden kann, wobei der Coëfficient K, welchen Poiseuille als das Maass der „Fluidität" der betreffenden Flüssigkeit bezeichnet, für jede Flüssigkeit einen anderen, überdies von der Temperatur abhängigen Werth hat.

Für Wasser z. B. fand Poiseuille

$$K = 1836{,}724\,(1 + 0{,}0336792\,t + 0{,}0002209936\,t^2),$$

wenn man ein Millimeter als Längeneinheit und die Secunde als Zeiteinheit wählt.

Die von Poiseuille gefundene empirische Formel wurde auf Veranlassung Wiedemann's[2]) von Hagenbach auch aus theore-

1) Ann. de Chim. et Phys. Sér. 3 T. 7 p. 50 und T. 21 p. 76.

2) Wiedemann, Pogg. Ann. Bd. 99 S. 216.

tischen Betrachtungen abgeleitet, und zwar unter folgenden Voraussetzungen:

1. Die Röhrenwand wird von der Flüssigkeit vollkommen benetzt, so dass die unmittelbar an der Wand anliegende cylindrische Flüssigkeitsschicht die Geschwindigkeit = 0 hat.

2. Zwischen je zwei unmittelbar benachbarten Flüssigkeitsschichten mit ungleichen Geschwindigkeiten findet eine Reibung statt, welche der relativen Geschwindigkeit (der Geschwindigkeitsdifferenz) der beiden Schichten proportional ist.

3. Die Länge des angewendeten Rohres ist so gross und sein Durchmesser so klein, dass nahezu die ganze „Druckhöhe" als „Widerstandshöhe" verbraucht und nur eine verschwindend kleine absolute Geschwindigkeit des Ausfliessens erzielt wird.

Bezeichnet man unter diesen Voraussetzungen mit k die Grösse der Reibung zwischen zwei unmittelbar benachbarten Flüssigkeitsschichten, deren Fläche gleich der Flächeneinheit und deren Geschwindigkeitsdifferenz = 1 ist, mit anderen Worten, die Grösse der Kraft, welche nöthig ist, um eine Schicht von dem Querschnitte = 1 in einer Secunde um eine Längeneinheit längs der nächsten Schicht zu verschieben; ferner mit n die Anzahl der Moleküle auf einer Längeneinheit, so findet man die Raummenge der in der Zeiteinheit unter dem Drucke einer Wassersäule von der Höhe = h durch ein cylindrisches Rohr vom Halbmesser = r und der Länge = L ausfliessenden Flüssigkeit

$$Q = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{n}{k} \cdot \frac{hr^4}{L},$$

oder indem man $r = \frac{D}{2}, \frac{n}{k} = \frac{1}{z}$ schreibt und die Wassersäule von der Höhe = h durch eine äquivalente Quecksilbersäule von der Höhe $H = \frac{h}{13{,}596}$ ersetzt denkt:

$$Q = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{13{,}596}{16} \cdot \frac{HD^4}{L} \cdot \frac{1}{z}.$$

$z = \frac{k}{n}$ ist die Kraft, welche nöthig ist, um eine Flüssigkeitsschicht von der Fläche = 1 an der nächstliegenden um ein Stück zu verschieben, welches dem Abstande zweier Moleküle gleich ist. Hagenbach nennt z die Zähigkeit der Flüssigkeit. Ist V das unter dem

Drucke H in der Zeit t durch ein gegebenes Rohr strömende Flüssigkeitsvolumen, so ist $Q = \frac{V}{t}$; und

$$z = \frac{\pi \cdot 13{,}596}{8 \cdot 16} \cdot \frac{D^4}{LV} \cdot Ht,$$

d. h. die Zähigkeit ist proportional der Zeit, welche ein constantes Flüssigkeitsvolum zum Durchfliessen durch ein gegebenes Rohr unter constantem Drucke braucht.

Rellstab[1]) hat hiezu nachgewiesen, dass der Druck nicht nothwendig constant zu sein braucht, sondern dass man bei gleichmässiger Abnahme desselben den Mittelwerth in die Formel für Q oder Z einsetzen darf. Vergleicht man die Poiseuille'sche Formel mit der von Hagenbach, so hat man

$$Q = K \frac{HD^4}{L} = \frac{\pi \cdot 13{,}596}{8 \cdot 16 \cdot z} \cdot \frac{HD^4}{L},$$

$$\text{also } K = \frac{0{,}3337}{z}, \text{ oder } z = \frac{0{,}3337}{K}.$$

So ergibt sich für die Zähigkeit des Wassers bei 0° C.

$$z_w = 0{,}00018168.$$

Es ist wichtig, die Bemerkung zu machen, dass für die Bestimmung der Werthe

$$K = \frac{LQ}{HD^4}, \text{ oder } z = 0{,}3337 \frac{HD^4}{LQ}$$

der von den Dimensionen des Apparates abhängige Ausdruck $\frac{D^4}{LQ}$ bezüglich der Längeneinheit homogen ist, woraus folgt, dass bei Beobachtungen in verschiedenen Temperaturen die Ausdehnung des Apparates ohne Einfluss auf die Werthe von K oder z ist, also die beobachteten Veränderungen dieser Grössen mit der Temperatur wirkliche Veränderungen in den Eigenschaften der betreffenden Substanzen anzeigen.

Um aber überhaupt von den Dimensionen des angewendeten Apparates unabhängig zu bleiben und die verhältnissmässig umständliche Bestimmung des absoluten Werthes von $\frac{LQ}{D^4}$ zu umgehen, haben

1) Ueber Transpiration homologer Flüssigkeiten. Inaugural-Dissertation. Bonn 1868. S. 5.

die meisten Beobachter den Weg eingeschlagen, dass sie die unmittelbar beobachteten Durchflusszeiten (t) mit der Durchflusszeit (t_w) des Wassers durch denselben Apparat unter gleichem Drucke und bei der Temperatur 0° C. verglichen und die letztere $t_w = 100$ setzten.

Bezeichnet man das Ergebniss dieser Vergleichung mit Z, so ist

$$z : z_w = t : t_w = Z : 100 = K_w : K,$$

und wir wollen im Folgenden stets den Ausdruck

$$Z = \frac{t100}{t_w} = \frac{100 K_w}{K}$$

die „specifische Zähigkeit" oder „specifische Durchflusszeit" der betreffenden Substanz nennen.

Nachdem einmal das mechanische Gesetz der in Rede stehenden Erscheinung gefunden war, konnte man sich die Frage stellen, ob und wie die numerischen Werthe der charakteristischen Grössen K oder z (Z) mit der materiellen Beschaffenheit der einzelnen Flüssigkeiten zusammenhängen.

Die erste Richtung, nach welcher die diesbezüglichen Untersuchungen ausgedehnt wurden, hat Poiseuille[1]) selbst eingeschlagen, nachdem schon Girard einige Versuche in derselben Absicht angestellt hatte: den Einfluss zu ermitteln, welchen die Beimischung (Auflösung) fremder Stoffe auf die Durchflusszeit des Wassers oder anderer Flüssigkeiten ausübt.

Auf eine Discussion der Ergebnisse dieser Untersuchungen können wir hier verzichten, da dieselben mit dem Zwecke unserer eigenen Beobachtungen in keinem inneren Zusammenhange stehen.

Graham lenkte später[2]) die Aufmerksamkeit auch auf die Frage nach dem Zusammenhange der Durchflusszeiten homogener Flüssigkeiten mit anderen Eigenschaften derselben.

Er wählte zu seinen Untersuchungen durchwegs die Temperatur von 20° C. und verglich die hiebei beobachteten Durchflusszeiten mit der des Wassers bei derselben Temperatur, indem er diese Zeit $= 1$ setzte.

Auf Grundlage seiner Beobachtungen an Methyl-, Aethyl- und Amylalkohol, ferner an Ameisensäure, Essigsäure-, Buttersäure- und

1) Ann. de Chim. et Phys. Sér. 3 T. 21 p. 76 (1847). Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. 64 S. 129 (1848).

2) Phil. Transactions 1861 p. 373 und Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. 123 S. 90.

Valeriansäure-Aethyläther, endlich an Essigsäure, Buttersäure und Valeriansäure selbst, sprach er den Satz aus, dass die Durchflusszeit eines Alkohols, eines Aethers oder einer Säure mit dem Siedepunkte gleichzeitig wachse[1]), wozu er noch die Bemerkung fügt: „Das Wachsen der Transpirationszeit für die Alkohole, die Aether und die Säuren bei dem Aufwärtssteigen in den Reihen derselben kann mit der Vergrösserung des Molekulargewichtes in Zusammenhang stehen.“ Später[2]) sagt er:

„Dass eine Beziehung besteht zwischen der Transpirabilität der Flüssigkeiten und ihrer chemischen Zusammensetzung, ist wohl nach dem Vorangehenden als festgestellt zu betrachten. Diese Beziehung ist ähnlicher Art wie die zwischen dem Siedepunkte und der Zusammensetzung bestehende, welche von Kopp so gut festgestellt worden ist.

Vielleicht dürfte der interessanteste Theil der weiteren Entwickelung des hier in Rede stehenden Gegenstandes die Untersuchung der Transpiration homologer Reihen von Substanzen sein. Nach den noch so beschränkten Beobachtungen über Alkohole, Aether und Säuren zu schliessen, möchte die Reihenfolge der einzelnen Glieder jeder Reihe durch den Grad der Transpirabilität ebenso deutlich wie durch den der Flüchtigkeit angezeigt sein. Bei weiterer Fortführung dieser Untersuchung wäre es wahrscheinlich vortheilhaft, die Versuche für eine bestimmte, etwas höhere Temperatur anzustellen. Eine grosse Zahl von Substanzen ist bei 100° flüssig und ihre Transpirationszeiten würden sich leicht ermitteln lassen.“

Dieser von Graham angeregte Gedanke wurde bisher nur von Rellstab und Guerout weiter ausgeführt.

Rellstab's[3]) Untersuchungen zeigen zunächst darin einen Fortschritt, dass er die Veränderungen der specifischen Durchflusszeiten mit der Temperatur bei allen untersuchten Substanzen in Betracht zog; vordem hatte Poiseuille[4]) nur für das Wasser, Graham[5]) für Wasser und wasserfreien Alkohol, die Untersuchung in diesem Sinne durchgeführt. Rellstab ermittelte zwar die specifischen Durchfluss-

1) Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. 123 S. 105.

2) Ebendas. S. 108.

3) Ueber Transpiration homologer Flüssigkeiten. Inaug.-Dissert. von Ludwig Rellstab. Bonn 1868.

4) Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres 1842 p. 524.

5) Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. 123 S. 111—112.

zeiten ganz in dem Sinne, wie wir den Begriff derselben früher gegeben haben, machte aber nicht diese, sondern vielmehr die Producte aus denselben mit den Molekularvolumen der einzelnen Stoffe zum Gegenstande seiner Discussion.

Wir haben es aber für nöthig gehalten, die von Rellstab ausgeführten Untersuchungen über die Durchflusszeiten auch in Bezug auf gleiche Volumina zu discutiren, einmal weil sie denn doch das unmittelbare Ergebniss der Beobachtungen, frei von jeder Voraussetzung über Zahl und Beschaffenheit der Moleküle, repräsentiren, und ferner weil sich a priori nicht festsetzen lässt, ob die Betrachtung gleicher Volumina oder äquivalenter Mengen schliesslich zu einfacheren, allgemeinen Gesetzen führen werde.

Fig. 1—4 Taf. XIX enthalten nun die graphische Darstellung der Rellstab'schen Beobachtungen, und zwar sind daselbst die Temperaturen als Abscissen, die Durchflusszeiten (reducirt auf [Wasser von 0°] = 100) als Ordinaten eingetragen.

In dieser Weise stellt Fig. 1 das Verhalten der Alkohole und Säuren, Fig. 2 das der zusammengesetzten Aether (Ester) in Bezug auf äquivalente Mengen, Fig. 3 und 4 dieselben Grössen in Bezug auf gleiche Volumina dar.

Zur Construction dieser Linien wurden die von Rellstab durch graphische Interpolation abgeleiteten Werthe der reducirten Durchflusszeiten von je 5 zu 5° in das Netz eingetragen und die entsprechenden Puncte durch gerade Linien mit einander verbunden.

Für die Ordinaten der auf gleiche Volumina bezogenen Linien musste ein bedeutend grösserer Maassstab gewählt werden als für die Ordinaten der auf gleiche Zahl von Molekülen bezogenen, da die ersteren viel näher an einander liegen als die letzteren.

Man sieht sogleich, dass es durchaus nicht gleichgiltig ist, bei welcher Temperatur die Durchflusszeiten verschiedener Substanzen mit einander verglichen werden, und dass nicht nur die absoluten Werthe, sondern selbst die Vorzeichen der Differenzen der Durchflusszeiten gewisser Substanzen mit der Temperatur veränderlich sind.

So z. B. fliesst ein Volum Ameisensäure unterhalb 48° C. rascher, oberhalb dieser Temperatur langsamer als ein gleiches Volum Buttersäure. Es wäre aber wohl voreilig, daraus den Schluss ziehen zu wollen, dass es für je zwei homologe Säuren eine Temperatur geben müsse, bei welcher sie gleiche Durchflusszeiten haben, obwohl der

allgemeine Verlauf der Säurelinien dem Anscheine nach einer solchen Vermuthung nicht widersprechen würde. Ebenso zeigen z. B. Aethylalkohol und Essigsäure bei circa 14°, Aethylalkohol und Propionsäure bei circa 49° gleiche Durchflusszeiten, ohne dass diese Erscheinung bei einem anderen Paare der untersuchten Alkohole und zugehörigen Säuren sich innerhalb der beobachteten Temperaturgrenzen wiederholen würde.

Wenn es auch nicht leicht einem ernsthaften Beobachter in den Sinn kommen würde, aus solchen einzelnen Thatsachen, wie wir sie in den vorstehenden zwei Beispielen hervorgehoben haben, allgemeine Gesetze ableiten zu wollen, so muss doch darauf hingewiesen werden, dass, wie unsere Beobachtungen ergeben, man bezüglich der specifischen Durchflusszeiten die etwa wahrgenommenen regelmässigen Beziehungen auch nicht einen Schritt über die Beobachtungsgrenzen hinaus als richtig bleibend annehmen darf.

So stellt Rellstab im Resumé seiner Untersuchungen (Punkt 1) den Satz auf:

„Die Transpiration aller Körper nimmt mit der Temperatur zu. Die Zunahme ist für gleiche Temperaturintervalle um so bedeutender, je langsamer (soll heissen grösser) die Ausflusszeit überhaupt und je niedriger die Temperatur."

Dieser Satz gilt aber, wie die genauere Betrachtung der betreffenden Linien zeigt, nur innerhalb der einzelnen homologen Reihen der Alkohole, Säuren und Ester; denn sollte er allgemein giltig sein, so dürften keine Durchkreuzungen von Linien vorkommen, wie sie in Fig. 1 zwischen Aethylalkohol und Essigsäure, Butylalkohol und Valeriansäure, Amylalkohol und Capronsäure, oder in Fig. 3 zwischen Propionsäure, Aethylalkohol und Essigsäure, ferner zwischen Propylalkohol, Ameisensäure und Buttersäure sichtbar sind.

Auch innerhalb der homologen Reihen zeigen in Bezug auf gleich viel Moleküle die Ameisensäure und Essigsäure, in Bezug auf gleiche Volumina die Ameisensäure und Buttersäure ein von der Rellstab-schen Behauptung abweichendes Verhalten.

Eine weitere Einschränkung auf die homologen Reihen der einwerthigen Fettkörper erleidet derselbe Satz durch unsere Beobachtungen über die homologe Reihe der aromatischen Verbindungen Benzol, Toluol und Xylol, deren Resultate in Fig. 5 zusammengestellt sind, und zwar geben die unteren Linien die specifischen Durchflusszeiten für gleiche Volumina, die oberen Linien die specifischen Durch-

flusszeiten für gleich viel Moleküle, wobei das specifische Gewicht bei 0° der Berechnung des Molekularvolumens zu Grunde gelegt und dieses bei allen Temperaturen als constant angenommen ist.

Man sieht, dass die Temperaturlinien weder in der einen noch in der anderen Gruppe jenes charakteristische fächerförmige Auseinanderlaufen gegen die niedrigeren Temperaturen hin zeigen, welches dem von Rellstab ausgesprochenen Satze entspricht, und welches bei den Alkoholen, den Säuren und Estern sehr deutlich hervortritt. Man ersieht ferner aus der Fig. 5, dass die Durchflusszeiten für gleiche Raummengen

zwischen 5—15° für Xylol = Benzol > Toluol
„ 15—55° „ Xylol > Benzol > Toluol
„ 55—60° „ Xylol > Benzol = Toluol

sind; bei noch höheren Temperaturen aber würde sich endlich

Xylol > Toluol > Benzol

zeigen, was man aus später zu erörternden Gründen als das „normale" Verhalten zu betrachten geneigt sein möchte, ein Verhalten, das die auf gleich viel Moleküle bezogenen Durchflusszeiten bei allen Temperaturen zeigen.

Auch Guerout[1]) fand bei 13° C., nahezu übereinstimmend mit uns:

Benzol = Xylol = 41,4, wir 40,75
Toluol = 39,7, „ 36,5.

Daraus geht aber hervor, wie ungemein vorsichtig man mit der Uebertragung der an einer Gruppe von Substanzen constatirten Beziehungen auf andere Gruppen sein muss, und es vermehrt sich zugleich die Wichtigkeit und Schwierigkeit der Frage, bei welcher Temperatur oder bei welchen Temperaturen die Durchflusszeiten verschiedener Substanzen mit einander verglichen werden sollen, um die regelmässigen Beziehungen derselben zu entdecken.

Graham hat, wie schon früher erwähnt, die Vermuthung ausgesprochen, dass die Beobachtungen bei etwas höheren Temperaturen, etwa 100° C., vortheilhafter wären, und in der That zeigt die Betrachtung der aus Rellstab's Zahlen abgeleiteten Linien, dass bei Fortsetzung derselben in höhere Temperaturen kleinere (und vielleicht auch regelmässigere) Unterschiede zwischen den einzelnen Substanzen zum Vorschein kommen. Ein Umstand ist noch besonders einladend zu einer solchen Ausdehnung der Beobachtungen auf höhere Temperaturen.

1) Compt. rend. Vol. 81 p. 1027 (1875).

Man hat bei den Alkoholen, Estern und Säuren, von der Propionsäure angefangen, mit wachsenden Molekulargewichten auch steigende Durchflusszeiten gefunden. Die Ameisensäure und Essigsäure dagegen haben sich allen Forschern bezüglich der Durchflusszeiten für gleiche Volumina als von dieser Regel abweichend gezeigt. Bei Rellstab's Reduction auf eine gleiche Zahl von Molekülen stellt sich die ausgesprochene Regelmässigkeit auch für diese beiden Säuren bereits her und, wie unsere Beobachtungen ergeben, lässt sich dieselbe auch auf die Benzolreihe ausdehnen.

Die Durchkreuzung der Linien für Ameisensäure und Buttersäure könnte aber die Vermuthung erwecken, dass das raschere Sinken der Ameisensäure und ein analoges Verhalten der Essigsäure in Temperaturen über 50° C. so lange anhalte, bis endlich die bei den übrigen Säuren gefundene Anordnung auch bei der Ameisensäure < Essigsäure < Propionsäure sich herstelle. Ob diese Vermuthung gerechtfertigt sei, das müssen erst die noch weiter vorzunehmenden Versuche lehren.

Man könnte vielleicht geneigt sein, die vorliegenden Beobachtungen in Formeln zu fassen, welche die Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur ausdrücken, und dann diese Formeln auf die Untersuchung des Verhaltens der verschiedenen Substanzen ausserhalb der Temperaturgrenzen der Beobachtungen zu verwenden. Wir haben aber dieses Verfahren für etwas zu gewagt gehalten, als dass wir uns demselben anvertrauen und Schlüsse darauf bauen wollten. In Bezug auf die Temperatur, bei welcher die Zähigkeit verschiedener Substanzen verglichen werden sollte, ging Rellstab von Anfang an von der Idee aus, dass die verschiedenen Flüssigkeiten bei ihren correspondirenden Temperaturen mit einander verglichen werden müssten. Als correspondirend betrachtete er dabei die Temperaturen gleicher Dampfspannungen und legte seinen diesbezüglichen Untersuchungen die von Landolt[1]) veröffentlichten Bestimmungen der Dampftensionen zu Grunde.

Aber auf diesem Wege kam er nur zu dem negativen Resultate, „dass man auf einen genaueren und innigeren Zusammenhang zwischen Transpiration und chemischer Zusammensetzung nicht mehr rechnen kann“, und kehrte daher im Verlaufe seiner Arbeit zur Vergleichung

1) Landolt, Untersuchungen über die Dampftensionen homologer Verbindungen. Akad. Programm. Bonn 1868.



der verschiedenen Stoffe bei der constanten Temperatur von 50°C., der oberen Grenze seiner Beobachtungen, zurück.

Es ist hier wohl am Platze, die Bemerkung einzufügen, dass es sich vielleicht empfehlen würde, für die in Rede stehenden Erscheinungen den Begriff der correspondirenden Temperaturen etwas anders aufzufassen.

Wenn man als den einen Grenzzustand die Siedetemperatur der untersuchten Flüssigkeit annimmt, so liegt es nahe, die Erstarrungstemperatur als den zweiten Grenzzustand aufzufassen und als correspondirende Temperaturen diejenigen zu bezeichnen, welche in relativ gleichen Abständen von den beiden Grenztemperaturen liegen. Oder in Zeichen: Es seien e_1, e_2, s_1, s_2 Erstarrungs- und Siedepunkt für zwei Substanzen, so sind die correspondirenden Temperaturen t_1 und t_2 solche, für welche $\frac{s_1 - t_1}{s_2 - t_2} = \frac{t_1 - e_1}{t_2 - e_2} = \frac{s_1 - e_1}{s_2 - e_2}$ ist.

In neuerer Zeit untersuchte Guerout[1]) eine Anzahl Substanzen, darunter auch solche, mit welchen sich bereits Rellstab beschäftigt hat, findet aber zum Theil sehr abweichende Zahlenwerthe; seine Beobachtungen sind alle nur bei einer Temperatur (13° oder 15°) angestellt.

In Bezug auf die Frage nach dem Zusammenhange der specifischen Durchflusszeit mit der chemischen Constitution constatiren sowohl Rellstab als Guerout innerhalb der homologen Reihen eine Zunahme der Durchflusszeit mit wachsendem Molekulargewichte.

Für Rellstab's Angaben über die Durchflusszeiten äquivalenter Mengen stimmt dies bei den bis jetzt untersuchten Alkoholen, Säuren und Estern.

Für gleiche Volumina machen Ameisensäure und Essigsäure eine Ausnahme in der Säurereihe, eine Ausnahme, welche bereits von Graham erwähnt und von Guerout bestätigt wurde. Nach unseren Beobachtungen aber gilt jenes Gesetz zwischen 0° und 60° in der Benzolreihe zwar für äquivalente Mengen, nicht aber für gleiche Volumina, wie aus Fig. 5 deutlich hervorgeht.

Die Aenderungen der specifischen Durchflusszeit mit dem Molekulargewichte innerhalb der vorgenannten homologen Reihen zeigt die folgende Tabelle.

---

1) Guerout, Compt. rend. Vol. 81 p. 1025 (1875); ibid. Vol. 83 p. 1291 (1876); im Auszug Poggend. Beiblätter Bd. 1 S. 116.

Substanz	Molekular-gewicht	Specifische Durchflusszeit		
		für äquivalente Mengen	für gleiche Volumina	
			nach Rellstab	nach Gueroult
Bei 13° C.				
Methyl-Alkohol	32	83,5	37,8	27,4
Aethyl- „	46	259,3	80,9	93,2
Propyl- „	60	442,7	106,7	128,7
Butyl- „	74	1016,0	199,1	284,4
Amyl- „	88	1696,0	282,2	346,4
Bei 15° C.				
Ameisen-Säure	46	230,3	109,7	117,5
Essig- „	60	245,0	77,2	84,2
Propion- „	74	269,0	65,2	71,5
Butter- „	88	516,5	101,3	104,3
Valerian- „	102	842,0	138,1	146,3
Capron- „	106	1392,0	200,4	211,0
Essigsaures Methyl . . .	74	113,8	25,0	25,3
Ameisensaures Aethyl . .	74	119,9	26,5	25,0
Essigsaures Aethyl . . .	88	155,5	28,5	30,0
Buttersaures Methyl . . .	102	213,6	33,8	—
Propionsaures Aethyl . .	102	—	—	37,5
Essigsaures Propyl . . .	102	—	—	37,2
Valeriansaures Methyl . .	116	286,1	39,0	—
Buttersaures Aethyl . .	116	263,3	36,4	45,5
Essigsaures Butyl . . .	116	—	—	44,2
Ameisensaures Amyl . .	116	358,5	48,8	—
Valeriansaures Aethyl . .	130	380,1	45,6	56,0
Essigsaures Amyl . . .	130	688,0	81,9	58,7
Valeriansaures Amyl . .	170	946	85,1	—

Worin die bedeutenden Unterschiede zwischen Rellstab's und Gueroult's Zahlen begründet sind, darüber lässt sich vorläufig um so weniger ein Urtheil abgeben, als Gueroult weder die Beschaffenheit seiner Präparate noch seine Beobachtungsmethode näher beschrieben hat. Dem Sinne nach ist übrigens der Satz, um den es sich hier handelt, giltig, mögen die einen oder die anderen der vorliegenden Zahlenwerthe der Betrachtung zu Grunde gelegt werden. Ausserhalb der homologen Reihen ist dagegen ein solcher Zusammenhang zwischen der specifischen Durchflusszeit und dem Molekulargewichte nicht vorhanden, es ergeben vielmehr Substanzen von höherem Molekular-

gewichte nicht selten viel kleinere Durchflusszeit als andere von geringerem Molekulargewichte, und ebenso zeigen, wie dies von vornherein zu erwarten war, Substanzen von gleichem Molekulargewichte aber verschiedenartiger chemischer Constitution sehr ungleiche Durchflusszeiten.

Auffallend ist, dass die Alkohole stets viel langsamer als die Säuren von gleichem Molekulargewichte, diese wieder viel langsamer als die entsprechenden Ester fliessen. Man kann sich angesichts dieser Thatsache kaum der Vorstellung erwehren, dass vielleicht die Moleküle der letzteren vermöge ihrer chemischen Zusammensetzung abgerundetere Formen und deshalb geringere innere Reibung haben mögen als die Moleküle der Alkohole und Säuren.

Von ganz besonderem Interesse aber ist das Verhalten der isomeren Verbindungen.

Dass im Allgemeinen isomere Stoffe von verschiedenartiger Atomgruppirung, selbst bei ähnlichem chemischen Charakter, verschiedene Durchflusszeiten haben, geht schon aus den früher gemachten Bemerkungen über den Einfluss des Molekulargewichtes, ferner aus einer Reihe von Vergleichungen Rellstab's und ebenso aus unseren Beobachtungen hervor.

Wir fanden z. B.

a) Gährungsbuttersäure
b) Isobuttersäure

t^0 C.	für gleiche Volumina *a*	*b*	für äquivalente Mengen *a*	*b*
15	103,0	82,7	516	418
20	94,5	76,4	473	386
25	86,0	70,6	431	357
30	78,8	65,1	394	329
35	72,0	60,3	360	305
40	66,5	56,0	333	283
45	61,6	52,1	308	263
50	57,0	48,5	285	245
55	53,0	45,4	265	230

c) Chlortoluol
d) Benzylchlorid

t^0 C.	für gleiche Volumina *c*	*d*	für äquivalente Mengen *c*	*d*
15	58,5	84,7	373,5	531,8
20	54,6	77,4	348,6	486,0

1) Rellstab a. a. O. S. 51.

t °C.	c	d	c	d
25	50,7	70,6	323,7	443,3
30	47,5	65,5	303,2	411,3
35	44,9	60,8	286,7	381,8
40	41,9	56,8	267,5	356,6
45	39,3	53,2	250,9	333,4
50	37,1	49,5	236,9	310,8
55	34,9	45,9	222,8	288,2
60	32,7	43,5	208,8	273,1

Bezüglich der isomeren Ester kömmt Rellstab zu dem Schlusse, dass sich dieselben in Bezug auf ihre Durchflusszeiten zwar ähnlich, aber nicht gleich verhalten.

Guerout hingegen spricht[1]) auf Grundllage von vier Beobachtungspaaren:

Essigsaures Methyl	25,3
Ameisensaures Aethyl	25,0
Essigsaures Propyl	37,2
Propionsaures Aethyl	37,5
Essigsaures Butyl	44,2
Buttersaures Aethyl	45,5
Essigsaures Amyl	58,7
Valeriansaures Aethyl	56,0

den Satz aus, dass isomere Ester gleiche Durchflusszeit für gleiche Volumina besitzen.

Aus der früher mitgetheilten Tabelle ist zu ersehen, dass beim Buttersäure-Aethyläther, dann beim Valeriansäure-Aethyl- und Essigsaure-Amyläther die Zahlenangaben Rellstab's von denen Guerout's ausserordentlich stark abweichen, so dass die Richtigkeit des Guerout-schen Satzes noch bezweifelt werden konnte.

Unter den Estern, welche wir bisher der Untersuchung unterzogen haben, finden sich nun folgende, welche zur Controle und Aufklärung dieser Widersprüche dienen können.

Wir heben hier die Werthe der specifischen Durchflusszeit bei 15°, derselben Temperatur, für welche allein Guerout's Zahlen vorliegen, heraus.

1) Compt. rend. Vol. 83 p. 1293.

Für	fanden wir	Rellstab	Guerout
Buttersäure-Aethyläther	40,5	36,4	45,5
Essigsaures Butyl	42,0	—	44,2
Valeriansaures Aethyl	46,7	45,6	56,0
Essigsaures Amyl	54,7	81,9	58,7

Man sieht, dass unsere Zahlen, wenn sie auch den absoluten Werthen nach nicht genau mit den aus Guerout's Angaben berechneten übereinstimmen, das von ihm ausgesprochene Gesetz doch annähernd bestätigen; man sieht aber auch, dass noch weitere Prüfungen desselben wünschenswerth erscheinen, welche wir uns für die Folge vorbehalten.

Sollte sich dieses Gesetz dann nicht nur für die isomeren Ester, sondern auch für andere isomere Gruppen von anerkannt gleichartiger Structur bestätigen, dann dürfte damit ein Mittel geboten sein, auf welches man eine Classification der isomeren Verbindungen je nach der Gleichartigkeit oder Ungleichartigkeit ihrer Constitution wird stützen können.

Rellstab hatte bereits sich die Frage vorgelegt, ob eine bestimmte Differenz in der chemischen Zusammensetzung von einer entsprechenden Differenz der Durchflusszeiten begleitet sei; er constatirte eine Vergrösserung der letzteren bei einer Zunahme der Verbindung um CH_2O, um H_2 und um O und verglich zu diesem Behufe

a) Aldehyd — Propionsäure, Aceton — Buttersäure, Valeral — Capronsäure, Bittermandelöl — benzoësaures Methyl, salicylige Säure — salicylsaures Methyl;

b) Aldehyd mit Aethylalkohol, Aceton mit Propylalkohol, Valeral mit Amylalkohol;

c) Aldehyd — Essigsäure, Aceton — Propionsäure, Valeral — Valeriansäure, Bittermandelöl — salicylige Säure, benzoësaures Methyl — salicylsaures Methyl.

Ferner fand er eine Abnahme der Durchflusszeit bei Steigerung der Zusammensetzung um 1° C. an Methylalkohol und Aldehyd, Aethylalkohol und Aceton, Butylalkohol und Valeral.

Die Anzahl dieser untersuchten Fälle ist zu gering, ihre Auswahl zu willkürlich und ihre Constitution zu verschiedenartig, als dass man diesen Ergebnissen jetzt schon eine allgemeinere Bedeutung beimessen dürfte.

Wir glauben vielmehr eine ähnliche, von Sprung[1]) nebenbei angedeutete, aber nicht weiter verfolgte Frage zum Gegenstande einer eingehenderen Beobachtungsreihe machen zu sollen: die Frage nach den Veränderungen, welche die Durchflusszeit durch das Eintreten gewisser Elemente oder Atomgruppen in ein gegebenes Molekül erleidet; mit anderen Worten, die Frage nach der Wirkung von Substitutionen auf die Durchflusszeiten der verschiedenen Substanzen.

Wir haben in dieser Beziehung bis jetzt den Einfluss des Eintrittes von Cl, Br, J und NO_2 an Stelle des H in einem Molekül studirt und behalten uns vor, diese Untersuchungen in dem Maasse, als die Herstellung des erforderlichen Materials von statten geht, zu ergänzen und auszudehnen.

Die bisher untersuchten Körper sind sowohl der Reihe der Fettkörper als der aromatischen Reihe entnommen. Die folgende Zusammenstellung zeigt die gegenseitigen Beziehungen, ausgedrückt in Zahlen, welche die specifischen Durchflusszeiten bei verschiedenen Temperaturen angeben.

Für gleiche Volumina

t	Benzol	Chlorbenzol	Nitrobenzol
15	39,3	49,7	124,3
20	36,5	46,5	114,0
25	33,6	43,8	103,8
30	31,5	41,2	95,3
35	29,6	38,8	87,4
40	27,8	36,9	80,7
45	25,9	35,0	74,1
50	24,4	33,2	69,8
55	22,9	31,4	65,5

Für äquivalente Mengen

t	Benzol	Chlorbenzol	Nitrobenzol
15	190	271	694
20	176	253	636
25	162	239	579
30	152	224	532
35	143	211	488
40	134	201	450
45	125	191	414
50	118	181	390
55	111	171	366

1) Pogg. Ann. Bd. 159 S. 35.

Für gleiche Volumina

t	Toluol	Chlortoluol	Benzychlorid	Nitrotoluol
15	35,4	58,5	84,7	144,0
20	33,1	54,6	77,4	130,9
25	31,1	50,7	70,6	117,9
30	29,3	47,5	65,5	107,0
35	27,6	44,9	60,8	97,4
40	26,2	41,9	56,8	89,4
45	25,0	39,3	53,1	82,7
50	23,8	37,1	49,5	76,5
55	22,6	34,9	45,9	70,8
60	21,4	32,7	43,5	66,1

Für äquivalente Mengen

t	Toluol	Chlortoluol	Benzychlorid	Nitrotoluol
15	205	373,5	532	933
20	192	348,6	486	848
25	180	323,7	443	764
30	170	303,2	411	693
35	160	286,7	382	631
40	152	267,5	357	579
45	146	250,9	333	536
50	139	236,9	311	496
55	131	222,8	288	459
60	124	208,8	273	428

Für gleiche Volumina

	Chloroform	Chlorkohlenstoff	Chlorpikrin
$t = 15^0$	32,9	57,5	67,1

Für äquivalente Mengen

	Chloroform	Chlorkohlenstoff	Chlorpikrin
	144	305	364

Für gleiche Volumina

t	Aethylenchlorid	Aethylenbromid
15	49,8	103,4
20	46,5	95,2
25	43,5	89,0
30	40,5	83,5
35	37,7	78,4



Für äquivalente Mengen

t	Aethylenchlorid	Aethylenbromid
15	211,6	285,1
20	197,6	262,5
25	184,8	245,4
30	172,1	230,2
35	160,2	216,1

Endlich

für gleiche Volumina

t	Propylchlorid	Propylbromid	Propyljodid
10	21,5	31,3	47,2
15	20,6	30,0	44,8
20	19,6	28,7	42,4
25	18,6	27,5	40,0
30	17,7	26,2	37,7
35	16,7	24,9	35,3
40	15,7	23,6	32,9

Für äquivalente Mengen

t	Propylchlorid	Propylbromid	Propyljodid
10	103,2	128,3	250,4
15	98,5	123,1	237,7
20	93,9	117,8	225,0
25	89,2	112,5	212,3
30	84,5	107,2	199,6
35	79,9	101,9	186,9
40	75,2	91,4	174,2

Eine Betrachtung der im Vorhergehenden dargelegten Zahlen führt nun zu folgenden Ergebnissen:

1. Der Eintritt von Cl, Br, J und NO_2 an die Stelle von Wasserstoff in einem Molekül hat in allen untersuchten Fällen eine Vergrösserung der Durchflusszeit der betreffenden Substanzen zur Folge.

2. Diese Vergrösserung der Durchflusszeit ist am kleinsten bei dem Eintritte von Cl, dann von zunehmender Grösse bei dem Eintritte von Br, J und NO_2.

3. Wie aus dem Verhalten von Chlortoluol und Benzylchlorid hervorgeht, ist für den absoluten Werth der Vergrösserung der Durchflusszeit nicht nur die Qualität des eintretenden Elementes, sondern auch seine Stellung im Molekül maassgebend.

Die Ausdehnung dieser Versuche auf eine grössere Anzahl von Substanzen, sowie das Aufsuchen eines bestimmten Ausdruckes für

die hier bezeichnete Abhängigkeit der specifischen Durchflusszeit von der chemischen Constitution wird der Gegenstand einer weiteren Arbeit sein.

Wir theilen im Folgenden noch die bei den vorgenannten Beobachtungen befolgte Untersuchungsmethode, sowie die damit gewonnenen Beobachtungsdaten und die Methoden mit, welche zur Darstellung der einzelnen Substanzen befolgt wurden.

Die zu den Versuchen benützten Präparate sind zum grössten Theil in dem chemischen Laboratorium der hiesigen Universität dargestellt; nur ein kleiner Theil wurde aus der rühmlichst bekannten Fabrik von C. A. F. Kahlbaum in Berlin bezogen und dann einer sorgfältigen Reinigung unterworfen.

Der bei unseren Beobachtungen verwendete Apparat ist in mehrfacher Hinsicht von den früher zu derartigen Untersuchungen gebrauchten verschieden. Das Princip desselben war von Pribram schon einige Zeit bevor wir an die vorliegende Arbeit gingen erdacht und an vorläufigen Versuchen erprobt worden. Dieses Princip besteht darin, dass das Capillarrohr beiderseits in weitere, möglichst glatt angesetzte Röhren mündet, so dass eine und dieselbe Flüssigkeitsmenge beliebig oft in abwechselnden Richtungen durch das Capillarrohr getrieben werden kann. Die Vortheile, welche man dadurch erreicht, bestehen hauptsächlich darin, dass man mit derselben geringen Flüssigkeitsmenge ohne jeglichen Verlust die Beobachtungen beliebig oft und bei beliebiger Temperatur wiederholen kann, was viel grössere Schwierigkeiten bietet, wenn die Flüssigkeit bei jedem Versuche aus dem Capillarrohre in ein anderes Gefäss ausfliesst und wieder in den eigentlichen Apparat zurückgegossen werden muss.

Bei jeder solchen Uebertragung der zu untersuchenden Flüssigkeit ist immer die Gefahr vorhanden, dass Staubtheilchen in dieselbe gelangen oder Wasser aus der Atmosphäre aufgenommen werde, Uebelstände, mit welchen frühere Beobachter vielfach zu kämpfen hatten, während bei unserem Verfahren die Flüssigkeit, wenn sie sich einmal im Rohre befindet, gegen jede Verunreinigung und Wasseraufnahme geschützt erscheint und, wie bereits bemerkt, ihr Durchfliessen durch das Capillarrohr beliebig oft beobachtet werden kann.

Die Zusammenstellung und Anordnung der einzelnen Theile des Apparates zeigt nun die Fig. 6 Taf. XX.

Das Capillarrohr, ungefähr 200^{mm} lang und vom Halbmesser von

circa 0,0979^{mm}, ist beiderseits durch Anschmelzen mit je einem weiteren Rohre von 570^{mm} Länge und ungefähr 2^{mm} Halbmesser vereinigt. Das eine der beiden weiteren Rohre ist mit vier je 40^{mm} von einander entfernten, in das Glas eingeätzten Marken (Strichen) versehen, von welchen die dem Capillarrohre nächste ungefähr 50^{mm} vom Ende desselben entfernt ist.

Diese vier Marken begrenzen somit drei einander gleiche Räume, so dass man immer je drei Beobachtungen unmittelbar nach einander machen und sich vor Beobachtungsfehlern leichter bewahren, auch eine, allenfalls während des Versuches eingetretene Störung, etwa durch in das Capillarrohr gelangende Staubtheilchen, sogleich bemerken kann.

Die Beobachtungen werden nun in folgender Weise ausgeführt:

Von der zu untersuchenden Flüssigkeit wird, in einer später zu beschreibenden Weise, so viel in den Apparat eingeführt, dass das Capillarrohr, etwa 10^{mm} des linken und der Raum des rechten Ansatzrohres bis über die vierte Marke hinaus mit derselben gefüllt sind.

Die Weite der Ansatzrohre ist so gewählt, dass sich bei den meisten Flüssigkeiten ein Meniscus bildet, dessen Zusammentreffen mit den Marken und Vorübergehen an denselben beobachtet werden kann.

Nur bei wenigen der bisher untersuchten Stoffe zeigten sich dabei Schwierigkeiten, welche sammt den Mitteln zu ihrer Beseitigung noch weiter Besprechung finden.

Die Flüssigkeit wird sodann durch einen von rechts her wirkenden Luftdruck in Bewegung versetzt und die Zeiten des Durchganges des Meniscus durch die vier Marken beobachtet; man erhält so drei Werthe für die Zeit, welche ein bestimmtes Flüssigkeitsvolumen braucht, um unter dem gegebenen Drucke durch das Capillarrohr zu strömen. Wir haben uns durch mehrere Versuche überzeugt, dass man den Widerstand, welchen die Flüssigkeit im weiteren Rohre findet, vernachlässigen kann; wir fanden nämlich bei wiederholten Versuchen mit Wasser keinen Unterschied der Durchflusszeit, wenn die Flüssigkeit verschieden lange Strecken (von ein- bis dreifacher Länge) in den weiten Röhren erfüllte.

Die weiteren Vorrichtungen, welche zur genauen Regulirung der maassgebenden Umstände in Anwendung gebracht wurden, sind folgende:

Das Capillarrohr nebst den beiden Ansatzröhren ruht horizontal in einem starken, 1200^{mm} langen Glasrohre von etwa 50^{mm} Durchmesser, dessen beide verjüngte Enden durch Stöpsel verschlossen sind, durch welche die Ansatzröhren noch etwa 70^{mm} hervorragen. Dieses Glasrohr ist das zur Temperaturregulirung dienende Wasserbad; es ist an seinem oberen Theile mit drei Tubulaturen versehen, deren jede ein Thermometer enthält. Durch den die mittlere Tubulatur verschliessenden Pfropfen geht ausserdem eine Schlinge eines Fadens, welche den mittleren Theil des Capillarrohres trägt und ihn gegen Durchbiegung schützt; an die beiden äusseren Tubulaturen sind gabelförmige Röhren angesetzt, mittelst welcher ein continuirlicher Wasserstrom durch das Wasserbad geleitet wird.

Das Wasser strömt durch einen Kautschukschlauch aus einem höher stehenden Gefässe, welches je nach Bedarf entweder durch eine untergesetzte Lampe erwärmt oder durch Eis abgekühlt wird, und fliesst durch einen mit der dritten Tubulatur in Verbindung stehenden Kautschukschlauch in ein Gefäss ab, aus welchem es in kurzen Zwischenräumen in das obere Gefäss zurückgegossen wird.

Bei hinreichender Strömungsgeschwindigkeit und sorgfältiger Regulirung der Flamme (oder der Abkühlung) bringt man es dahin, dass die Angaben der beiden äusseren Thermometer, welche unmittelbar von dem einströmenden und austretenden Wasser umspült werden, um weniger als 1^{0}C. von einander verschieden sind und die Temperatur des mittleren Thermometers, welche die für die Beobachtung maassgebende ist, während eines beliebigen Zeitraumes höchstens um 0,1 bis 0,2^{0} schwankt. Wir bedienten uns in der mittleren Tubulatur eines empfindlichen Thermometers mit Millimetertheilung, bei welchem ein Millimeter 0,20076^{0}C. repräsentirt. In den beiden seitlichen Tubulaturen wurden gewöhnliche, in ganze Grade getheilte, corrigirte Thermometer verwendet. Durch entsprechend eingeführte Kautschukröhren wurde dafür Sorge getragen, dass das Ein- und Ausströmen des warmen Wassers in dem unteren und nicht in dem oberen Theile des Umhüllungsrohres geschah, um namentlich bei den höheren Temperaturen ein Stagniren kälteren Wassers in den unteren Theilen des Bades und damit eine Temperaturverschiedenheit in den verschiedenen Niveaus desselben zu verhindern.

Der Druck, unter welchem wir die untersuchten Flüssigkeiten durch das Capillarrohr strömen liessen, war immer der einer Wasser-

säule von 1^m Höhe. Zur Regulirung desselben bedienten wir uns einer Flasche *A* von ungefähr 1,5 Liter Inhalt, welche mittelst einer über zwei Rollen laufenden Schnur und eines verschiebbaren Gewichtes *B* höher oder tiefer gestellt und in jeder Höhe fixirt werden konnte. Aus dieser Flasche strömt das Wasser in eine zweite, gleich grosse, welche daher als Windkessel wirkt, indem die darin enthaltene Luft verdrängt, beziehungsweise zusammengedrückt wird. Der Kautschukschlauch, welcher den einzigen Ausweg für diese comprimirte Luft bildet, ist mit einem in drei Arme gespaltenen Glasrohre *C* in Verbindung gesetzt; der eine dieser Arme führt zu dem Manometer, die beiden anderen stellen die Verbindung der Druckflasche mit je einem der beiden Enden des Capillarrohres her.

Das Manometer ist ein gewöhnliches, U-förmig gebogenes Glasrohr, mit Millimetertheilung versehen und mit schwach gefärbtem Wasser gefüllt; durch Anwendung des Wassers als manometrische Substanz konnten schon sehr geringe Schwankungen des Druckes bemerkt und durch Heben der oberen Flasche *A* corrigirt werden, so dass der Druck bei allen Beobachtungen als constant angenommen werden darf.

Bei gutem Schlusse aller Kautschukverbindungen betragen übrigens die Druckschwankungen selbst ohne Correctur durch veränderte Stellung der Flaschen nur wenige Millimeter Wasserhöhe, so dass sie bei Anwendung eines Quecksilbermanometers kaum merklich gewesen wären.

Die beiden anderen Arme des gläsernen Vertheilungsrohres *C* sind genau gleich adjustirt. Von jedem derselben führt ein Kautschukschlauch zu einem Dreiweghahn, dessen eine Oeffnung in die freie Luft mündet, während die andere zunächst mit einem mit Chlorcalciumstücken gefüllten Glasrohre und dann weiter mit einem Ende des Capillarrohres in Verbindung steht.

So kann nur trockene Luft in das Capillarrohr gelangen, und die beiden Dreiweghähne ermöglichen es, jedes Ende desselben auf die einfachste Weise entweder mit der freien Luft oder mit dem Druckapparat in Verbindung zu setzen.

Man kann also die im Rohre befindliche Flüssigkeitsmenge beliebig oft in abwechselnden Richtungen hin- und hergehen lassen, wobei sie stets ihrer ganzen Ausdehnung nach von dem fortwährend in Strömung befindlichen Wasser des Bades umgeben ist.

Es handelt sich nur noch um die Füllung, Entleerung und Reinigung des Apparates.

Zum Zwecke der Füllung wird die Kautschukverbindung an dem einen Ende des Capillarrohres gelöst und daselbst ein kleines, U-förmig gebogenes, auf einer Seite zu einer Kugel erweitertes Rohr *F* eingeschaltet, welches die zu untersuchende Substanz enthält und aus welchem die nöthige Menge derselben in das Capillarrohr getrieben wird.

Nach Beendigung der Beobachtungen wird die gebrauchte Flüssigkeit entweder in denselben Apparat zurückgeblasen oder einfach nach Ablösung der Kautschukverbindung an einem Ende des Capillarrohres durch dieses Ende herausgetrieben und in einem vorgelegten Fläschchen aufgefangen.

Die Reinigung des Rohres erfolgt schliesslich durch wiederholtes Durchspülen mit Alkohol und Aether und Durchleiten eines Luftstromes bei höherer Temperatur.

Bei einigen der untersuchten Substanzen war die im Vorhergehenden beschriebene Methode nicht anwendbar, weil dieselben in Folge einer starken Adhäsion an das Glas und einer geringen Cohäsion keinen entsprechenden Meniscus bilden, sondern auf dem unteren Theile der weiten Ansatzröhren zerfliessen. Dieses Zerfliessen geht zwar nicht so weit, dass sich die ruhende Flüssigkeit nicht an einer Stelle erhalten und etwa ganz in die untere Hälfte des Rohres herabfallen würde; aber die Grenzfläche nimmt ungefähr die Gestalt der Fig. 7 an, und das Zurückbleiben einer gewissen Menge Flüssigkeit bei der Bewegung nach der einen Richtung, sowie das Wiederaufnehmen derselben bei der Bewegung nach der anderen Richtung hat eine Verminderung der scheinbaren Durchflusszeit zur Folge, welche die Beobachtungsresultate fehlerhaft machen würde. Einige Flüssigkeiten zeigen dieses störende Zerfliessen erst über einer gewissen Temperaturgrenze, während sie unterhalb derselben ganz gut auf die früher beschriebene Weise beobachtet werden können.

Wir haben wohl für die Fortsetzung der vorliegenden Arbeit eine Umgestaltung des Apparates in Aussicht genommen, welche den bezeichneten Uebelstand gründlich beheben soll, ohne die Vortheile unserer Beobachtungsmethode zu beeinträchtigen; da wir aber den vorläufigen Abschluss der Beobachtungen nicht länger verzögern wollten, haben wir einstweilen, um auf die Untersuchung

gewisser Substanzen nicht verzichten zu müssen, folgendes Verfahren eingeschlagen:

Das als Wasserbad dienende Glasrohr sammt dem Capillarrohre wird vertical gestellt und das zur Temperaturregulirung dienende Wasser durch die beiden Endtubulaturen in der gewöhnlichen Weise durchgeleitet.

Der mit den Marken versehene Ansatz des Capillarrohres kommt nach oben zu stehen, wird bis über die letzte Marke mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und dann, wenn nöthig, mittelst des Kautschukschlauches mit dem Druckapparat und Manometer in Verbindung gesetzt. Das untere Ansatzrohr bleibt offen, so dass die untersuchte Flüssigkeit aus demselben frei in ein untergestelltes Gläschen abtropfen kann.

Man lässt nun die Flüssigkeit einmal nur unter dem Drucke ihres eigenen Gewichtes, welchen man dem Drucke einer Wassersäule von der Höhe X gleichsetzen kann, durch das Capillarrohr abfliessen und beobachtet die Zeit Z_0, welche zum Abfliessen des zwischen zwei Marken enthaltenen Flüssigkeitsvolumens nöthig ist.

Ein zweites Mal beobachtet man die zum Abfliessen derselben Flüssigkeitsmenge nöthige Zeit Z_1, wenn ausser dem eigenen Gewichte noch ein äusserer Druck, von der Wassersäule D_1 herrührend, auf die Flüssigkeit wirkt. Wiederholt man ausserdem diese Beobachtung bei einem anderen Drucke D_2 und ist Z_2 die beobachtete Zeit, so kann man aus solchen drei Beobachtungen drei Werthe für die Zeit Z' ableiten, in welcher die gleiche Flüssigkeitsmenge unter dem alleinigen Drucke einer Wassersäule von 1000^{mm} Höhe durch das Capillarrohr gegangen wäre.

Man braucht sich zu dem Zwecke nur zu erinnern, dass unter sonst gleichen Umständen die Durchflusszeiten den Druckhöhen umgekehrt proportional sind, d. h. dass

$$X \cdot Z_0 = (D_1 + X)\, Z_1 = (D_2 + X)\, Z_2 = 1000\, Z'$$

sein muss.

Durch Elimination von X aus diesen Gleichungen findet man nun leicht, dass

$$Z' = \frac{D_1 Z_1 Z_0}{1000\,(Z_0 - Z_1)} = \frac{D_2 Z_2 Z_0}{1000\,(Z_0 - Z_2)} = \frac{(D_2 - D_1)\, Z_1 Z_2}{1000\,(Z_1 - Z_2)}.$$

Diese Modification der Beobachtungsmethode hat nur den Nachtheil, dass bei dem wiederholten Uebergiessen der Flüssigkeit in das

obere Rohr, wobei immer der Kautschukschlauch abgenommen und wieder aufgesetzt werden muss, leicht Staubtheilchen in das Rohr gelangen, welche dann direct in das Capillarrohr fallen und nicht nur die Beobachtung stören, sondern wegen der Schwierigkeit ihrer Beseitigung auch jedesmal den ganzen Apparat in Gefahr bringen.

Wir haben daher auch, nachdem wir uns durch mehrere Versuche von der Richtigkeit unseres Verfahrens überzeugt hatten, die Zahl der Beobachtungen bei verticaler Stellung des Apparates auf das mit der Erreichung unserer gegenwärtigen Zwecke verträgliche Minimum reducirt, da wir die übriggebliebenen Lücken bald ausfüllen zu können hoffen.

Für die Verlässlichkeit der Beobachtungen bei verticaler Stellung des Apparates möge folgendes Beispiel angeführt werden.

Aethylenchlorid, $t = 16^0$C.

Beobachtet wurde von Marke 4 bis 3

$$Z_0 = 379 \text{ Sec.}, \quad D_1 = 1000^{mm}, \quad Z_1 = 107 \text{ Sec.};$$

dies gibt

$$Z' = 149{,}1 \text{ Secunden.}$$

Ferner von Marke 2 bis 1

$$D_1 = 1000^{mm}, \; Z_1 = 111 \text{ Sec.}, \; D_2 = 600^{mm}, \; Z_2 = 150 \text{ Sec.};$$

dies gibt

$$Z' = 145{,}2 \text{ Secunden.}$$

Das Mittel aus diesen beiden Bestimmungen ergibt für 16^0

$$Z' = 147{,}15 \qquad Z = 48{,}9,$$

während bei der Beobachtung im horizontalen Rohre für $15{,}8^0$

$$z = 148 \qquad Z = 49{,}2$$

gefunden wurde.

Wir sind seither mit einer Abänderung des Apparates beschäftigt, welche einfacher und sicherer zu wirken verspricht.

Messungen über das Mitschwingen.

Von

Albert v. Ettingshausen.

(Hiezu Tafel XXI.)

Hängt man eine flache Drahtrolle mit verticalen Windungen an zwei Drähten zwischen den Polen eines Elektromagnets derart auf, dass sie zwischen diesen frei schwingen kann und die Ebenen ihrer Windungen in der Ruhelage mit der horizontalen Verbindungslinie der Pole parallel sind, verbindet man ferner die Enden der Rolle mit den Aufhängedrähten und führt die Leitung zu einem Spiegelgalvanometer mit stark gedämpftem Magnet, so wird beim Schwingen der Rolle die Galvanometernadel ebenfalls ins Schwingen versetzt, wobei sich durch Veränderung der Schwingungsdauer der Rolle unschwer erreichen lässt, dass beide gleichzeitig durch ihre Ruhelagen hindurchgehen. Je nach der Polarität des Elektromagnets und je nach der Art der Stromleitung im Galvanometer schwingen dann Drahtrolle und Magnetnadel entweder mit einander (Phasenunterschied Null), oder gegen einander (Phasenunterschied π). Befestigt man an der Rolle einen Spiegel und wirft das von demselben reflectirte Licht eines Spaltes zugleich mit dem vom Galvanometerspiegel zurückgeworfenen Licht eines zweiten Spaltes in der Weise auf einen Schirm, dass sich die Ruhelagen beider Bilder über einander befinden, so lässt sich das Mit- oder Gegeneinanderschwingen der Spaltbilder sehr hübsch beobachten.

Ist die Rolle gegen den Abstand der Magnetpole klein und sind ihre Elongationen nicht zu bedeutend, so dass sie sich in einem nahe homogenen Magnetfelde bewegt, so folgen die Schwingungen der Galvanometernadel dem Pendelgesetze, und der Versuch beweist sonach, dass entgegengesetzt gerichteten Bewegungen der Rolle auch entgegengesetzt gerichtete Inductionsströme entsprechen, ferner dass die Intensitäten dieser Ströme in jedem Augenblicke der Geschwindigkeit der Bewegung proportional sind, endlich wegen des constanten logarith-

mischen Decrementes, welches die Schwingungsweiten der Drahtrolle zeigen, dass die Richtung der Inductionsströme das Lenz'sche Gesetz befolgt. Bei Aenderung der Schwingungsdauer der Rolle nimmt nicht nur die Stärke des Mitschwingens der Galvanometernadel ab, sondern es tritt auch eine Phasendifferenz zwischen den Schwingungen von Rolle und Magnet in dem einen oder anderen Sinne auf, je nachdem die Oscillationsdauer abgeändert wird.

Um genauere Messungen hierüber anstellen und die Resultate mit der Theorie vergleichen zu können, wurde auf einen grossen Holzring HH (Fig. 1 Taf. XXI) von 50^{cm} Durchmesser ein gut übersponnener und mit Wachs überzogener Kupferdraht (1,2^{mm} dick) aufgewickelt, dessen Enden zu Klemmen k_1 führen, welche auf einem durch die Verstärkungen v der Wände des Holzringes gesteckten Prisma aus Bein b_1 mittelst Hülsen h_1 verschiebbar und feststellbar sind. In die Klemmen k_1 werden auch die Aufhängungsdrähte der Rolle d (harte Kupferdrähte) befestigt; diese sind oben an der Aufhängevorrichtung (Fig. 2) wieder in Klemmen k_2 (Fig. 3 u. 4) festgemacht, die sich ebenfalls auf einem Prisma b_2 verschieben und feststellen lassen. Die Hülsen h_2 dieser Klemmen sind mit k_2 durch je zwei Stifte s verbunden, in welche am oberen Ende Schrauben geschnitten sind, so dass mit Hilfe der Muttern m die Klemmen ein wenig gehoben oder gesenkt werden können, um die beiden Aufhängedrähte d gleich stark zu spannen; in σ werden die Leitungsdrähte eingeklemmt. Das Prisma b_2 endlich ist um o als Achse drehbar, was durch die Schrauben S bewerkstelligt werden kann. Die Rolle wird so aufgehängt, dass in der Ruhelage die Ebenen ihrer Windungen dem magnetischen Meridiane parallel sind; lässt man sie dann schwingen, so inducirt die horizontale Componente des Erdmagnetismus in ihr abwechselnd gerichtete Inductionsströme, die zum Galvanometer gelangen; diese Vorrichtung möge daher Bifilarinductor heissen.

Um eine geringe Abnahme der Schwingungsweiten zu erzielen, ist auf die Wandverstärkungen v ein starker, doppelter Messingbalken L (Fig. 1 u. 5) aufgesetzt, der zu beiden Seiten cylindrische Ansätze hat, auf welchen sich grosse Bleikugeln K (jede von fast 6^{kg} Gewicht) verschieben lassen. Zur Beobachtung der Schwingungsweiten des Bifilars ist in seiner Drehungsachse ein Spiegel angebracht, der das Bild einer in der Nähe aufgestellten Millimeterscala in ein weiter rückwärts aufgestelltes Ablesefernrohr wirft.



Das Galvanometer, welches bei den Messungen zumeist benützt wurde, besteht aus zahlreichen Windungen von gleichem Drahte wie der Bifilarinductor, die auf einem breiten, elliptischen Holzrahmen aufgewickelt sind. Der im Innern dieses Rahmens schwingende cylindrische Magnetstab von 120^{mm} Länge und 10^{mm} Durchmesser wird bei geschlossenem Multiplicator in Folge der ihn eng umschliessenden Drahtwindungen gedämpft; in das Schiffchen, welches den Magnet trägt, kann noch ein Messingstab eingelegt werden, der oberhalb des Multiplicators schwingt und zur Vergrösserung des Trägheitsmomentes dient. Bei geöffnetem Multiplicator ist die Dämpfung durch den Luftwiderstand so gering, dass sich die Schwingungsdauer der Magnetnadel mit sehr grosser Schärfe ermitteln lässt. Dem Spiegel des Galvanometers gegenüber steht ein Fernrohr mit Scala, und die Anordnung ist derart getroffen, dass beide Ableserohre, jenes des Bifilars sowie das des Galvanometers, neben einander auf einem Statife aufgestellt sind; es kann daher ein Beobachter, ohne seinen Platz zu verlassen, abwechselnd durch die beiden Fernrohre die Schwingungen des Bifilarinductors und der Galvanometernadel verfolgen.

Durch eine Stöpselvorrichtung liess sich nun nach Belieben ein Erdinductor oder ein bekannter Widerstand in die Leitung von Bifilar und Galvanometer einschalten. Fig. 6 zeigt schematisch die Anordnung der Apparate. Stöpselt man das Loch zwischen I und II, so ist die Leitung über E (Erdinductor), G (Galvanometer) und N (Normalwiderstand von 13 S. E.) geschlossen; stöpselt man das Loch zwischen II und III, so ist B (Bifilarinductor) an Stelle von N in der Leitung; wird endlich das Loch zwischen II und IV gestöpselt, so ist der Erdinductor durch das Galvanometer allein geschlossen. C bedeutet einen Commutator mit Quecksilbercontacten, um die Ströme in entgegengesetzter Richtung das Galvanometer durchfliessen zu lassen.

Bezeichnen wir die horizontale Componente der erdmagnetischen Kraft mit H, die Summe der von den Windungen des Bifilarinductors umschlossenen Flächen mit F, den Widerstaud der Leitung mit W, so ist die bei der Bewegung des Bifilars in der Zeit dt erzeugte Strommenge idt, letztere Grössen gemessen nach absolutem Maasse

$$idt = \frac{H}{W}\, dF',$$

worin F' die Projection von F auf eine zur Richtung von H senk-

rechte Ebene bedeutet. Die Windungen des Bifilars sind in der Ruhelage desselben dem magnetischen Meridiane parallel; heisst daher y die Ausweichung des Bifilars aus der Ruhelage zur Zeit t, so ist

$$F' = F \sin y, \quad dF' = F \cos y\, dy.$$

Zählen wir die Zeit derart, dass für $t = o$ das Bifilar sich in der grössten Ausweichung g auf Seite der negativen y befinde, so haben wir

$$y = -g e^{-\alpha t} \cos nt,$$

worin α und n leicht ersichtliche Bedeutungen haben: wird nämlich die Schwingungsdauer des Bifilars mit T' bezeichnet und das natürliche logarithmische Decrement seiner Schwingungen mit λ', so gilt

$$nT' = \pi \text{ und } \alpha T' = \lambda'.$$

Es folgt nun $dy = gn\, e^{-\alpha t} \sin nt\, dt + g\alpha\, e^{-\alpha t} \cos nt\, dt.$

Nehmen die Schwingungsweiten nur sehr wenig ab, so wird es erlaubt sein, das mit α multiplicirte Glied im Ausdrucke dy zu vernachlässigen, so dass also

$$dy = gn\, e^{-\alpha t} \sin nt\, dt$$

gesetzt werden kann; hienach folgt

$$dF' = Fgn\, e^{-\alpha t} \cos (g e^{-\alpha t} \cos nt) \sin nt\, dt$$

und daher

$$i = \frac{HFgn}{W} e^{-\alpha t} \cos (g e^{-\alpha t} \cos nt) \sin nt.$$

Die Bewegungsgleichung der Galvanometernadel unter der Voraussetzung, dass die Ausweichungen der Nadel nicht zu gross sind, ist nun

$$k \frac{d^2 x}{dt^2} = -a^2 x - b^2 \frac{dx}{dt} + ci;$$

darin bedeutet x die Ausweichung der Nadel aus ihrer den Multiplicatorwindungen parallelen Ruhelage zur Zeit t, k das Trägheitsmoment bezogen auf die Aufhängung als Drehungsachse; die Grössen a^2, b^2 und c sind durch die Beziehungen bestimmt:

$a^2 = k \frac{\pi^2}{T_0^2}$, worin T_0 die Schwingungsdauer der Nadel ohne Dämpfung,

$b^2 = k \frac{2\lambda_1}{T_1}$, worin T_1 die Schwingungsdauer der Nadel beim natürlichen logarithmischen Decrement λ_1 ihrer Schwingungen, endlich

$c = k \frac{\pi^2}{T_0^2 R}$, wo R den Reductionsfactor des Galvanometers auf mag-

netisches Strommaass angibt; c bedeutet das Drehungsmoment, welches der Strom 1 auf die den Multiplicatorwindungen parallel befindliche Nadel ausübt. Nennen wir die der Beobachtung zugängliche Schwingungsdauer der Magnetnadel (bei offenem Multiplicator) T und λ das entsprechende logarithmische Decrement, so ist

$$\frac{\pi^2}{T_0^2} = \frac{\pi^2 + \lambda^2}{T^2} = \frac{\pi^2 + \lambda_1^2}{T_1^2}$$

und daher

$$a^2 = k\frac{\pi^2 + \lambda^2}{T^2}, \quad b^2 = k\frac{2\lambda_1}{T}\frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}{\sqrt{\pi^2 + \lambda_1^2}}, \quad c = k\frac{\pi^2 + \lambda^2}{T^2 R}.$$

Wird der Kürze halber $\frac{cHFn}{W} = A$ gesetzt, so nimmt die Bewegungsgleichung die Form an:

$$k\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x - b^2\frac{dx}{dt} + Age^{-\alpha t}\cos(ge^{-\alpha t}\cos nt)\sin nt.$$

Bei Entwicklung des Cosinus in eine Reihe erhält man, wenn bei den Gliedern mit g^3 abgebrochen wird:

$$k\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x - b^2\frac{dx}{dt} + Age^{-\alpha t}\sin nt -$$
$$- A\frac{g^3}{8}e^{-3\alpha t}\sin nt - A\frac{g^3}{8}e^{-3\alpha t}\sin 3nt. \qquad \text{(I}$$

Das Integral der Differentialgleichung von der Form

$$k\frac{d^2x}{dt^2} = -a^2x - b^2\frac{dx}{dt} + Be^{-\beta t}\sin \nu t \qquad \text{(II}$$

ist nun

$$x = \frac{B\sin\varepsilon}{\nu(b^2 - 2\beta k)}e^{-\beta t}\sin(\nu t - \varepsilon), \qquad \text{(IIa}$$

wobei

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \nu\frac{b^2 - 2\beta k}{a^2 - b^2\beta + \beta^2 k - \nu^2 k}\text{ [1]}.$$

In dem Integrale (IIIa) sind jene Glieder, welche lediglich aus den Eigenschwingungen resultiren, weggelassen worden, da diese mit wachsender Zeit gegenüber dem obigen Ausdrucke verschwindend klein werden, und zwar verschwinden sie um so rascher, je stärker die Dämpfung wird; ist β verhältnissmässig klein, so ist auch

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \nu\frac{b^2 - 2\beta k}{a^2 - b^2\beta - \nu^2 k}. \qquad \text{(IIIb}$$

1) S. Helmholtz, Tonempfindungen, 3. Ausg. S. 608.

Mit Hilfe des Integrals der Gleichung (II) lässt sich nun auch jenes von (I) leicht erhalten; dasselbe ist

$$x = \frac{Ag\sin\varepsilon_1}{n(b^2-2\alpha k)}e^{-\alpha t}\sin(nt-\varepsilon_1) - \frac{Ag^3\sin\varepsilon_2}{8n(b^2-6\alpha k)}e^{-3\alpha t}\sin(nt-\varepsilon_2) - $$
$$-\frac{Ag^3\sin\varepsilon_3}{24n(b^2-6\alpha k)}e^{-3\alpha t}\sin(3nt-\varepsilon_3), \qquad \text{(IVa}$$

wobei

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\varepsilon_1 &= n\frac{b^2-2\alpha k}{a^2-b^2\alpha-n^2k} \\ \operatorname{tang}\varepsilon_2 &= n\frac{b^2-6\alpha k}{a^2-3b^2\alpha-n^2k} \\ \operatorname{tang}\varepsilon_3 &= 3n\frac{b^2-6\alpha k}{a^2-3b^2\alpha-9n^2k}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(IVb}$$

Die Gleichung (IVa) gibt die Ausweichung x der schwingenden Galvanometernadel aus der Ruhelage durch die Coexistenz von Partialschwingungen, von denen die beiden ersten, deren Periode mit der Schwingungsdauer des Bifilarinductors übereinstimmt (und die wir nicht weiter zusammensetzen wollen), gegen die Bewegung des letzteren ($y = -ge^{-\alpha t}\cos nt$) beziehungsweise die Phasenunterschiede $\varepsilon_1 - \frac{\pi}{2}$ und $\varepsilon_2 + \frac{\pi}{2}$ haben. Setzt man noch

$$\frac{A\sin\varepsilon_1}{n(b^2-2\alpha k)} = A_1, \quad \frac{A\sin\varepsilon_2}{8n(b^2-6\alpha k)} = A_2, \quad \frac{A\sin\varepsilon_3}{24n(b^2-6\alpha k)} = A_3$$

und berücksichtigt, dass $ge^{-\alpha t}$ die jeweilige Amplitude der Schwingungen des Bifilarinductors darstellt, welche G heissen möge, so ist

$$x = A_1G\sin(nt-\varepsilon_1) - A_2G^3\sin(nt-\varepsilon_2) - A_3G^3\sin(3nt-\varepsilon_3), \qquad \text{(V}$$

worin A_1G, A_2G^3, A_3G^3 die Amplituden der Partialschwingungen bedeuten, aus denen sich jeweilig die Ausweichung der Galvanometernadel zusammensetzt.

Nach unserer Zählung befindet sich das Bifilar zur Zeit $t = zT'$ (wo z eine gerade Zahl) in seiner grössten (negativen) Ausweichung, für $t' = zT' + \frac{T'}{2}$ passirt dasselbe seine Ruhelage; ist die Zeit im Augenblick, wo die mitschwingende Galvanometernadel durch ihre Ruhelage hindurchgeht, gleich $t' + \vartheta$, drückt also ϑ den Zeitunterschied aus zwischen den Durchgängen des Bifilars und des Galvanometers durch ihre Ruhelagen, so ist

$$o = A_1\cos(n\vartheta-\varepsilon_1) - A_2G^2\cos(n\vartheta-\varepsilon_2) + A_3G^2\cos(3n\vartheta-\varepsilon_3)$$

und daher

$$\cos(n\vartheta - \varepsilon_1) = \frac{G^2}{A_1}[A_2 \cos(n\vartheta - \varepsilon_2) - A_3 \cos(3n\vartheta - \varepsilon_3)]. \quad \text{(VIa}$$

Sind — wie dies bei den Versuchen auch stets der Fall war — die Ausweichungen des Inductors nicht allzubedeutend, so kann man, um aus (VIa) den Werth von $n\vartheta$ zu finden, genähert setzen $\cos(n\vartheta - \varepsilon_1) = o$, d. h.

$$n\vartheta = \varepsilon_1 \pm \frac{\pi}{2}; \quad \text{(VIb}$$

dieser Werth, in die rechte Seite der Gleichung (VIa) substituirt, liefert dann einen genaueren Werth der gesuchten Grösse. Es ist in Gleichung (VIb) nur das untere Zeichen zu wählen, wobei ε_1 stets positiv und kleiner als π genommen wird; man erhält dann ϑ immer kleiner als $\pm \frac{T'}{2}$. Ein positiver Werth von ϑ bedeutet, dass der Bifilarinductor früher seine Ruhelage passirt als die Galvanometernadel, während ein negatives ϑ andeutet, dass die Nadel dem Bifilar voraneilt. Dabei wird auf den Umstand, ob Mit- oder Gegeneinanderschwingen stattfindet, weiter keine Rücksicht genommen.

Für die grösste Ausweichung der Galvanometernadel ist deren Geschwindigkeit $\frac{dx}{dt} = o$; nennt man den Werth von t für diesen Moment τ, so ist

$$\frac{dx}{dt} = o = A_1 \cos\left(n\tau - \varepsilon_1 + \frac{\alpha}{n}\right) - A_2 G^2 \cos\left(n\tau - \varepsilon_2 + 3\frac{\alpha}{n}\right) -$$

$$- 3A_3 G^2 \cos\left(3n\tau - \varepsilon_3 + \frac{\alpha}{n}\right), \quad \text{(VIIa}$$

welche Gleichung zur Bestimmung von $n\tau$ dient, wobei in analoger Weise wie bei Auflösung von (VIa) zu verfahren und genähert

$$n\tau = \varepsilon_1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\pi}{2} \quad \text{(VIIb}$$

zu setzen ist. Der hienach gefundene Werth in die Gleichung (V) eingeführt, gibt die jeweilige maximale Ausweichung der Galvanometernadel Γ

$$\Gamma = A_1 G \sin(n\tau - \varepsilon_1) - A_2 G^3 \sin(n\tau - \varepsilon_2) - A_3 G^3 \sin(3n\tau - \varepsilon_3);$$

führt man für A_1, A_2, A_3 ihre Werthe ein, berücksichtigt die Bedeutungen von A, a^2, b^2, c, α und n und bestimmt aus der Gleichung W, so erhält man

$$W = \frac{HFG}{2R\Gamma}\frac{\pi^2+\lambda^2}{T^2}\left[\frac{\sin\varepsilon_1\sin\left(\frac{\pi\tau}{T'}-\varepsilon_1\right)}{\frac{\lambda_1}{T}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}}-\frac{\lambda'}{T'}} - \frac{G^2}{8}\frac{\sin\varepsilon_2\sin\left(\frac{\pi\tau}{T'}-\varepsilon_2\right)}{\frac{\lambda_1}{T}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}}-3\frac{\lambda'}{T'}} - \right.$$

$$\left. - \frac{G^2}{24}\frac{\sin\varepsilon_3\sin\left(\frac{3\pi\tau}{T'}-\varepsilon_3\right)}{\frac{\lambda_1}{T}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}}-3\frac{\lambda'}{T'}}\right], \qquad \text{(VIII}$$

wobei die Winkel ε_1, ε_2, ε_3 nach (IVb) bestimmt sind durch

$$\left.\begin{aligned}
\tang\varepsilon_1 &= \frac{2\pi}{T'}\frac{\frac{\lambda_1}{T}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}}-\frac{\lambda'}{T'}}{\frac{\pi^2+\lambda^2}{T^2}-2\frac{\lambda_1\lambda'}{TT'}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}}-\frac{\pi^2}{T'^2}}\\
\tang\varepsilon_2 &= \frac{2\pi}{T'}\frac{\frac{\lambda_1}{T}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}}-3\frac{\lambda'}{T'}}{\frac{\pi^2+\lambda^2}{T^2}-6\frac{\lambda_1\lambda'}{TT'}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}}-\frac{\pi^2}{T'^2}}\\
\tang\varepsilon_3 &= \frac{6\pi}{T'}\frac{\frac{\lambda_1}{T}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}}-3\frac{\lambda'}{T'}}{\frac{\pi^2+\lambda^2}{T^2}-6\frac{\lambda_1\lambda'}{TT'}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}}-9\frac{\pi^2}{T'^2}}.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(IX}$$

Endlich liefern unter Beachtung der Kleinheit von α die Gleichungen (VIa) und (VIIa) noch folgende Formeln zur Bestimmung von $\frac{\pi\vartheta}{T'}$ und $\frac{\pi\tau}{T'}$:

$$\cos\left(\frac{\pi\vartheta}{T'}-\varepsilon_1\right) = \frac{G^2}{8\sin\varepsilon_1}\left(1+\frac{2\frac{\lambda'}{T'}}{\frac{\lambda_1}{T}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda^2}}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}}}\right)\left[\sin\varepsilon_2\cos\left(\frac{\pi\vartheta}{T'}-\varepsilon_2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\sin\varepsilon_3\cos\left(3\frac{\pi\vartheta}{T'}-\varepsilon_3\right)\right] \qquad \text{(X}$$

genähert

$$\frac{\pi\vartheta}{T'} = \varepsilon_1 - \frac{\pi}{2};$$

$$\cos\left(\frac{\pi\tau}{T'} - \varepsilon_1 + \frac{\lambda'}{\pi}\right) = \frac{G^2}{8\sin\varepsilon_1}\left(1 + \frac{2\frac{\lambda'}{T'}}{\frac{\lambda_1}{T}\frac{\sqrt{\pi^2+\lambda'^2}}{\sqrt{\pi^2+\lambda_1^2}}}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\sin\varepsilon_2\cos\left(\frac{\pi\tau}{T'} - \varepsilon_2 + \frac{3\lambda'}{\pi}\right) + \sin\varepsilon_3\cos\left(\frac{3\pi\tau}{T'} - \varepsilon_3 + \frac{\lambda'}{\pi}\right)\right] \quad \text{(XI}$$

genähert

$$\frac{\pi\tau}{T'} = \varepsilon_1 - \frac{\lambda'}{\pi} + \frac{\pi}{2}.$$

Nach Gleichung (VIII) lässt sich, wenn der Reductionsfactor des Galvanometers auf magnetisches Strommaass bekannt ist, der Widerstand der Leitung in absolutem Maasse bestimmen; ausser der Kenntniss der vom Bifilarinductor eingeschlossenen Fläche (F) und der inducirenden horizontalen Componente des Erdmagnetismus (H) erfordert dann die Widerstandsbestimmung die Beobachtung der gleichzeitigen Schwingungsamplituden von Bifilar (G) und Galvanometer (Γ), ferner die Messung der Decremente (λ_1, λ, λ') und der Schwingungsdauern (T und T').

Ich will nun zur Beschreibung der Versuche übergehen. Die Bestimmung der Schwingungsdauern geschah durch elektrische Registrirung; eine im astronomischen Observatorium des hiesigen physikalischen Institutes aufgestellte, nach Sternzeit gehende, Pendeluhr ist mit einer Contactvorrichtung versehen, wodurch in Intervallen von je zwei Secunden der Strom einer galvanischen Kette kurze Zeit geschlossen wird. Von der Uhr wurde eine Drahtleitung in das Beobachtungszimmer hergestellt und in die Stromleitung ein Morse-Schreibapparat eingeschaltet, auf dessen Papier daher die Zeitmarken erscheinen. Durch einen beim Beobachter befindlichen Taster können die Zeitmomente, wann Bifilar und Galvanometer ihre Ruhelagen passiren, auf dem Papier ebenfalls registrirt und daher auf bekannte Weise die Durchgangszeiten sehr genau bestimmt werden. Die hieraus — bei Anwendung eines genügenden Intervalls von Schwingungen — ermittelten Schwingungsdauern besitzen eine solche Genauigkeit, dass die aus mehreren Beobachtungen hervorgehenden, auf unendlich kleine Bogen reducirten Werthe sich meist nur um einige Einheiten der vierten Decimale (Schwingungsdauer über 10 Sec.) unterscheiden.

Das Beobachtungsverfahren ist nun folgendes: Der richtig orientirte Bifilarinductor wird in Schwingungen versetzt und in die Leitung

das Galvanometer und der Erdinductor eingeschaltet (Loch zwischen *II* und *III* gestöpselt, Fig. 6). Nach Verlauf von etwa einer halben Stunde werden die Messungen begonnen und zunächst die Durchgänge des Bifilars registrirt, dann nach einer Pause von einigen Minuten eine längere Reihe von Schwingungsamplituden am Bifilar sowohl als am Galvanometer gemessen, indem abwechselnd durch die beiden neben einander stehenden Ablesefernrohre je ein Schwingungsbogen beobachtet wird. Die Messungen am Bifilar geschehen an einer $d = 995^{mm}$ vom Spiegel entfernten Scala, beim Galvanometer beträgt die Entfernung von Spiegel und Scala $\delta = 2415^{mm}$. Darauf werden abwechselnd die Zeitmomente registrirt, in denen Bifilar und Galvanometer ihre Ruhelage passiren, welche Beobachtungen die Zeitdifferenz ϑ (für die eben herrschende Schwingungsdauer T' des Bifilars) liefern; nach einer entsprechenden Pause werden wieder Durchgänge des Bifilars aufgezeichnet und letztere Beobachtungen nach einiger Zeit wiederholt. Unmittelbar hierauf wird die Schwingungsdauer T des Galvanometers ebenfalls durch mehrere Messungen ermittelt, wobei die Leitung geöffnet ist; gleichzeitig bestimmt man das hiebei herrschende logarithmische Decrement λ. Die Leitung wird sodann wieder wie früher geschlossen, aber der Bifilarinductor festgestellt und nun das Decrement der Nadelschwingungen bei (durch die Leitung) geschlossenem Multiplicator λ_1 ermittelt. Genau in der gleichen Weise geschehen die Beobachtungen ein zweites Mal, wobei aber der vor dem Galvanometer eingeschaltete Commutator umgelegt ist. Natürlich muss bei Bestimmung der Schwingungsdauern von Bifilar und Galvanometer die jedesmalige Grösse der Schwingungsbogen notirt werden. Nach Vollendung eines solchen Paares von Messungen wurde der Widerstand der Leitung mit dem Widerstande eines Siemens'schen Stöpselrheostaten verglichen. Der Bifilarinductor ist dabei festgestellt, und der Vergleich geschieht in der Weise, dass man die unter Anwendung der Zurückwerfungsmethode entstehenden Grenzbogen der Galvanometerschwingungen bestimmt, wenn nach einander Bifilarinductor + Erdinductor + Galvanometer, sodann Erdinductor + Galvanometer + Normalwiderstand, endlich Erdinductor + Galvanometer die Leitung bilden (s. Fig. 6). Als Elektromotor dient der Erdinductor, der um seine horizontal gestellte Achse umgelegt wird, wobei also die verticale Erdkraft inducirt; zur Verstärkung der Wirkung wird während der Widerstandsvergleiche senkrecht über dem Erdinductor ein verticaler

Stahlmagnet befestigt, den man sodann wieder entfernt; desgleichen wird, um die Dämpfung der Galvanometerschwingungen zu erhöhen, ein breiter, elliptisch gebogener Kupferblechstreifen in den Holzrahmen des Multiplicators eingeschoben. Unmittelbar neben dem Stöpselrheostaten hing ein Thermometer, ein zweites in der Nähe des Galvanometers.

Beobachtung Nr. 1a); Temperatur 14,2° C.

$T'_{(760)}$ 11,3163 Sec., $T'_{(0)}$ 11,2935, $T_{(250)}$ 11,4980.
$_{(600)}$ 11,3080 11,2930,

Die in Klammern beigesetzten Zahlen bezeichnen die Grössen der Schwingungsbogen in Scalentheilen, auf welche sich die angegebenen Schwingungsdauern beziehen; unter $T'_{(0)}$ sind die berechneten Werthe der auf unendlich kleine Bogen reducirten Oscillationsdauer des Bifilars zu verstehen, aus deren Mittel sodann die Schwingungsdauer für jeden beliebigen Schwingungsbogen bestimmt werden kann.

$$\lambda_1 = 0{,}06569, \qquad \lambda = 0{,}004154, \qquad \lambda' = 0{,}003509.$$

Die während des Mitschwingens gleichzeitig herrschenden Schwingungsweiten waren für

Bifilar		Galvanometer
809,2		
	803,1	96,7
797,0		
	792,4	95,3
787,8		
	782,5	94,2
777,2		
	771,3	92,7
765,5		
	759,9	91,6
754,3		
	749,1	90,1
744,0		
	739,2	88,7
734,4		
	771,10	92,75

In der ersten Verticalreihe der mit „Bifilar“ überschriebenen Rubrik sind die direct den Beobachtungen entnommenen Schwingungsbogen aufgeführt, die zweite Reihe enthält die Mittelwerthe je zweier auf einander folgenden Zahlen der ersten Reihe, d. i. also die Schwingungsbogen des Bifilars, welche zu den daneben unter „Galvanometer“ stehenden Zahlen gehören; die unter dem Horizontalstrich angeführten Zahlen sind die Mittelwerthe aus jeder Reihe, wobei die in der Mitte jeder Reihe stehende Zahl doppelt gerechnet ist. Heisst n der halbe Schwingungsbogen des Bifilars, so erhält man G nach der Formel

$G = \frac{n}{2d}\left(1 - \frac{n^2}{3d^2} + \frac{n^4}{5d^4} - \frac{n^6}{7d^6}\right)$, wo $d = 995^{\text{mm}}$; für Γ genügt es zu setzen

$\Gamma = \frac{\nu}{2\delta}\left(1 - \frac{\nu^2}{3\delta^2}\right)$, wo ν der halbe Schwingungsbogen des Galvanometers und $\delta = 2415^{\text{mm}}$ ist.

Es ergibt sich $G = 0{,}184828$, $\Gamma = 0{,}009599$.

Die Registrirung der Durchgänge des Bifilars und der Galvanometernadel durch ihre Ruhelagen lieferte nun folgende Zeitunterschiede: 2,42, 2,38, 2,44, 2,47, also im Mittel 2,43 Sec.; das Bifilar passirte früher seine Ruhelage als die Nadel, und die mittleren Schwingungsbogen waren hiebei beziehungsweise 700 und 80 Scalenstriche. Berechnet man daher mit den Werthen $T'_{(700)}$ 11,3132 und $T_{(80)}$ 11,4977, sowie mit den angegebenen Werthen von λ_1, λ und λ' die Gleichungen (IX), so erhält man

$$\operatorname{tang} \varepsilon_1 = -1{,}22029, \quad \operatorname{tang} \varepsilon_2 = -1{,}06711, \quad \operatorname{tang} \varepsilon_3 = -0{,}00129,$$
$$\text{also } \varepsilon_1 = 129{,}334^0, \quad \varepsilon_2 = 133{,}141^0, \quad \varepsilon_3 = 179{,}926^0.$$

Genähert ist daher $\frac{\pi \vartheta}{T'} = 39{,}334^0$.

Führt man diesen Werth in die Gleichung (X) ein, wobei für G die dem Schwingungsbogen $2n = 700$ entsprechende Grösse 0,17009 zu setzen ist, so wird

$$\cos\left(\frac{\pi\vartheta}{T'} - \varepsilon_1\right) = -0{,}000252, \text{ also } \frac{\pi\vartheta}{T'} - \varepsilon_1 = -90{,}015^0 \text{ und}$$
$$\frac{\pi\vartheta}{T'} = 39{,}319^0,$$

wodurch der als Näherung genommene Werth nur sehr wenig geändert wird und daher eine Wiederholung der Rechnung unnothwendig erscheint. Mit dem letzteren Werth folgt aber $\vartheta = +2{,}47$ Sec.; das positive Zeichen des ϑ bedeutet, dass die Durchgänge des Bifilars durch seine Ruhelage früher geschehen als jene der Galvanometernadel. Die Uebereinstimmung des Resultats der Rechnung mit jenem der Beobachtung (2,43 Sec.) ist befriedigend.

Die in Gleichung (VIII) vorkommende Grösse R, der Reductionsfactor des Galvanometers auf magnetisches Strommaass, enthält die horizontale Componente des Erdmagnetismus als Factor; bezeichnen wir deren Werth an dem Orte, wo das Galvanometer aufgestellt ist,

mit H_1 und beachten, dass kleine Aenderungen in der Horizontal-Intensität auf das Verhältniss $\frac{H}{H_1}$ ohne Einfluss sind, so folgt, dass

$$\frac{HF}{2R} = C$$

bei allen Versuchen constant ist, und daher, wenn wir den in der Klammer stehenden Ausdruck der Gleichung (VIII) L nennen, dass $\frac{G}{\Gamma}\frac{\pi^2 + \lambda^2}{T^2} \cdot L$ eine dem Widerstande der Leitung proportionale Grösse vorstellt. Der Leitungswiderstand bei der Temperatur t^0 C., W_t, kann aber gesetzt werden

$$W_t = W_0 (1 + \varkappa t),$$

wenn W_0 den Widerstand bei 0° und $\varkappa$ die Zunahme der Widerstandseinheit für eine Temperaturerhöhung von 1° C. angibt; für das Kupfer unserer Leitung mag $\varkappa = 0{,}00384$ angenommen werden[1]). Somit ist

$$W_0 = C \frac{1}{1 + \varkappa t} \frac{G}{\Gamma} \frac{\pi^2 + \lambda^2}{T^2} \cdot L.$$

Die Rechnung gibt mit den Werthen $T'_{(770)}$ 11,3168, $T_{(90)}$ 11,4977

tang $\varepsilon_1 = -1{,}24476$, tang $\varepsilon_2 = -1{,}09865$, tang $\varepsilon_3 = -0{,}00131$,
also $\varepsilon_1 = 128{,}777^0$, $\varepsilon_2 = 132{,}308^0$, $\varepsilon_3 = 179{,}925^0$.

Genähert ist daher $\frac{\pi\tau}{T'} = 218{,}713^0$, wonach mittelst (XI) als genauerer Werth

$$\frac{\pi\tau}{T'} = 218{,}698^0$$

folgt. Es wird ferner $L = 143{,}665$ und wegen $t = 14{,}2^0$ endlich

$$W_0 = 195{,}87\ C.$$

Die correspondirende Beobachtungsreihe, bei welcher der Stromwender vor dem Galvanometer umgelegt ist, lieferte folgende Data:

Beobachtung Nr. 1 b); Temperatur 15,5°.

$T'_{(820)}$ 11,3234, $T'_{(0)}$ 11,2969, $T_{(280)}$ 11,5038.
$_{(660)}$ 11,3144, 11,2966,
$\lambda_1 = 0{,}065842$, $\lambda = 0{,}004094$, $\lambda' = 0{,}003134$.

1) Wiedemann, Galv., 2. Aufl. Bd. 1 S. 296 u. 297.

Gleichzeitige Schwingungsbogen von

Bifilar	Galvanometer
843,7	100,3
833,1	99,2
822,8	98,0
812,6	96,9
802,6	95,7
792,8	94,8
782,3	93,2
812,81	96,87

$G = 0{,}193866, \qquad \Gamma = 0{,}010024.$

Die Registrirung der Durchgänge gab die Zeitunterschiede: 2,43, 2,47, 2,47, 2,48, 2,43, 2,50, im Mittel 2,46 Sec.; dabei waren die Schwingungsbogen des Bifilars etwa 730, der Galvanometernadel nahe 90 Scalentheile. Die Rechnung ergibt mit $T'_{(730)}$ 11,3175, $T_{(90)}$ 11,5032

$$\operatorname{tang} \varepsilon_1 = -1{,}22160, \qquad \operatorname{tang} \varepsilon_2 = -1{,}09476, \text{ d. h.}$$
$$\varepsilon_1 = 129{,}304^0, \qquad = 132{,}410^0.$$

Die Berechnung von ε_3 ist hier und in der Folge unterblieben, da die $\sin \varepsilon_3$ enthaltenden Glieder in den Gleichungen (VIII), (X) und (XI) völlig verschwindend klein sind. Man hat genähert $\frac{\pi \vartheta}{T'} = 39{,}304^0$, was (mit $G = 0{,}17575$) nach (X) als genaueren Werth $\frac{\pi \vartheta}{T'} = 39{,}292^0$ liefert; daraus folgt $\vartheta = 2{,}47$ Sec., was mit der Beobachtung sehr gut übereinstimmt.

Zur Berechnung von W_0 ist zu setzen $T'_{(810)}$ 11,3230, $T'_{(100)}$ 11,5032, womit folgen

$$\operatorname{tang} \varepsilon_1 = -1{,}26171, \qquad \operatorname{tang} \varepsilon_2 = -1{,}13049, \text{ d. h.}$$
$$\varepsilon_1 = 128{,}399^0, \qquad \varepsilon_2 = 131{,}495^0;$$

wir nehmen daher als Näherungswerth $\frac{\pi \tau}{T'} = 218{,}342^0$ und erhalten damit als genaueren Werth $\frac{\pi \tau}{T'} = 218{,}327^0$. Ferner ist $L = 143{,}192$ und daher

$$W_0 = 195{,}06\ C.$$

Die Vergleichung des Widerstandes der Leitung mit jenem des Stöpseletalons gab folgende Resultate: Sind a und b die beiden bei

der Zurückwerfungsmethode zu Stande kommenden Grenzbogen (wobei die Scalen-Elongationen in bekannter Weise reducirt sind), heisst λ das entsprechende natürliche logarithmische Decrement der Schwingungsbogen, so soll für den Fall, dass sich Bifilarinductor, Erdinductor und Galvanometer $(B + E + G)$ in der Leitung befinden, der Ausdruck

$$\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tang} \frac{\lambda}{\pi}}$$

ξ genannt werden; für den Fall, dass Erdinductor, Galvanometer und Normalwiderstand $(E + G + N)$ die Leitung bilden, heisse die entsprechende Grösse ζ, endlich wenn die Leitung nur durch Erdinductor und Galvanometer $(E + G)$ gebildet wird, sei obiger Ausdruck mit η bezeichnet. Es ergibt sich sodann das Verhältniss der Widerstände

$$\frac{(E + G + B)_t}{N_{t'}} = \frac{W_t}{N_{t'}} = \frac{\frac{1}{\xi}}{\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\eta}} = v;$$

darin bedeuten t und t' die Temperaturen für die Widerstände W und N. Das Verhältniss der Widerstände bei der Temperatur 0° C. ist dann, wenn $\varkappa'$ die Zunahme der Widerstandseinheit von N für 1° Temperaturerhöhung angibt:

$$\frac{W_0}{N_0} = v \frac{1 + \varkappa' t'}{1 + \varkappa t}.$$

Der Stöpselrheostat ist aus Neusilberdraht hergestellt, also $\varkappa' = 0{,}0004$ zu setzen; das Thermometer, welches in unmittelbarer Nähe des Etalons hing, zeigte $t' = 14{,}6^0$, während die Angabe des anderen Thermometers beim Galvanometer $t = 15{,}7^0$ war. Mit den Werthen

$a = 402{,}84, \quad b = 318{,}38, \quad \lambda = 0{,}23529$ erhält man

$$\frac{1}{\xi} = 0{,}0013660, \text{ ferner mit}$$

$a = 395{,}61, \quad b = 312{,}90, \quad \lambda = 0{,}23455$ folgt

$$\frac{1}{\zeta} = 0{,}0013906, \text{ endlich mit}$$

$a = 610{,}64, \quad b = 467{,}60, \quad \lambda = 0{,}26698$ folgt

$$\frac{1}{\eta} = 0{,}0009099, \text{ und somit ist}$$

$$v = 2{,}84133 \text{ und}$$

$$W_0 = 2{,}69543\, N_0.$$

Um die Schwingungsdauer des Bifilarinductors auf möglichst einfache Weise ein wenig verändern zu können, waren in den Holzring, auf welchen der Draht gewickelt ist, cylindrische Messinggewichte hineingelegt, so dass sie sich in der Drehungsachse des Bifilars befanden; durch Wegnahme oder Hinzugeben eines entsprechenden Gewichtsstückes wird die Oscillationsdauer respective vergrössert oder verkleinert. Bei der folgenden Versuchsreihe war die Schwingungsdauer T' auf die beschriebene Weise so weit vergrössert worden, dass das Bifilar bereits langsamer schwang als die Galvanometernadel.

Beobachtung Nr. 2a); Temperatur 15,0°.

$$T'_{(760)}\ 11{,}5731, \qquad T'_{(0)}\ 11{,}5497, \qquad T'_{(300)}\ 11{,}4944.$$
$$_{(600)}\ 11{,}5655, \qquad 11{,}5501,$$
$$\lambda_1 = 0{,}067028, \qquad \lambda = 0{,}004115, \qquad \lambda' = 0{,}003084.$$

Die gleichzeitigen Schwingungsbogen an Bifilar und Galvanometer beobachtet, waren beziehungsweise 777,68 und 108,78 Scalentheile, wonach $G = 0{,}186266$, $\Gamma = 0{,}011261$.

Die Registrirung der Durchgänge durch die Ruhelagen ergab (Schwingungsbogen des Bifilars 700 Str., $G = 0{,}17009$) im Mittel einen Zeitunterschied von 1,12 Sec., um welchen die Galvanometernadel früher die Ruhelage passirte als das Bifilar. Mit $T'_{(700)}$ 11,5703, $T_{(100)}$ 11,4938 und den obigen Werthen der Decremente ergibt die Rechnung

$$\operatorname{tang} \varepsilon_1 = 3{,}07824, \qquad \operatorname{tang} \varepsilon_2 = 2{,}80097, \text{ d. h.}$$
$$\varepsilon_1 = 72{,}009^0, \qquad \varepsilon_2 = 70{,}352^0;$$

$\frac{\pi\vartheta}{T'}$ genähert $= -17{,}991^0$, woraus als genauerer Werth folgt

$\frac{\pi\vartheta}{T'} = -17{,}985^0$, somit ist $\vartheta = -1{,}15$ Sec., was wieder mit der Beobachtung sehr gut harmonirt: das negative Vorzeichen des ϑ zeigt an, dass das Bifilar der Galvanometernadel nachfolgt.

Für die Berechnung von W_0 ist zu nehmen $T'_{(780)}$ 11,5745, $T_{(110)}$ 11,4938 und man erhält

$$\operatorname{tang} \varepsilon_1 = 2{,}90442, \qquad \operatorname{tang} \varepsilon_2 = 2{,}65466, \text{ also}$$
$$\varepsilon_1 = 71{,}001^0, \qquad \varepsilon_2 = 69{,}359^0;$$

auf die bekannte Weise berechnet, findet sich

$$\frac{\pi\tau}{T'} = 160{,}953^0, \text{ ferner } L = 169{,}132 \text{ und}$$
$$W_0 = 197{,}55\ C.$$

Beobachtung Nr. 2b); Temperatur 15,7°.

$T'_{(770)}\ 11{,}5741,\quad T'_{(0)}\ 11{,}5500,\quad T_{(300)}\ 11{,}5003.$

$_{(630)}\ 11{,}5671,\quad 11{,}5502,$

$\lambda_1 = 0{,}066743,\quad \lambda = 0{,}004087,\quad \lambda' = 0{,}002856.$

Gleichzeitige Schwingungsbogen des Bifilars 793,92, des Galvanometers 111,54 Scalentheile, also $G = 0{,}189788$, $\Gamma = 0{,}011540$.

Zeitunterschied der Durchgänge durch die Ruhelagen (für den Schwingungsbogen des Bifilars = 750 Str.) im Mittel 1,23 Sec. Die Berechnung mit $T'_{(750)}$ 11,5735 und $T_{(100)}$ 11,4997 liefert

$$\operatorname{tang} \varepsilon_1 = 3{,}18492,\qquad \operatorname{tang} \varepsilon_2 = 2{,}92414, \text{ also}$$
$$\varepsilon_1 = 72{,}569^0,\qquad \varepsilon_2 = 71{,}120^0;$$

$\frac{\pi\vartheta}{T'} = -17{,}125^0$, woraus $\vartheta = -1{,}12$ Sec. folgt. Dieser berechnete Werth weicht zwar von dem beobachteten um $^1/_{10}$ Sec. ab, was durch Beobachtungsfehler nicht erklärt werden kann, es wird die Abweichung daher wohl durch eine zufällige Störung veranlasst worden sein, die in Luftströmungen, gegen welche der Bifilarinductor nur sehr mangelhaft geschützt war, ihren Grund haben dürfte; dafür spricht auch der Umstand, dass in der correspondirenden Beobachtung (Nr. 2a), bei welcher alle Verhältnisse sehr nahe die gleichen waren, der beobachtete Zeitunterschied sich kleiner ergab. Ferner findet man mit $T'_{(790)}$ 11,5757, $T_{(110)}$ 11,4997

$$\operatorname{tang} \varepsilon_1 = 3{,}09270,\qquad \operatorname{tang} \varepsilon_2 = 2{,}83462,$$
$$\varepsilon_1 = 72{,}082^0,\qquad \varepsilon_2 = 70{,}568^0 \text{ und damit}$$
$$\frac{\pi\tau}{T'} = 162{,}038^0; \text{ weiters folgt } L = 170{,}419 \text{ und}$$
$$W_0 = 197{,}30\ C.$$

Bei der hierauf ausgeführten Widerstandsvergleichung erhielt man: Leitung gebildet durch Bifilar, Erdinductor und Galvanometer

$$a = 399{,}07,\quad b = 315{,}18,\quad \lambda = 0{,}23599;\ \frac{1}{\xi} = 0{,}0013792;$$

Leitung durch Erdinductor, Etalon und Galvanometer gebildet

$$a = 391{,}99,\quad b = 310{,}30,\quad \lambda = 0{,}23397;\ \frac{1}{\zeta} = 0{,}0014031;$$

endlich Leitung durch Erdinductor und Galvanometer allein hergestellt

$$a = 604{,}05,\quad b = 462{,}63,\quad \lambda = 0{,}26673;\ \frac{1}{\eta} = 0{,}00091975.$$

Damit wird $v = 2{,}85342$ und wegen $t = 15{,}6^0$, $t' = 15{,}4^0$ folgt

$$W_0 = 2{,}70875\ N_0.$$

Ein drittes Paar von Messungen, welche ausgeführt wurden, nachdem die Schwingungsdauer des Bifilars durch Entlastung desselben abermals vergrössert war, ergab die folgenden Resultate:

Beobachtung Nr. 3a); Temperatur 15,5°.

$T'_{(730)}$ 11,6583, $T'_{(0)}$ 11,6363, $T_{(250)}$ 11,4847.
$_{(570)}$ 11,6498, 11,6360,

$\lambda_1 = 0{,}066349, \quad \lambda = 0{,}004057, \quad \lambda' = 0{,}003419.$

Gleichzeitig beobachtete Schwingungsbogen am Bifilar 732,00, am Galvanometer 88,12 Scalentheile, wonach $G = 0{,}176232$, $\Gamma = 0{,}009121$.

Mit $T'_{(730)}$ 11,6585 und $T_{(90)}$ 11,4844 wird

$\varepsilon_1 = 53{,}159^0$, $\varepsilon_2 = 50{,}092^0$ und daher $\frac{\pi\tau}{T'} = 143{,}110^0$, $L = 145{,}364$ und

$$W_0 = 198{,}39\ C.$$

Beobachtung Nr. 3b); Temperatur 15,5°.

$T'_{(700)}$ 11,6552, $T'_{(0)}$ 11,6348, $T_{(270)}$ 11,4888.
$_{(550)}$ 11,6484, 11,6352,

$\lambda_1 = 0{,}066076, \quad \lambda = 0{,}004121, \quad \lambda' = 0{,}003164.$

Die gleichzeitig herrschenden Schwingungsbogen am Bifilar 704,45, am Galvanometer 86,67 Scalentheile geben $G = 0{,}170109$, $\Gamma = 0{,}008972$, und man findet mit $T'_{(700)}$ 11,6554, $T_{(90)}$ 11,4885: $\varepsilon_1 = 54{,}287^0$, $\varepsilon_2 = 51{,}495$; daher $\frac{\pi\tau}{T'} = 144{,}240^0$, $L = 147{,}625$ und

$$W_0 = 197{,}57\ C.$$

Die beobachteten Werthe von ϑ stimmten bei beiden Versuchsreihen mit den berechneten sehr gut überein.

Die Widerstandsvergleichung gab: In der Leitung sind Bifilar, Erdinductor und Galvanometer

$$a = 172{,}34, \quad b = 136{,}11, \quad \lambda = 0{,}23601; \ \frac{1}{\xi} = 0{,}0031936;$$

in der Leitung befinden sich Erdinductor, Etalon und Galvanometer

$$a = 169{,}59, \quad b = 133{,}93, \quad \lambda = 0{,}23606; \ \frac{1}{\zeta} = 0{,}0032455;$$

die Leitung wird durch Erdinductor und Galvanometer gebildet

$$a = 261{,}17, \quad b = 199{,}93, \quad \lambda = 0{,}26720; \ \frac{1}{\eta} = 0{,}0021276.$$

Es ist daher $v = 2{,}85678$ und weil $t = 15{,}1^0$, $t' = 15{,}2^0$:

$$W_0 = 2{,}71663\ N_0.$$

Stellen wir die Ergebnisse der drei Paare von Messungen zusammen, so erhalten wir nachstehende Tabelle:

Nr.	$\frac{W_0}{C}$	Mittel	$\frac{W_0}{N_0}$	Z
1a	195,87	195,46	2,69543	72,515
1b	195,06			
2a	197,55	197,42	2,70875	72,882
2b	197,30			
3a	198,39	197,98	2,71663	72,877
3b	197,57			

In dem Zimmer, in welchem die Messungen angestellt wurden, herrschten leider an den verschiedenen Stellen merklich verschiedene Temperaturen und blieb auch die Temperatur an einer und derselben Stelle während der Dauer der Messungen nicht hinreichend constant. In der, einem Fenster nahen, Ecke, wo der Bifilarinductor hing, war — wie ich mich nachträglich überzeugte — die Temperatur mehr als 2^0 niedriger als in der Nähe des Galvanometers, wo sich das Thermometer befand; es entspricht daher die Angabe dieses Thermometers durchaus nicht der mittleren Temperatur der ausgedehnten Leitung, und können daher auch die Reductionen des Widerstandes auf die Temperatur 0^0 nicht ganz richtig sein. Man kann annehmen, dass die Temperatur t' des unmittelbar beim Etalon befindlichen Thermometers nahe die dem Etalon wirklich zukommende Temperatur ist, überdies hat ein Fehler in t' wegen des im Vergleich zu $\varkappa$ kleinen Werthes von $\varkappa'$ nur geringen Belang; wären daher die Vergleiche des Widerstandes der Leitung mit jenem des Etalons richtig, so würde die Verschiedenheit, welche die Werthe des Verhältnisses $\frac{W_0}{N_0}$ zeigen, nur durch falsche Annahmen der Temperatur der Leitung verursacht sein: wenn nun bei der Berechnung des Verhältnisses $\frac{W_0}{C}$ ebenfalls nahe die gleichen Fehler in der Temperaturbestimmung der Leitung unterlaufen wären — was wahrscheinlich ist — im Uebrigen aber die Bestimmung richtig wäre, so müssten die aus den Versuchen hervorgehenden Werthe des Verhältnisses $\frac{N_0}{C} = Z$ sehr nahe eine constante Zahl geben. In der letzten Columne der obigen Tabelle ist

dieses Verhältniss aufgeführt, und es zeigt sich in der That, dass die Werthe Z nur um $^1/_2$ Procent unter einander differiren, während die Mittelwerthe $\frac{W_0}{C}$ um mehr als 1 Procent von einander abweichen.

Aus dem bisher Mitgetheilten geht die Uebereinstimmung der Resultate der Beobachtung mit den theoretischen Formeln zur Genüge hervor; es sei daher nur noch eine Beobachtung hier angeführt, bei welcher das logarithmische Decrement λ_1 bedeutend war. Hiebei wurde ein anderes Galvanometer benützt, bei dem sich ein starker Kupferdämpfer in den inneren Raum der Multiplicatorrolle einschieben lässt; durch Nähern grosser und kräftiger Magnete wird die Richtkraft des Erdmagnetismus geschwächt, so dass die Galvanometernadel etwa 16 Sec. Schwingungsdauer hat. Ist der Dämpfer entfernt, so nehmen zwar die Elongationen der Nadel auch erheblich ab, indess liess sich doch die Schwingungsdauer mit genügender Sicherheit bestimmen.

Um das logarithmische Decrement λ_1 zu erhalten, habe ich folgende zwei Verfahren eingeschlagen. Man bestimmt die Ausweichung, welche die in der Ruhelage befindliche Nadel durch einen gewissen Inductionsstoss (hervorgebracht durch Umlegen eines kleinen Erdinductors um die verticale Achse) erhält, sie heisse a_1; ausserdem ermittelt man den Grenzbogen, den die Schwingungen bei Anwendung der Multiplicationsmethode erreichen. Nennen wir diesen Grenzbogen A, so herrscht bekanntlich der Zusammenhang

$$a_1 = \frac{A}{2}\left(1 - e^{-\lambda_1}\right), \quad \text{also } \lambda_1 = l\left(\frac{A}{A - 2a_1}\right).$$

Die Messung ergab $a_1 = 71{,}0$, $A = 168{,}2$, $a_1 = 71{,}2$.

Die Elongationen a_1 wurden vor und nach der Multiplication gemessen, und sind die angegebenen Werthe die Mittel aus mehreren abwechselnd gerichteten Ausschlägen; es folgt

$$\lambda_1 = 1{,}867.$$

Die zweite Methode zur Ermittlung von λ_1 besteht darin, dass die Ausschläge verglichen werden, welche die mit dem Dämpfer umgebene und die ohne Dämpfer schwingende Nadel durch den gleichen Inductionsstoss annehmen. Ist analog den früheren Bezeichnungen λ das natürliche logarithmische Decrement für die in der Luft schwingende Nadel und heisst a der entsprechende Anschlag, so gilt die Gleichung

$$a e^{\frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda}} = a_1 e^{\frac{\lambda_1}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda_1}}, \text{ somit}$$

$$\frac{\lambda_1}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda_1} = l\left(\frac{a}{a_1}\right) + \frac{\lambda}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda} = c;$$

aus der transcendenten Gleichung ist λ_1 zu bestimmen. Setzt man

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\lambda_1} = y, \text{ so wird}$$

$$y = c \operatorname{tang} y.$$

Aus den Beobachtungen $a = 124{,}7$, $a_1 = 70{,}6$ und $\lambda = 0{,}06445$ folgt $c = 0{,}60067$, und man erhält unter Anwendung der Regula falsi

$$y = 1{,}052, \text{ d. h. } \lambda_1 = 1{,}794.$$

Die Verschiedenheit, welche die nach den beiden Methoden bestimmten Werthe von λ_1 zeigen, dürfte ihre Erklärung darin finden, dass das Kupfer der Dämpferhülle sehr eisenhaltig war; in Folge davon war die Ruhelage der mit dem Dämpfer umgebenen Nadel sehr verschieden von jener,. welche die ungedämpfte Nadel annahm, und es traten auch während der Messungen starke Veränderungen der Ruhelage ein.

Es soll der Mittelwerth aus den beiden Bestimmungen, also $\lambda_1 = 1{,}830$ angenommen werden. Die Schwingungsdauer der Nadel beim Decrement $\lambda = 0{,}06445$ betrug $T_{(230)}$ 16,364 Sec.; vom Bifilarinductor waren die grossen Bleikugeln abgenommen, das Decrement seiner Schwingungen ist daher bedeutend grösser als bei den früheren Versuchen, es war $\lambda_1 = 0{,}007018$ und $T'_{(640)}$ 15,874 Sec. Bei den mittleren Schwingungsbogen von 700 Theilstrichen am Bifilar und 120 Theilstrichen am Galvanometer wurde auf die bekannte Weise der Zeitunterschied ϑ der Durchgänge durch die Ruhelagen bestimmt und fand sich derselbe 0,42, 0,38, 0,58 Sec.; das Bifilar eilt der Galvanometernadel voraus. Die geringe Uebereinstimmung dieser Zahlen muss wohl aus den Veränderungen der Ruhelage der Nadel erklärt werden. Die Rechnung gibt mit $T'_{(700)}$ 15,877, $T_{(120)}$ 16,363

$$\operatorname{tang}\varepsilon_1 = -11{,}6561, \quad \text{also } \varepsilon_1 = 94{,}903^0 \text{ und } \frac{\pi\vartheta}{T'} = 4{,}903^0,$$

wobei der genäherte Werth genügen mag; es folgt hiemit $\vartheta = +0{,}43$ Sec., was mit dem Mittel der beobachteten Werthe ziemlich gut stimmt. Noch muss bemerkt werden, dass ich bei diesem Versuche wegen der geringen Windungszahl des angewendeten Multiplicators die Wirkung des Bifilars dadurch verstärkte, dass ich einen kurzen

Magnetstab horizontal an einem Statif befestigte und in den inneren Raum der Windungen des Bifilarinductors brachte; der Magnet war mit seiner Achse parallel dem magnetischen Meridiane und seine Mitte fiel mit dem Centrum der Windungen zusammen. Bei den Schwingungen des Bifilars um den Magnetstab ist nun die Inductionswirkung ziemlich stark, aber es leuchtet ein, dass die früher für den Fall einer constanten inducirenden Kraft aufgestellten Formeln selbst bei kleinen Elongationen des Bifilars nur mehr genähert gelten können. Es erübrigt noch die aufgestellten Formeln für den Fall zu prüfen, dass man ein Galvanometer anwendet, dessen Magnet eine aperiodische Bewegung hat, wo also Schwingungsdauer und logarithmisches Decrement nicht durch reelle Grössen ausgedrückt sind.

Ueber die elektrische Durchbohrung des Glases[1]).

Von

Dr. **A. v. Waltenhofen**

in Prag.

Bei Gelegenheit meiner auf die Umkehrung des Lullin'schen Experimentes bezüglichen Versuche (1866) habe ich einen merkwürdigen Fall der elektrischen Durchbohrung des Glases beobachtet und beschrieben, welcher im Folgenden besteht.

Bringt man eine dünne Glasplatte P (Fig. 1), auf welcher ein einige Centimeter weiter Ring a aus Stearin aufgetropft ist, so zwischen

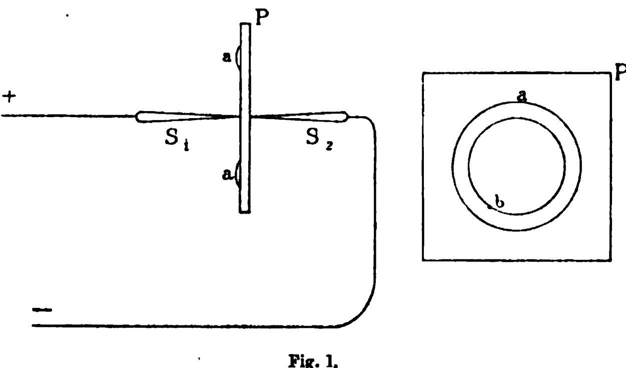


Fig. 1.

die mit den beiden Belegungen (+ und —) einer Leydener Batterie verbundenen Spitzen S_1 und S_2, dass diese Spitzen einander irgendwo innerhalb des Ringes gerade gegenüber stehen, so erfolgt bei der Entladung eine einfache Durchbohrung am inneren Rande des Stearinringes, z. B. bei b. — Stellt man jedoch die Spitzen S_1 und S_2 (Fig. 2) beiderseits und gleichweit vom Centrum so auf einen Durchmesser der Ringfläche, dass sie einander in einem Abstande von etwa 1 bis 3^{cm} parallel sind,

1) Aus einer in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie (Bd. 79) veröffentlichten ausführlicheren Abhandlung vom Verfasser mitgetheilt.

so erfolgen bei der Entladung gleichzeitig mehrere Durchbohrungen, jedoch immer am inneren Rande des Ringes.

Die Zahl der Durchbohrungen hängt von der Distanz der Spitzen im Verhältnisse zum Ringdurchmesser und vor allem vom mechanischen Aequivalente der Entladung ab[1]). Die Versuche gelingen sehr sicher.

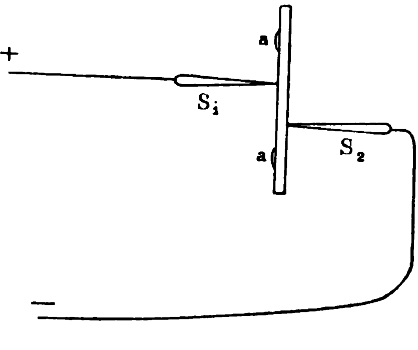


Fig. 2.

Die Beachtung, welche diesen Versuchen in jüngster Zeit zu Theil geworden ist[2]), hat mich veranlasst, dieselben mit einigen Modificationen zu wiederholen, und ich habe dabei folgende Thatsachen, die mir bemerkenswerth scheinen, beobachtet.

1. Bringt man auf eine dünne Glasplatte[3]) einen Tropfen Stearin und hält sie zwischen die einige Centimeter von einander entfernten kugelförmigen Elektroden einer Holtz'schen oder auch einer gewöhnlichen Elektrisirmaschine, so erfolgt entweder sogleich oder nach mehrmaligem Ueberschlagen um den Rand der Glasplatte eine Durchbohrung des Glases am Stearintropfen, falls derselbe nicht zu nahe am Rande der Glasplatte sich befindet. Das kleinste Tröpfchen Stearin kann auf diese Art dazu dienen, eine beliebige Durchbohrungsstelle vorzuzeichnen. Der Versuch gelingt auch im Funkenstrome der Holtzschen Maschine, wenn man dieselbe ohne Condensator wirken lässt.

1) Bei starken Entladungen habe ich stets mehrere und wiederholt sogar 15 gleichzeitige Durchbohrungen beobachtet. Einfache Durchbohrungen sind mir bei der Fig. 2 dargestellten Spitzenstellung nur bei Anwendung schwacher Entladungen ausnahmsweise vorgekommen.

2) Siehe die Abhandlung: „Ueber die elektrische Durchbrechung des Glases". Von E. Mach und S. Doubrava; Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 78.

3) Die bei den hier beschriebenen Versuchen benutzten Glasplatten waren 16 cm im Quadrat und 1 bis 2 mm dick.



2. Die elektrische Durchbohrung gelingt auffallend leichter, wenn die mit Stearin betropfte Seite der Glasplatte der positiven Elektrode gegenüber steht[1]).

3. Hängt man eine Glasplatte bifilar an Fäden von je $^1/_2$ bis 1^m Länge[2]) zwischen den einige Centimeter von einander entfernten kugelförmigen Elektroden einer Holtz'schen Maschine in der Art auf, dass die Verbindungslinie der Elektroden die Mitte der Platte senkrecht trifft, so wird die Platte durch die Entladung der Maschine von der positiven gegen die negative Elektrode hingetrieben[3]). Am besten lässt sich diese Erscheinung beobachten, wenn man (durch Entfernung der Condensatoren) eine büschelförmige Entladung einleitet, da diese ruhiger vor sich geht, als wenn man Funken überschlagen lässt.

4. Bedeckt man die Platte auf einer Seite mit Stearin (z. B. durch Auftropfen eines centralen Fleckes von einigen Centimetern im Durchmesser) und wiederholt den soeben beschriebenen Versuch, so tritt die Abstossung gegen die negative Elektrode hin stärker auf als vorhin, wenn die bedeckte Seite der positiven, nicht aber, wenn sie der negativen Elektrode zugewendet ist. In beiden Fällen tritt aber (auch wenn die Entladung nur eine büschelförmige ist) in der Regel sehr bald eine Durchbohrung des Glases an der bedeckten Fläche ein[4]).

---

1) Gibt man jedoch der Stearinbedeckung eine grössere Ausdehnung (z. B. durch Auftragen mehrerer Tropfen, welche in einander überfliessen), so wird dieser Unterschied unmerklich. Dies ist z. B. bei dem unter 4. beschriebenen Versuche der Fall.

2) Ich habe diese je $^3/_4{}^m$ langen Fäden an zwei einer Quadratseite entsprechenden Ecken der Glasplatte mit Siegellack aufgeklebt und parallel oder besser nach oben divergirend an einem von einem passenden Stative getragenen horizontalen Stäbchen befestigt. Der Versuch erfordert eine kräftig wirkende Maschine, welche nicht mit dem Uebelstande des „freiwilligen Polwechsels“ (bei erschwerter Entladung) behaftet ist. Die von mir benutzte ist eine von E. Borchardt in Hannover (1874) gelieferte einfache Holtz'sche 42 Centimeter-Maschine mit einer Maximal-Schlagweite von beinahe 24^{cm}.

3) Im ersten Augenblick der beginnenden Thätigkeit der Maschine erfolgt häufig ein merklicher Ausschlag gegen die positive Elektrode hin, der aber alsbald in eine fortdauernde Abstossung gegen die negative Elektrode übergeht, bis endlich (in Folge der Entladungen um den Rand der Platte) starke und unregelmässige Schwankungen die Erscheinung stören. Bemerkenswerth sind die Transversalschwankungen beim Ueberschlagen um die verticalen Ränder.

4) Vergl. die Anmerkung ad 2.

Das unter 1. beschriebene Experiment ist wohl das einfachste Verfahren der elektrischen Durchbohrung des Glases und macht alle zur Ausführung dieses Vorlesungsversuches bisher angewendeten Vorrichtungen und mehr oder weniger umständlichen Vorbereitungen[1]) entbehrlich. Es erfordert nicht einmal eine sehr kräftige Maschine, wie aus der Thatsache hervorgeht, dass die Durchbohrung einer 2^{mm} dicken Glasplatte noch gelang, als die Funkenstrecke einer 20zölligen Winter'schen Reibungsmaschine bis auf $2{,}5^{cm}$ verkürzt wurde. Gleichwohl würde man daraus nicht folgern dürfen, dass derselbe Versuch bei gleicher Schlagweite auch mit einer kleineren Maschine gelingen müsste, weil die potentielle Energie der Ladung des Conductors bekanntlich nicht nur vom Betrage der Potentialfunction, sondern auch von der Quantität der Ladung abhängt.

Wichtiger als der beschriebene Versuch an sich ist die dabei gemachte und unter 2. angeführte Beobachtung hinsichtlich des Einflusses der Richtung der Entladung auf den leichteren oder schwereren Durchgang derselben durch die einseitig bedeckte Platte, und insofern gehört dieser Versuch in die Kategorie der mit dem Lullin'schen Versuche verwandten Experimente.

Aehnliches gilt von den unter 3. und 4. beschriebenen Versuchen, auf welche ich später zurückkommen werde.

Anhaltspunkte zu einer Erklärung der hier beschriebenen Erscheinungen (insofern bei der Unbestimmtheit unserer Vorstellungen von dem Wesen der Elektricität überhaupt von einer solchen Erklärung die Rede sein kann) scheinen mir in zwei Annahmen zu liegen, die ich schon bei anderen Gelegenheiten ausgesprochen habe und hier in Kürze wiederholen will.

Die erste dieser Annahmen geht dahin, dass die Ausbreitung der Elektricität durch Stearin mehr gehemmt werde als durch Glas; eine Annahme, zu der mich ein Versuch führte, welchen ich, sowie das vorhin beschriebene Experiment mit dem Stearinringe, in einer Notiz: „über die mechanischen Wirkungen der Elektricität" besprochen habe[2]).

---

1) Hieher gehört die Isolirung der beiderseits an die Platte geführten Spitzen durch Umkleben mit Wachs, durch Ueberziehen mit Guttapercha- oder Glashülsen, durch Umgebung mit schlecht leitenden Flüssigkeiten u. dergl.; Kunstgriffe, die allerdings zur Durchbohrung dicker Platten erforderlich sind, bisher aber auch bei ganz dünnen Platten nöthig waren, selbst bei Anwendung von Ansammlungsapparaten. (Vergl. z. B. Frick, physikalische Technik, neueste Auflage.)

2) Dingler's polyt. Journal Bd. 179 S. 432. — (Die am Schlusse dieser Notiz ausgesprochene Ansicht in Betreff der Lichtenberg'schen Figuren habe ich später — Pogg. Ann. Bd. 128 S. 606 — berichtigt.)



Die zweite Annahme besteht darin, dass die Luftmolecüle in der Funkenstrecke mit einer Geschwindigkeitscomponente in der Richtung von der positiven zur negativen Elektrode hin behaftet sind, was man auch kurz als eine Ueberführung von Luftmolecülen in der Richtung des Stromes bezeichnen könnte. Zu dieser Annahme gelangt man, wenn man die Plücker'sche Ansicht von einem eigentlichen Ueberströmen der Elektricität von einer Elektrode zur anderen[1]) in dem Sinne modificirt, dass man diese Bewegung auf die ponderable Materie zwischen den Elektroden, d. i. auf die Luftmolecüle in der Funkenstrecke überträgt, wie ich dies schon in meiner Abhandlung: „über den Lullin'schen Versuch und die Lichtenberg'schen Figuren"[2]) angenommen habe. In der That scheinen auch die unter 3. und 4. beschriebenen Versuche diese Hypothese zu bestätigen.

Verbindet man dieselbe mit der vorhin erwähnten (insbesondere auch durch den Versuch 4. bestätigten) Annahme, dass sich eine elektrische Entladung auf einer Stearinfläche schwerer als auf einer Glasplatte ausbreitet, so wird die unter 2. angeführte Beobachtung wohl begreiflich.

Der besagte Einfluss der Stearinbedeckung muss sich nämlich gegenüber der von der positiven Elektrode ausgehenden Entladung in höherem Grade als gegenüber der negativen geltend machen, wenn wir den Luftmolecülen in der Funkenstrecke eine Geschwindigkeitscomponente in der Richtung des Stromes zuschreiben.

Die Durchbohrung des Glases ist eben eine mechanische Arbeit[3]), welche auf Kosten der lebendigen Kraft der an die durchbohrte Stelle anprallenden Luftmolecüle stattfindet, und dieser Umsatz von Energie wird offenbar desto leichter herbeigeführt werden, je energischer die Molecularbewegungen sind, welche, wenn sie einem Hindernisse[4]) begegnen, daselbst plötzlich gehemmt werden.

1) Pogg. Ann. Bd. 107 S. 89.

2) Ebend. Bd. 128 S. 589.

3) Bemerkenswerth ist dabei die äusserste Feinheit mancher Durchbohrungen, wie ich sie namentlich bei Anwendung büschelförmiger Entladungen ohne Condensation mitunter erhalten habe. Es lassen sich solche auch sehr nahe am Rande einer Glasplatte (folglich auch auf sehr kleinen Glasplatten) noch hervorrufen. Eine mikroskopische Messung einer solchen Bohrung ergab eine Weite derselben von etwa 0,04 mm. Die von der Bohrung nach allen Richtungen ausgehenden (geschwärzten) feinen Risse bildeten einen Hof von etwa zehnfachem Durchmesser.

4) Als solches macht sich zunächst die erschwerte Ausbreitung auf der Stearinfläche geltend.

Ueber dioptrische Brennpunkte.

Von

Theodor Wand,

Consistorialrath in Speyer.

(Hiezu Fig. 1 und 2.)

Für die analytische sowohl wie für die praktische Optik ergibt sich das naheliegende Problem, diejenige Rotationsfläche zu bestimmen, welche Strahlen, die von einem Punkt der Achse herkommen, durch Brechung in einem beliebigen anderen Punkte der Achse vereinigt. Auffallenderweise scheint man dieser Aufgabe bisher noch nicht die Aufmerksamkeit geschenkt zu haben, welche sie verdient; wahrscheinlich aus dem Grunde, weil man ihre Lösung für zu verwickelt hielt, um ein besonderes Interesse zu bieten. Wie ich aus einer geschätzten Mittheilung des Herrn Professors Dr. Reusch in Tübingen entnehme, beschäftigen sich die hauptsächlichen Arbeiten über diesen Gegenstand nur mit Kugelflächen[1]); ebenso die von mir selbst zu Rathe gezogene sehr ausführliche analytische Optik von Schleiermacher (Darmstadt 1842). Wie wir unten sehen werden, führt die Lösung des Problems zu einer wichtigen Eigenschaft der Brennpunkte der Kegelschnitte, und da diese Eigenschaft in den mir bekannten Lehrbüchern über analytische Geometrie und Kegelschnitte[2]) nicht behandelt ist, glaube ich in den nachfolgenden Zeilen etwas Neues und vielen Lesern dieser Zeitschrift Interessantes zu bieten.

1. Man bezeichne den Brennpunkt, der sich im ersten Medium befindet (oder bei virtuellen Brennpunkten diesem angehört), mit 1, den Brennpunkt, der sich im zweiten Medium befindet, mit 2, die

---

1) Möbius in Crelle Bd. 5 S. 113, Bd. 6 S. 215. — Gauss, Abh. d. k. G. d. W. zu Gött. Bd. 1 1838—43. — Bessel, Astron. Nachrichten Bd. 18 S. 97. — Enke, de formulis dioptricis. Progr. 1844. — Hansen, Abh. d. k. sächs. Akad., u. a.

2) Hesse, anal. Geometrie des Raumes. — Salmon, über dens. Geg. Uebersetzung von Fiedler. — Hankel, neuere Geometrie. — Reye, Geometrie der Lage.



Meridiancurve der brechenden Rotationsfläche mit s, ein unendlich kleines Stückchen derselben mit ds. Ferner bezeichne man:

die Geschwindigkeit des Lichtes in beiden Medien mit v_1 und v_2;

die Strahlen, welche von s zu den Punkten 1 und 2 laufen, mit r_1 und r_2;

den Winkel, welchen die von s zu 1 gehende Richtung mit der Richtung des Curvendifferentials ds macht, mit $(r_1 s)$ und ebenso den entsprechenden anderen Winkel mit $(r_2 s)$;

den Winkel, welchen die von s zu 1 gehende Richtung mit der Normale der Curve s bildet, durch $(r_1 n)$ und ebenso den entsprechenden anderen Winkel durch $(r_2 n)$.

Alsdann hat man nach dem Brechungsgesetz:

$$\sin(r_1 n) : \sin(r_2 n) = v_1 : v_2 \quad \text{oder}$$

$$\frac{\cos(r_1 s)}{v_1} + \frac{\cos(r_2 s)}{v_2} = 0. \tag{1}$$

Ist einer der beiden Brennpunkte kein reeller, sondern ein virtueller, d. h. gehen die Strahlen, welche von einem Punkte im ersten Medium sich ausbreiten, nach ihrer Brechung im zweiten Medium so aus einander, als ob sie von einem zweiten Punkte im ersten Medium herkämen, so hat man, wie man durch Anschauung leicht findet:

$$\frac{\cos(r_1 s)}{v_1} - \frac{\cos(r_2 s)}{v_2} = 0. \tag{2}$$

Nun findet man ebenfalls durch eine einfache geometrische Betrachtung:

$$\frac{dr_1}{ds} + \cos(r_1 s) = 0; \quad \frac{dr_2}{ds} + \cos(r_2 s) = 0. \tag{3}$$

Substituirt man nun die aus den Gleichungen (3) folgenden Werthe der beiden Cosinus in die Gleichungen (1) und (2), so hat man für die gesuchte Meridiancurve:

$$\frac{dr_1}{v_1\,ds} \pm \frac{dr_2}{v_2\,ds} = 0,$$

wobei das obere positive Zeichen für den Fall gilt, wenn die brechende Fläche convergirend, das untere negative, wenn sie divergirend wirken soll. Das Integral dieser Gleichung ist

$$\frac{r_1}{v_1} \pm \frac{r_2}{v_2} = C. \tag{4}$$

Wie man sich leicht überzeugt, stellt im ersten Fall C die Zeit dar, welche das Licht braucht, um von 1 nach 2 zu gelangen. Diese

Zeit ist also für alle von 1 nach 2 gehenden Strahlen dieselbe. Die Curven in Fig. 1 und 2 sind confocale Curvensysteme der ersten und zweiten Art. Bei beiden ist als Brechungsexponent der des Glases angenommen und stellen die gegen den Punkt 1 convergirenden Strahlen die im Glase befindlichen Strahlen vor. In Fig. 1 werden die vom Pnnkt 1 ausgehenden Strahlen beim Durchgang durch die Umgrenzungsfläche so gebrochen, dass sie im Punkte 2 zusammenlaufen; umgekehrt vereinigen sich die Strahlen, welche vom Punkte 2 in der Luft ausgehen, im Glase im Punkt 1. Die Curve, deren Spitze in 2 zusammenläuft, stellt einen Specialfall dar, von welchem weiter unten die Rede sein wird. Die punktirte Linie entspricht zwar der Gleichung (4), hat aber keine physikalische Bedeutung.

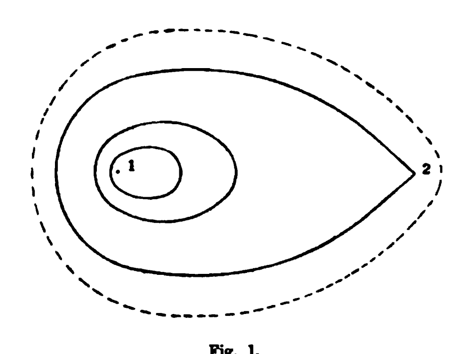
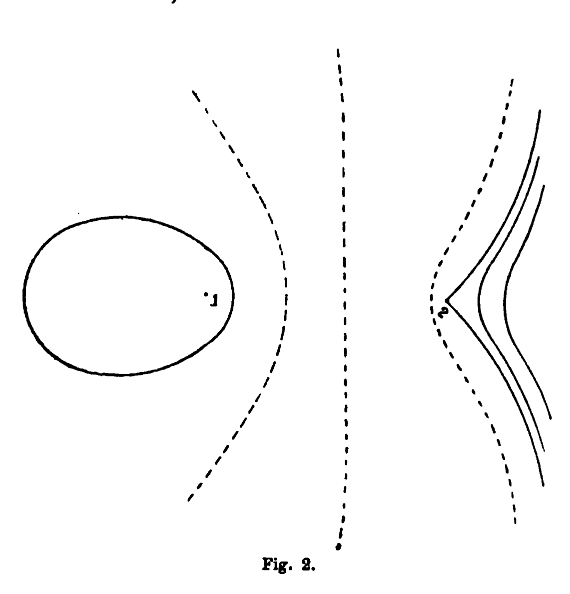


Fig. 1.

Auf Fig. 2 werden den Strahlen, welche vom Punkt 1 aus nach rechts laufen, durch die rechts von 2 befindlichen Flächen so gebrochen, als ob sie vom Punkte 2 herkämen. Auch hier bildet die gebrochene Curve, welche durch 2 geht, einen Specialfall, der unten besprochen werden wird. Sämmtliche Curven auf Fig. 2 sind wie die auf Fig. 1 geschlossen und ist aus Mangel an Raum nur eine derselben vollständig gezeichnet. Die Strahlen, welche von 1 aus nach links gehen, werden beim Durchgang durch die Trennungsflächen so gebrochen, als ob sie vom Punkte 2 herkämen.


Fig. 2.

Ist die Entfernung des Scheitels einer brechenden Curve von einem Brennpunkte sehr gross im Verhältniss zur Entfernung desselben vom anderen Brennpunkte, so hat man die beiden oben erwähnten Specialfälle. Es sind dies die Fälle, wenn Strahlen in einem der beiden Medien der Achse parallel laufen d. i. der Brennpunkt in unendlicher Entfernung liegt.

Nimmt man den Punkt 1 als Centrum des Polarcoordinatensystems r, φ oder des gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinatensystems an und die optische Achse als x-Achse, so hat man, wenn man die sehr grosse Entfernung des zweiten Brennpunktes vom ersten mit G bezeichnet: $r_2 = G - x$. Die Gleichung (4)

$$\frac{r_1}{v_1} \pm \frac{r_2}{v_2} = C \text{ wird zu}$$

$$\frac{r}{v_1} \mp \frac{x}{v_2} = \text{const. oder } r\left(1 \mp \frac{v_1}{v_2} \cos\varphi\right) = \text{const.} \qquad (5$$

Dies ist die Gleichung eines Kegelschnittes von der Excentricität $v_1 : v_2$, also einer Ellipse, wenn $v_1 < v_2$, und einer Hyperbel, wenn $v_1 > v_2$ ist. Da nun die Gleichung (5) ein doppeltes Vorzeichen erhält, so muss man folgende vier Fälle unterscheiden:

1. Der Brennpunkt ist reell und befindet sich im stärker brechenden Mittel, also $v_1 < v_2$. Die brechende Linie ist aldsann eine Ellipse und es werden Strahlen, welche parallel der Achse von aussen auf eine Seite der Ellipse treffen, so gebrochen, dass sie sich in demjenigen Brennpunkte der Ellipse vereinigen, welche der brechenden Fläche entfernter liegt. Umgekehrt werden Strahlen, welche von diesem Punkte nach der entfernteren Seite der Ellipse sich bewegen, ausserhalb derselben parallel.

2. Der Brennpunkt ist reell und befindet sich im schwächer brechenden Mittel, also $v_1 > v_2$. Die brechende Linie ist in diesem Falle eine Hyperbel und es werden Strahlen, welche von einem Brennpunkte derselben ausgehen, nachdem sie den entfernteren Hyperbelast getroffen haben, so gebrochen, dass sie später der Achse parallel laufen. Ebenso umgekehrt.

3. Der Brennpunkt ist virtuell und die divergirenden Strahlen befinden sich im stärker brechenden Mittel ($v_1 < v_2$). Die brechende Linie ist alsdann eine Ellipse und es werden Strahlen, welche in der Ellipse parallel laufen, so gebrochen, als ob sie von demjenigen Brennpunkte herkämen, welcher dem brechenden Theil der Curve entfernter liegt.



4. Der Brennpunkt ist virtuell und die divergirenden Strahlen befinden sich im schwächer brechenden Mittel ($v_1 > v_2$). Die brechende Linie ist alsdann eine Hyperbel und es werden Strahlen, welche gegen einen Brennpunkt der Hyperbel convergiren, beim Durchgang durch denjenigen Hyperbelast, welcher diesem Brennpunkt entfernter liegt, so gebrochen, dass sie parallel der Achse laufen.

Die Brennpunkte der Kegelschnitte sind daher nicht bloss Brennpunkte in Bezug auf Spiegelung, sondern auch Brennpunkte in Bezug auf Brechung und die soeben aufgestellten vier Sätze lassen sich durch einen einzigen folgendermassen ausdrücken:

Sind zwei Media durch die Rotationsfläche eines Kegelschnittes getrennt, dessen Excentricität gleich dem Verhältniss der Geschwindigkeiten des Lichtes in beiden Medien ist, so werden Strahlen, welche mit der Achse parallel in einem der beiden Medien sich bewegen, nach demjenigen Brennpunkte des Kegelschnittes gebrochen, welcher dem brechenden Theil der Fläche entfernter liegt. —

2. Die Aufgabe, den Durchschnitt einer Linse geometrisch zu construiren, welche Strahlen, die von einem Punkte ausgehen, in einem beliebigen anderen Punkte reell oder virtuell vereinigt, hat nun gar keine Schwierigkeit. Es ist nicht einmal nöthig, hiezu die verwickelteren Curven Fig. 1 und 2 zu Hilfe zu nehmen; es genügen hiezu vielmehr schon Hyperbeln, wenn man die Brechung so einrichtet, dass die Strahlen in der Linse immer parallel laufen.

Sind zwei Brennpunkte und auf ihrer Verbindungslinie die Scheitelpunkte der beiden Flächen der gesuchten Linse gegeben, so erhält man die Meridiancurven der brechenden Flächen selbst, wenn man zu diesen beiden Brennpunkten die dazu gehörigen entfernteren Aeste von Hyperbeln construirt, deren Excentricität gleich dem Brechungsindex ist. Sind die beiden Brennpunkte reell, so wird die Linse convex-convex; ist einer derselben virtuell, so wird sie convex-concav.

Für die praktische Optik würde die völlige Beseitigung der sphärischen Aberration in der mittleren Farbe des Spectrums durch solche hyperbolische Linsen einen grossen Vortheil gewähren. Sie würde gestatten, unbeschadet der Lichtstärke, Vergrösserung und

Deutlichkeit die Länge der Fernrohre vielleicht auf ein Drittheil der jetzt gebräuchlichen Länge zu reduciren, würde somit die Handhabung und Aufstellung dieser Instrumente bedeutend erleichtern. Hiebei erlaube ich mir noch eine andere Bemerkung zu machen, die möglicherweise den Optikern bisher entgangen ist. Bei allen achromatischen Objectiven, die mir zu Gesicht kamen, sind die beiden sich chromatisch compensirenden Linsen dicht auf einander gesetzt. Dies scheint mir nicht nothwendig[1]). Man kann die zerstreuende Flintglaslinse, wenn man ihre Brennweite entsprechend geringer macht, auch in einiger Entfernung hinter der Kronglaslinse anbringen und, was sehr wesentlich ist, alsdann ihre Dimensionen bedeutend kleiner machen als die der Kronglaslinse. Es ist nämlich klar, dass eine zerstreuende Flintglaslinse, deren Brennweite nach der üblichen Constructionsweise im Verhältniss zur Brennweite der dazu gehörigen Kronglaslinse zu klein ist, das blaue Bild in grösserer Entfernung entwirft als das rothe, wenn man sie mit der Kronglaslinse zu einer einzigen combinirt. Rückt man die Flintglaslinse hinter der Kronglaslinse fort bis zum Brennpunkt der letzteren, so übt die Flintglaslinse offenbar gar keine compensirende Wirkung mehr aus und das blaue Bild ist in kürzerer Entfernung als das rothe. Schiebt man also die Flintglaslinse von der Kronglaslinse aus nach und nach immer weiter nach hinten, so muss man zwischen der Kronglaslinse und ihrem Brennpunkt auf einen Punkt stossen, in welchem der Achromatismus der Linsencombination ein Maximum erreicht, und dieser Punkt wird am sichersten durch das Auge selbst versuchsweise bestimmt.

Da die zerstreuende Kraft des Flintglases etwa doppelt so gross ist als die des Kronglases, so wird eine zerstreuende Flintglaslinse, deren Brennweite halb so gross ist als die der Kronglaslinse, in die halbe Entfernung des Brennpunktes der letzteren gebracht, ein sehr weit entferntes achromatisches Bild entwerfen. Die Flintglaslinse darf also keine geringere als die halbe Brennweite der Kronglaslinse besitzen, wenn sie noch achromatisch wirken soll.

Weit grösser noch scheinen mir die Vortheile zu sein, welche hyperbolische Linsen für die Verfertigung mikroskopischer Objective bieten. Die fast völlige Beseitigung der sphärischen Aberration gestattet jedenfalls den Bildern dieser Objective bei gleicher Schärfe

1) Dem Herrn Verfasser scheint die Einrichtung des Litrow'schen dialytischen Fernrohres nicht bekannt zu sein. *C.*

eine grössere Lichtstärke zu geben und das auschliessliche Augenmerk auf die möglichste Beseitigung der Farbenzerstreuung zu richten.

Es fragt sich nur, ob die Herstellung hyperbolischer Flächen nicht mit unverhältnissmässig grossen Schwierigkeiten verknüpft ist. In diesem Falle würde man natürlich vorziehen, sich, wie seither, mit sphärischen Flächen zu behelfen. Hierüber vermag ich, mit der Herstellung von Linsen ganz unbekannt, natürlich kein Urtheil abzugeben. Es scheint mir aber, dass die Herstellung sphärischer Flächen von der Genauigkeit, wie sie präcise optische Instrumente verlangen, auch keine so leichte Sache ist und Vorsichtsmaassregeln verlangt, deren Durchführung vielleicht nicht viel weniger Mühe macht als die Herstellung hyperbolischer Flächen. Jedenfalls wird sich der Versuch der Mühe lohnen und wird man sich durch den ersten Misserfolg oder halben Erfolg nicht abschrecken lassen dürfen.

Kleinere Mittheilungen.

Ueber das Radiometer.

Von

Dr. J. Puluj.

Unter diesem Titel legte Herr Puluj der Wiener Akademie eine Abhandlung vor, welche eine Kritik der Osborne Reynold'schen Verdampfungstheorie und der Zöllner'schen Emissionstheorie enthält.

Wäre die Verdampfung oder das Aussenden von Körpertheilchen an der bestrahlten Flügelseite die einzige oder wenigstens die hauptsächliche Ursache der radiometrischen Bewegung, so müsste dieselbe bei fortgesetzter Verdünnung zunehmen, da sowohl Verdampfung als Emission von Körpertheilchen erfahrungsgemäss desto lebhafter sein müsste, je kleiner der Druck im gasverdünnten Raume wäre. Wie aber Versuche von Finkener und Crookes gelehrt haben, wächst das Drehungsmoment, welches durch die Flamme auf das Radiometer ausgeübt wird, unter übrigens gleichen Umständen zunächst mit der Verdünnung der Gase, erreicht bei einem gewissen Drucke das Maximum und nimmt bei weiterer Verdünnung ab. Diese Abnahme des radiometrischen Effectes, welche bis auf $^1/_{10}$ des Maximalwerthes sinken kann, widerspricht der erwähnten Folgerung der Evaporations- und Emissionstheorie. Andererseits kann aber an der Voraussetzung, dass alle Körper unabhängig vom Aggregatzustande schon bei gewöhnlicher Temperatur verdampfen, nicht gezweifelt werden; es muss daher zugegeben werden, dass auch aus der Emission von Körpertheilchen eine Reactionskraft resultiren wird. Um aber die erwähnte Abnahme der radiometrischen Bewegung zu erklären, muss ferner angenommen werden, dass die aus der Emission resultirenden Reactionskräfte im Vergleich zu den Kräften, welche durch Zurückprallen der Moleküle der schon vorhandenen gasigen Materie entstehen, entweder verschwindend oder doch so klein sein müssen, dass die Bewegungserscheinungen entweder ausschliesslich oder hauptsächlich durch letztere Kräfte bedingt werden.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich jene Abnahme der Bewegung nach der kinetischen Gastheorie auf folgende Weise erklären. Beim vollen Atmosphärendrucke ist die an der bestrahlten Flügelseite geweckte Reactionskraft zu klein, um den Reibungs- und Luftwiderstand zu überwinden. Bei hinreichender Verdünnung überwindet die Reactionskraft jene Widerstände und es beginnt die Bewegung der Flügel. Wenn die Reactionskraft analog wie die innere Reibung mit dem Drucke nur sehr langsam abnimmt, so erreicht die Geschwindigkeit der Bewegung bei einem gewissen Drucke das Maximum und nimmt bei fortgesetzter Verdünnung ab, weil nicht bloss der Luftwiderstand, sondern auch die geweckte Reactionskraft mit der geringeren Menge der zurückprallenden Moleküle kleiner wird. In einem absolut luftleeren Raume müsste die Bewegung ganz aufhören, wenn an den bestrahlten Flügelseiten keine Emission von Körpertheilchen erfolgen würde.

Ferner beschreibt der Verfasser ein Radiometer, bestehend aus einem fixen Kreuz von einerseits berussten Glimmerblättchen und einer sehr dünnen cylindrischen Mantelfläche aus Glas. Der Abstand der äussersten Flügelränder von der Mantelfläche betrug 2^{mm}. Der Glascylinder drehte sich bei Beleuchtung entgegengesetzt jener Richtung, in welcher das Kreuz sich drehen müsste.

Der Zweck dieses Versuches ist, einen vollständigen Beweis zu liefern, dass die Bewegungen im Radiometer auch mittelst Luftströmungen nicht erklärt werden können.

Ueber die specifische Zähigkeit der Flüssigkeiten.

Von

R. Přibram und A. Handl.

(Wiener Akademischer Anzeiger 1879 Nr. 14.)

Die Verfasser haben in einer neuen Abhandlung ihre in diesem Hefte gegebenen Studien über diesen Gegenstand fortgesetzt, und gelangen auf Grund zahlreicher neuer Beobachtungen zu folgenden Schlüssen:

1. Der zuerst von Guerout ausgesprochene Satz, dass isomere Ester gleiche specifische Zähigkeit besitzen, ist nur eine Näherungsregel.

2. Der Unterschied in der Zähigkeit isomerer Verbindungen, also der Einfluss der Atomgruppirung auf die innere Reibung wird in höheren Temperaturen immer geringer.
3. In homologen Reihen und bei den verschiedenen Halogenderivaten eines und desselben Kohlenwasserstoffes ist bei höheren Temperaturen die Zunahme der Zähigkeit nahezu proportional der Zunahme des Molekulargewichtes; der Proportionalitätsfactor aber ist bei jeder Reihe ein anderer.
4. Die Nitroverbindungen können mit Rücksicht auf ihre Zähigkeit nicht als Producte einer einfachen Substitution von NO_2 an die Stelle von Cl, Br oder J aufgefasst werden.

Foucault's Pendelversuch.

Herr Prof. O. E. Meyer zeigte der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau den bekannten Foucault'schen Pendelversuch in einer abgeänderten Weise, welche zuerst von Cox 1851 angewandt worden ist. Es wurde nicht eins, sondern zwei Pendel benutzt, welche, anfangs zusammengebunden, erst in einer und derselben Ebene schwangen, dann aber ihre Schwingungsrichtungen gegen einander drehten. Diese relative Bewegung, welche an sich schon doppelt so gross wie die absolute ist, wurde durch optische Projectionsapparate auf einer entfernten Wand noch vergrössert dargestellt, so dass die Drehung der Pendelebene schon nach einer Minute sichtbar wurde. Bei dieser Art, den Versuch anzustellen, ist es nicht nothwendig, auf die Aufhängung der Pendel besondere Sorgfalt zu verwenden, also etwa Cardanische Doppelschneiden zu benutzen oder dergl. Es genügt, ganz einfach zwei Haken in die Zimmerdecke einzuschrauben und an diese die dünnen Aufhängungsdrähte anzubinden.

Vorschlag zu einer neuen Elektrisirmaschine.

Von

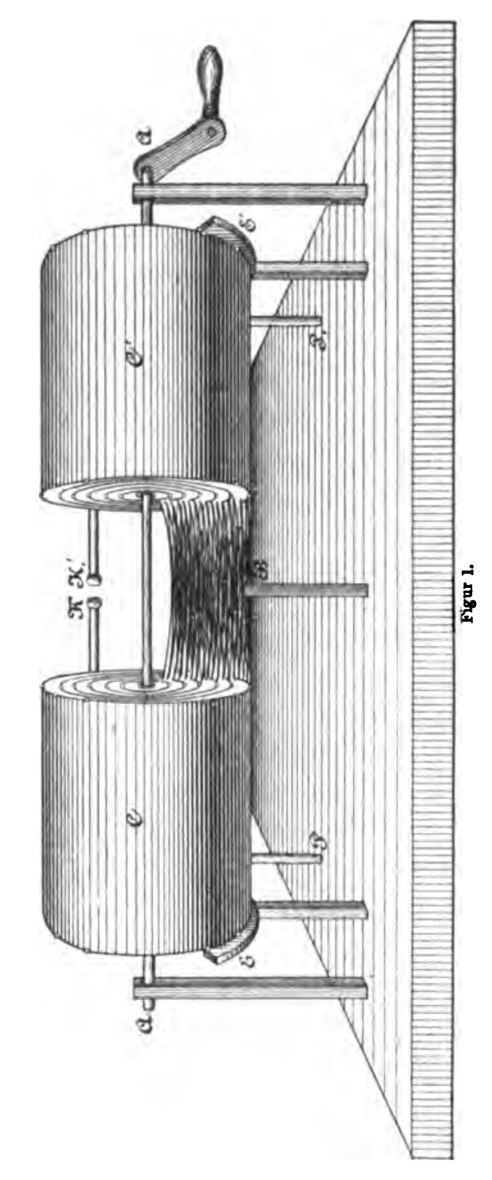
B. Vidovich,

Realschuldirector in Pancsova.

Die Bestandtheile derselben sind:

1. Die um die gemeinschaftliche Achse AA' drehbaren Cylinder C und C', welche wie zwei Bündel aus vielen, hohlen, gleich langen, an

den Enden abgerundeten, mit der Achse und mit einander fest verbundenen Metallstäbchen (*m*, *m'*) zusammengesetzt sind. Mit Ausnahme der heraustehenden, runden Enden sind diese Stäbchen an ihrer ganzen Oberfläche mit einer isolirenden Harzschicht überzogen.



Figur 1.

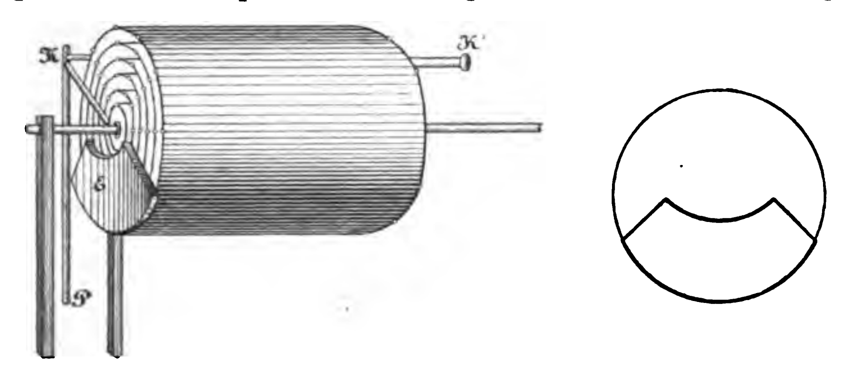
2. Die zwischen den Cylindern auf einem isolirenden Glasfusse stehende, aus elastischen Metallfäden gemachte Bürste, welche mit ihren Enden an die Cylinderbasen federnd andrückt.

3. Die zu den äusseren Cylinderbasen parallel und nahe gestellten Elektrophore (E und E') d. h. zwei Harzkuchen in eine aus Fig. 2 ersichtliche Form gegossen,

4. Die auf den Glasfüssen PK und P_1K_1 befestigten Conductoren KK' und K_1K_1' mit den zur Aufnahme der Elektricität dienenden Saugern l und l'. (In Fig. 2 ist der Sauger l zu sehen.)

Macht man nun den Elektrophor E etwa durch Reibung elektrisch und versetzt dann die Cylinder in Rotation, so wird in den vor E gekommenen Stäbchen (m . . .) das neutrale elektrische Fluidum vertheilt. In dem Momente, wo m . . . mit der Bürste in Berührung kommt, wird die freie negative Elektricität durch die Bürste in das correspondirende Stäbchen m' . . . übergehen und im nächsten Augenblicke, wo sowohl m . . . als m' . . . die Bürste verlassen, nicht mehr nach

m zurückkehren können. Hernach treten sie aus der Wirkungssphäre des Elektrophors heraus und geben, bis zur Höhe der Sauger



Figur 2.

gelangt, denselben ihre Elektricitäten ab, welche, bei fortgesetzter Drehung, sich in den Kugeln K' und K_1' ansammeln und von dort zu beliebigen Zwecken weitergeführt werden können.

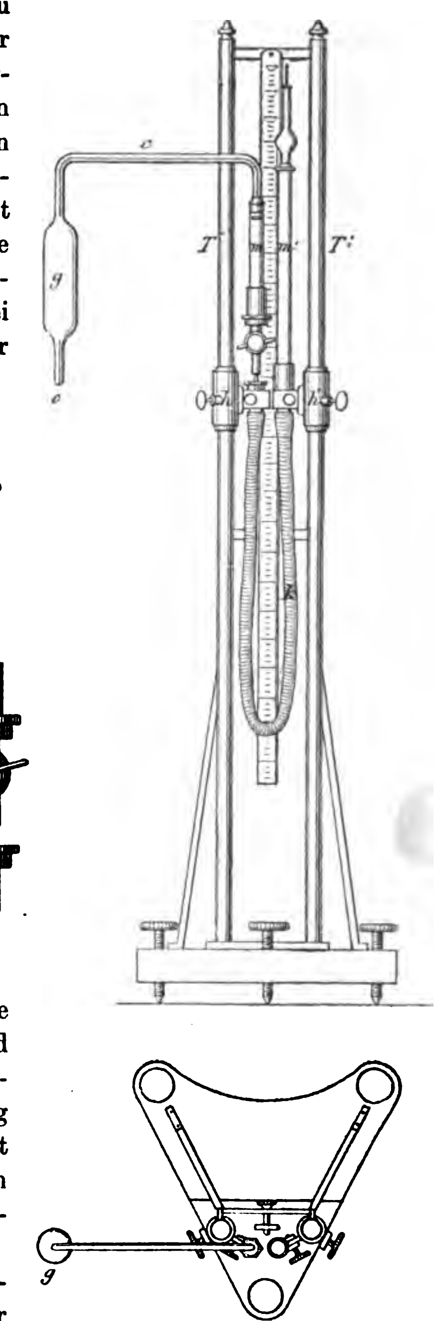
Dass eine positive Ladung des Elektrophors E' die Wirkung vergrössert, ist selbstverständlich. Diese Ladung kann vom Conductor K' genommen werden. Ebenso kann die negative Ladung von E am Conductor K_1' verstärkt werden.

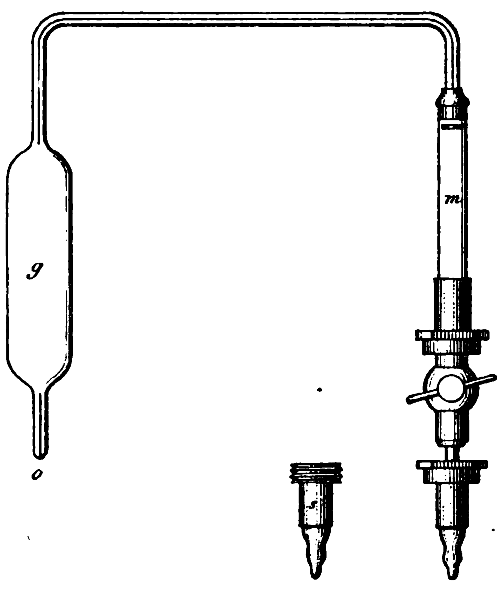
Dass bei grossen Dimensionen der Cylinder mehrere Elektrophore mit den entsprechenden Bürsten und Saugern angewendet werden können, ist leicht einzusehen.

Luftthermometer nach Prof. Jolly mit Montirung nach Prof. Pfaundler.

Zwei verticale Säulen T und T', welche zum Zwecke grösserer Stabilität von rückwärts durch schiefe Stangen gestützt und an zwei Stellen unter sich durch horizontale Spangen verbunden sind, tragen die beiden verschiebbaren Hülsen mit Klemmschrauben h und h', an welchen mittelst Scharnieren Stahlfassungen befestigt sind. Letztere sind in der durch die Figur auf folgender Seite ersichtlichen Weise mit den beiden ungefähr 16^{mm} weiten gläsernen Manometerröhren verbunden. Das obere Ende der Manometerröhre m ist mittelst Stahlfassung an das Capillarrohr c gekittet und durch dieses mit dem Luftgefäss g communicirend. Das obere Ende der anderen Manometerröhre m' trägt ein Chlorcalciumrohr. Unten communiciren beide Manometerröhren mittelst des Kautschukschlauches k. Die Stahlfassung des Rohres m enthält einen Hahn mit zwei Bohrungen, deren eine den Schlauch mit dem Glasrohr, die andere den Schlauch oder das Rohr längs der Hahnachse

mit der Atmosphäre in Verbindung zu setzen gestattet. Die Befestigung der Röhre *m* in der Stahlfassung ist derartig, dass man dieselbe leicht abnehmen und reinigen kann. Zum Austrocknen ist ein zweites Verbindungsstück vorhanden, welches mittelst Schlauch mit der Luftpumpe und einer Trockenröhre verbunden wird. Zum Zweck der leichteren Kalibrirung ist das Gefäss *g* bei *o* anfangs offen und wird erst vor der





Anwendung zugeschmolzen. Als Marke im Manometer *m* dient der untere Rand der ebenen Stahlfassung oder eine daselbst angebrachte Spitze. Die Ablesung der Höhendifferenzen geschieht mittelst Kathetometer an dem hinter oder zwischen den Manometerröhren aufgehängten Normalmeterstab.

Der beschriebene Apparat ist zu beziehen aus dem mechanischen Atelier von F. Miller in Innsbruck.

Zeitschrift
für
Angewandte Elektricitätslehre

mit besonderer Berücksichtigung

der Telegraphie, des elektrischen Beleuchtungswesens, der Galvanoplastik und verwandter Zweige.

Herausgegeben von

Dr. Ph. Carl,

Professor der Physik an der königl. Kriegs-Akademie in München,
Herausgeber des „Repertorium für Experimental-Physik“.

Druck und Verlag von Rudolph Oldenbourg in München.

I. Band. **1879.** Mit Tafel XXII. **Nr. 9.**

Abonnements.
Erscheint monatlich wenigstens einmal. — 12 Nummern bilden einen Band. — Preis pro Band 20 Mark.
Das Abonnement kann stattfinden: bei der *Verlagshandlung R. Oldenbourg* selbst, München, Glückstrasse 11,
sowie bei allen Buchhandlungen und Postämtern Deutschlands und des Auslandes.

Inserate.
Die ganze Octavseite 24 Mark, jede achtel Octavseite oder deren Bruchtheil 3 Mark. Bei Wiederholungen die Hälfte.
Inserate für 12 Nummern werden mit 10 Mark, solche für 6 Nummern mit 12 Mark für die Seite berechnet.
Beilagen bei vorheriger Einsendung eines Probe-Exemplars nach Uebereinkunft.

Inhalt:



XV. Band. OCT 13 1879 9. Heft.

REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE & ASTRONOMISCHE INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN.

FÜNFZEHNTER BAND.

Inhalt des 9. Heftes.

MÜNCHEN, 1879.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.


Digitized by Google

Untersuchungen über das Elementargesetz der Hydrodiffusion.

Von

H. F. Weber.

(Aus der Züricher Vierteljahrsschrift vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Ueber das Elementargesetz, nach welchem die Hydrodiffusion verläuft, hat zuerst A. Fick[1]) vor 23 Jahren eine Hypothese aufgestellt. Die grosse Analogie, welche zwischen dem Vorgange der Hydrodiffusion und dem Vorgange der Wärmeleitung in starren Substanzen besteht, veranlasste Fick zu der Annahme: das von der Hydrodiffusion befolgte Elementargesetz ist von derselben Form wie das von Fourier zu Anfang dieses Jahrhunderts für die Wärmeleitung in starren Substanzen aufgestellte Elementargesetz. Danach würde die Salzmenge, die in der Hydrodiffusion in der Richtung der abnehmenden Concentration durch ein beliebiges Flächenelement in einem gewissen Zeitelement hindurchfliesst, proportional sein der Grösse des betrachteten Flächenelements, der Länge des Zeitelements, dem Werthe des negativen Differentialquotienten der Concentration am Orte des Flächenelements nach der Richtung der Strömung und endlich proportional sein einer constanten Grösse, deren Werth von der Natur der Salzlösung abhängt, in welcher die Hydrodiffusion vor sich geht. Diese constante Grösse, sie möge mit k bezeichnet werden, nennt Fick die „Diffusionsconstante“.

Aus diesem Elementargesetze folgt, dass die Diffusionsconstante k die Salzmenge bedeutet, die während der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit wandern würde, falls dem Concentrationsgefälle am Orte dieser Flächeneinheit der unveränderliche Werth eins zukäme. Weiter folgt daraus, dass sich der Verlauf der Diffusion in einem Gefässe, in

1) Pogg. Annalen der Physik und Chemie Bd. 94.

welchem die Concentration z zu jeder Zeit t nur Function einer einzigen Raumcoordinate x ist, durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

bestimmt.

In einer Reihe von Messungen versuchte Fick die Richtigkeit dieses hypothetischen Elementargesetzes an der Erfahrung zu prüfen. Er glaubte aus diesen Messungen folgern zu dürfen, dass in der That die Hydrodiffusion nach dem definirten Elementargesetze verläuft, und versuchte den numerischen Werth der Diffusionsconstante für wässerige Kochsalzlösung festzustellen. Gegen die von Fick benutzte Messungsmethode sind später wiederholt Einwände erhoben worden; mit Recht, da sein Verfahren so beschaffen war, dass es schlechterdings zu keiner genauen Prüfung auf die Richtigkeit des angenommenen Elementargesetzes dienen konnte. Mehrere Male wurden in den letzten zwanzig Jahren Anläufe gemacht, genauere, namentlich auf optische Principien begründete, Messmethoden zur Verfolgung des Vorganges der Hydrodiffusion anzuwenden, so von Voit[1]) (1866) und von Johannisjanz[2]) (1877). Der Erfolg dieser, wie man glaubte, feineren optischen Messmethoden war aber kein grösserer als der von Fick gewonnene; auch diese neuen Untersuchungen machen es durchaus nicht evident, dass das von Fick hypothetisch angenommene Elementargesetz in aller Strenge in der That das den Vorgang der Diffusion regelnde Naturgesetz ist. Diese neueren Untersuchungen drängen die Ueberzeugung auf, dass entweder alle bis jetzt zur Untersuchung der Diffusion benutzten Messungsmethoden noch zu rohe, unausgebildete sind, oder dass die Diffusion nach einem Elementargesetze abläuft, das von dem Fick'schen erheblich verschieden ist. So fielen z. B. die Werthe, welche Johannisjanz für die Diffusionsconstante einer Kochsalzlösung unter Zugrundelegung des Fick'schen Elementargesetzes aus den Beobachtungen je eines Tages berechnete, für die einzelnen Tage der vieltägigen Beobachtungsreihen bis zu 20% verschieden aus; so fand ferner Johannisjanz einen Mittelwerth für die Diffusionsconstante von Kochsalzlösung, der sich um ca. 45% von dem früher von Fick gefundenen Werthe entfernt; Johannisjanz vermochte keinen Einfluss der Temperatur auf den Verlauf der Diffusion wahr-

1) Annalen der Physik und Chemie Bd. 130.

2) Annalen der Physik und Chemie. Neue Folge Bd. 2.

zunehmen, während Fick eine deutlich ausgeprägte Einwirkung der Temperatur constatiren konnte.

In der folgenden Abhandlung soll eine neue Methode beschrieben werden, welche eine äusserst scharfe Prüfung der Richtigkeit des Elementargesetzes der Hydrodiffusion gestattet, welche von sehr einfacher Form ist und welche den Verlauf der Diffusion fast von Zeitmoment zu Zeitmoment deutlich erkennen lässt.

Im Verlauf der letzten zwei Jahre bin ich anhaltend damit beschäftigt gewesen, eine zu jeder Zeit vollkommen identisch herstellbare Einheit der elektromotorischen Kraft zu ermitteln und deren Grösse in absolutem Maasse nach zwei möglichst verschiedenen Methoden festzustellen. Bei Gelegenheit dieser Untersuchungen war ich bereits im August und September des Jahres 1877 genöthigt, den Einfluss der Concentration der wässerigen Lösungen eines Zink- und eines Kupfersalzes auf die elektromotorische Kraft der aus ihnen construirten galvanischen Elemente eingehend zu untersuchen. Wie bereits früher gefunden worden war, ergab sich u. A., dass die elektromotorische Kraft des Daniell'schen Elementes mit zunehmender Concentration der die Zinkelektrode bespülenden Zinksulphatlösung ab-, mit steigender Concentration der die Kupferelektrode umgebenden Kupfersulphatlösung dagegen zunimmt. Daraus folgt, dass galvanische Elemente, die aus zwei verschieden concentrirten Lösungen von Kupfersulphat oder Zinksulphat und zwei in diese Lösungen eintauchenden Kupfer- oder Zinkelektroden gebildet werden, eine elektromotorische Kraft von einer solchen Richtung zeigen müssen, dass der durch dieselbe in einem geschlossenen Kreise hervorgerufene Strom in Folge der Wanderung der Ionen die bestehenden Concentrationsdifferenzen auszugleichen sucht. Durch Beobachtungen von Wild, von Lindig ist schon vor vielen Jahren dargelegt worden, dass diese elektromotorischen Kräfte in der That existiren und dass wirklich die aus ihnen entspringenden Ströme durch das Element in der Richtung der zunehmenden Concentration fliessen. Die in allerneuester Zeit von J. Moser angestellten Versuche haben die früheren Beobachtungen vollkommen bestätigt. Wiederholt habe ich ausgedehnte Versuchsreihen angestellt, um den Zusammenhang zwischen der Grösse dieser elektromotorischen Kräfte und den Concentrationen der dieselben erzeugenden Salzlösungen empirisch zu ermitteln. Es zeigte sich, dass bei grösseren Concentrationen die elektromotorische Kraft zwischen zwei Zink-

oder zwei Kupferelektroden, die in zwei mit einander communicirende, verschieden concentrirte Zink- oder Kupfersulphatlösungen tauchen, innerhalb eines mässig grossen Intervalles der Concentration sehr angenähert proportional der Concentrationsdifferenz der beiden Lösungen ist und dass sie für ein beträchtlich grosses Intervall der Concentration mit vollkommener Genauigkeit durch eine parabolische Function der Concentrationen der beiden Lösungen ausgedrückt werden kann. Ich werde bei der Publication meiner Untersuchungen über „eine empirische Einheit der elektromotorischen Kraft und deren absoluter Werth“ ausführlicher auf diesen Gegenstand eingehen; hier begnüge ich mich, die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes durch die Anführung einer einzigen Versuchsreihe zu belegen.

Es wurden vier wässerige Lösungen von Zinksulphat bereitet, welche folgende Massen (in Grammen ausgedrückt) von wasserfreiem Salz in der Volumeinheit (Cubikcentimeter) enthielten, d. h. welche folgende Concentrationen besassen:

Lösung I	0,1676
Lösung II	0,2301
Lösung III	0,2858
Lösung IV	0,3213

Ein parallelepipedischer Glastrog wurde durch Einkitten einer porösen Thonplatte in zwei Abtheilungen zerlegt; durch Eingiessen irgend zweier der vier Lösungen in diese Abtheilungen und durch Einsetzen von zwei amalgamirten Zinkelektroden wurde ein galvanisches Element hergestellt, dessen elektromotorische Kraft nach der Dubois-Reymond'schen Modification der Compensationsmethode gemessen wurde. Als compensirendes Element wurde ein sehr constantes Daniell'sches benutzt mit der elektromotorischen Kraft $11{,}02 \times 10^{10} \left[mgr^{\frac{1}{2}}\, mm^{\frac{3}{2}}\, Sec^{-2}\right]$ und dem Widerstande 0,98 Q. E. Der Messdraht war ein homogener Neusilberdraht von 1^m Länge und dem Widerstande 2,22 Q. E. In dem Kreise, der den Messdraht und das Daniell'sche Element in sich schloss, befand sich ausserdem ein Rheostatenwiderstand im Betrage von 110,0 Q. E., so dass der Gesammtwiderstand dieses Kreises 113,20 Q. E. betrug. Bezeichnet λ diejenige Länge des Messdrahts, die man einschalten muss um eine vollkommene Compensation der zu messenden elektromotorischen Kraft

E der benutzten Combination durch das Daniell'sche Element zu erzielen, so gilt unter den geschilderten Verhältnissen

$$E = \lambda \times 216{,}1 \times 10^4.$$

Es wurden folgende Einstellungen gefunden:

für die Combination der Lösungen

	λ	
I und II	305,4 305,0	305,2
I und III	595,5 594,3	594,9
I und IV	795,0 794,0	794,5
II und III	289,0 288,0	288,5
II und IV	488,9 490,1	489,5
III und IV	195,1 194,0	194,5

Diese beobachteten Einstellungen lassen sich durch die Concentrationen z_2 und z_1, die an der Kathode und der Anode der jedesmal benutzten Combination auftreten, in völlig befriedigender Weise durch die parabolische Form ausdrücken:

$$\lambda = a\,(z_2 - z_1)\,[1 + b\,(z_2 + z_1)].$$

Greift man z. B. die Combination der Lösungen I und III und die Combination der Lösungen III und IV heraus und berechnet aus den für diese Combinationen gefundenen Einstellungen und aus den bezüglichen Concentrationen die beiden Constanten a und b, so erhält man die Werthe:

$$a = 371{,}57$$
$$b = \quad 0{,}782.$$

Aus diesen Werthen ergeben sich für die vier übrigen untersuchten Combinationen die Einstellungen:

304,5; 789,3; 290,5; 485,0;

Werthe, die von den beobachteten nur um die Grössen differiren:

— 0,7 — 5,2 + 2,0 — 4,5.

Die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung erreicht also in keinem Falle den Werth 1% der gemessenen Grösse.

Zwei an einander grenzende Lösungen von Zinksulphat mit den Concentrationen z_2 und z_1 erzeugen also zwischen zwei in diese Lösungen tauchenden Zinkelektroden eine elektromotorische Kraft, deren Grösse E durch den Ausdruck darstellbar ist:

$$E = A\,(z_2 - z_1)\,[1 + B\,(z_2 + z_1)], \qquad (1$$

sobald die Concentrationen z_2 und z_1 in das Intervall $z = 0{,}15$ bis $z = 0{,}35$ fallen.

Mit Hilfe der Relation (1) wird es in gewissen Fällen möglich, aus der gemessenen elektromotorischen Kraft, welche zwischen zwei in verschieden concentrirte Zinksulphatlösungen eintauchenden Zinkelektroden auftritt, einen sicheren Rückschluss auf die Grösse der Concentrationsdifferenz dieser Lösungen zu machen.

Darauf ist das Princip der Messungsmethode begründet, welche ich zur Untersuchung des Elementargesetzes der Hydrodiffusion angewandt habe.

Durch die Zurückführung der Messung der Concentration auf die Messung einer elektromotorischen Kraft werden mancherlei Vortheile erreicht, die keine der bisher zur Untersuchung der Diffusion benutzten Methoden darbietet: die Genauigkeit der Messung kann auf eine fast beliebig grosse Höhe getrieben werden; die gemessenen Concentrationen sind nicht, wie bei den bisher in Anwendung gekommenen Untersuchungsmethoden, mittlere Concentrationen dünner Flüssigkeits schichten, sondern sind Concentrationen, die in gewissen Flächen, nämlich in den die Elektroden berührenden Grenzflächen auftreten; endlich gestattet die benutzte Methode, und dieses dürfte ein ganz wesentlicher Vortheil sein, das Diffusionsgefäss in jede beliebige Entfernung vom Messungsorte zu bringen, z. B. an einen erschütterungsfreien Ort, der von selbst eine möglichst constante Temperatur darbietet.

Es wurden zwei wesentlich verschiedene Untersuchungsformen benutzt: die eine verlangt, wie alle bisher benutzten Untersuchungsmethoden, eine verhältnissmässig lange Beobachtungszeit, einen Zeitraum von vielen Tagen, und bereitet in Folge dessen der exacten experimentellen Untersuchung des Diffusionsvorganges mancherlei Schwierigkeiten und Umständlichkeiten; die zweite gestattet die Untersuchung binnen weniger Stunden zum Abschluss zu bringen und gewährt dadurch den Vortheil, wichtige Fragen, wie z. B. den Einfluss

der Concentration auf die „Diffusionsconstante", oder den Einfluss der Temperatur auf den Verlauf der Diffusion, in einfacher Weise und binnen kürzester Zeit entscheiden zu können.

Erste Untersuchungsmethode.

Beschreibung der Methode.

Eine ebene, kreisrunde amalgamirte Zinkplatte wurde zur Bodenfläche eines etwa $11{,}0^{cm}$ weiten Glascylinders gemacht. Auf die Zinkplatte wurde eine luftfreie wässerige Zinksulphatlösung von erheblich starker Concentration (die in den einzelnen Versuchsreihen zwischen 0,250 und 0,350 variirte) bis zur Höhe $l_2{}^{cm}$ eingegossen. Hierauf wurde auf die freie Oberfläche dieser Lösung ein dünnes Korkscheibchen gelegt, auf welches man eine viel weniger stark concentrirte Lösung (die Concentration dieser zweiten Lösung wurde zwischen 0,150 und 0,200 gewählt) aus einem fein ausgezogenen Glasröhrchen langsam träufeln liess. Langsam breitete sich diese letztere Lösung über die untere, stärker concentrirte aus, und es bildete sich eine Trennungsfläche zwischen beiden Lösungen, die vollkommen eben (nur längs des Randes war eine Capillarwirkung in einer Zone von etwa $1{,}5^{mm}$ Breite sichtbar) und vollkommen spiegelnd war. Als die zweite Lösung die Dicke $l_1{}^{cm}$ erreicht hatte, wurde die Zufuhr unterbrochen und wurde eine genau in den Glascylinder passende, ebene, kreisrunde und amalgamirte Zinkplatte vorsichtig von oben mittelst einer Führung so weit herabgelassen, dass eine vollständige Berührung zwischen der oberen Begrenzungsfläche der oberen Salzschicht und der unteren Fläche der Zinkplatte eintrat. Hiemit war der Versuch für die Messungen vorbereitet. Die Messungen bestanden darin, dass in gewissen, gewöhnlich gleich weit von einander abstehenden Zeitmomenten die elektromotorische Kraft gemessen wurde, welche zwischen den beiden Zinkplatten des Diffusionsgefässes vorhanden war. Durch die Feststellung des zeitlichen Verlaufes dieser elektromotorischen Kraft gewinnt man, wie die folgenden theoretischen Betrachtungen ergeben, ein Mittel zu einer sehr feinen Prüfung auf die Richtigkeit des Fick'schen Elementargesetzes der Hydrodiffusion.

Theorie der Methode.

Wir haben zunächst aus Fick's Elementargesetz und den realisirten Versuchsbedingungen diejenige Function zu ermitteln, welche

den Werth der Concentration z irgend einer Schicht in der Tiefe x unter der oberen Elektrode zu irgend einer Zeit t darstellt.

Die Concentration z hat zu jeder Zeit und an jedem Ort zwischen $x = 0$ und $= l_1 + l_2$ Fick's Elementargesetz zu erfüllen, d. h. der partiellen Differentialgleichung zu genügen:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \qquad (1$$

Die Grenzbedingungen des Versuches sind:

$$\text{für } x = 0 \text{ ist für alle } t \ \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad (2$$

$$\text{für } x = l_1 + l_2 = L \text{ ist für alle } t \ \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad (3$$

da an der oberen Elektrode kein Salz aus-, an der unteren Elektrode kein Salz eintritt. Wird als Anfangspunkt der Zeit der Moment der Uebereinanderschichtung der beiden Concentrationen z_2 und z_1 genommen, so gilt als Anfangsbedingung des Versuches:

$$\text{für } t = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{ist } z = z_1 \text{ für alle } x \text{ von } x = 0 \text{ bis } x = l_1 \\ \text{und } z = z_2 \text{ für alle } x \text{ von } x = l_1 \text{ bis } x = l_1 + l_2 = L. \end{array} \right\} \quad (4$$

Ein particuläres Integral der Differentialgleichung (1) ist:

$$z = (A \cos hx + B \sin hx)\, e^{-h^2 k t};$$

die drei Constanten A, B und h sind aus den Anfangs- und Grenzbedingungen des Versuches zu bestimmen.

Es soll erstens

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (-hA \sin hx + hB \cos hx)\, e^{-h^2 k t}$$

in der Schicht $x = 0$ für alle t den Werth Null haben; es muss daher B gleich Null gesetzt werden. Es soll ferner derselbe Differentialquotient für $x = L$ ebenfalls für alle t verschwinden; die Constante h muss also so gewählt werden, dass sie die Gleichung

$$h \cdot L = n\pi, \text{ wo } n = 0, 1, 2, 3 \ldots,$$

erfüllt.

Die Summe der particulären Integrale

$$z = {}_n\sum_0^\infty A_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2} k t}$$



gibt das allgemeine Integral. Die noch zu bestimmende Constante A_n lässt sich aus den Anfangsbedingungen (4) ermitteln:

$$\text{für } t = 0 \text{ ist } z = n\sum_0^\infty A_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = z_1 \text{ für alle } x \text{ von } x = 0 \text{ bis } x = l_1$$

$$\text{und } z = \sum_0^\infty A_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = z_2 \text{ für alle } x \text{ von } x = l_1 \text{ bis } x = l_1 + l_2 = L.$$

Nach **Fourier's** Theorem ergibt sich:

$$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L (z)_{t=0} \cdot dx = \frac{z_1 l_1 + z_2 l_2}{L}$$

und

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L (z)_{t=0} \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{2(z_2 - z_1)}{\pi} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi l_1}{L}\right).$$

Die allgemeine, allen Bedingungen Rechnung tragende Lösung ist also:

$$z = \frac{z_1 l_1 + z_2 l_2}{L} - \frac{2(z_2 - z_1)}{\pi} n\sum_1^\infty \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi l_1}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt} \quad (5$$

Die oben geschilderte Versuchsmethode erlaubt nur die variabeln Concentrationen der Grenzschichten (für $x = 0$ und $x = L$) zu beobachten. Die variable Concentration der oberen Grenzschicht möge mit z', die der unteren Grenzschicht mit z'' bezeichnet werden. Aus (5) findet sich:

$$z' = \frac{z_1 l_1 + z_2 l_2}{L} - \frac{2(z_2 - z_1)}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi l_1}{L}\right) e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi l_1}{L}\right) e^{-\frac{4\pi^2}{L^2}kt} + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi l_1}{L}\right) e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}kt} + \cdots\right]$$

und

$$z'' = \frac{z_1 l_1 + z_2 l_2}{L} + \frac{2(z_2 - z_1)}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi l_1}{L}\right) e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi l_1}{L}\right) e^{-\frac{4\pi^2}{L^2}kt} + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{z\pi l_1}{L}\right) e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}kt} - \cdots\right],$$

also

$$z'' - z' = \frac{4(z_2 - z_1)}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi l_1}{L}\right) e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi l_1}{L}\right) e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}kt} + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi l_1}{L}\right) e^{\frac{25\pi^2}{L^2}kt} + \cdots\right]$$

und

$$z'' + z' = 2\frac{z_1 l_1 + z_2 l_2}{L} + \frac{4(z_2 - z_1)}{\pi} \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi l_1}{L}\right)e^{-\frac{4\pi^2}{L^2}kt} + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi l_1}{L}\right)e^{-\frac{16\pi^2}{L^2}kt} + \cdots\right]$$

In allen ausgeführten Versuchen wurde L stets so klein gewählt (ca. 3^{cm}), dass die Werthe der Glieder

$$\frac{1}{4}\sin\left(\frac{4\pi l_1}{L}\right)e^{-\frac{16\pi^2}{L^2}kt}, \quad \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi l_1}{L}\right)e^{-\frac{25\pi^2}{L^2}kt} \ldots$$

schon nach Verlauf eines Tages ($t = 1$) unter $\frac{1}{400}$ heruntersanken. Ausserdem wurde stets l_1 möglichst genau gleich $\frac{L}{3}$ gemacht, um das Glied $\frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi l_1}{L}\right)e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}kt}$ zum Wegfall zu bringen. In den ausgeführten Versuchen war also für alle Zeitmomente $t > 1$

$$z'' - z' = \frac{4(z_2 - z_1)}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt}$$

und

$$z'' + z' = 2\frac{z_1 l_1 + z_2 l_2}{L} - \frac{2(z_2 - z_1)}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)e^{-\frac{4\pi^2}{L^2}kt}$$

Hieraus resultirt als Ausdruck der elektromotorischen Kraft E, welche die Concentrationen z'' und z' der Grenzschichten zwischen den beiden Elektroden im Momente t (> 1) erzeugen:

$$E = A(z'' - z')[1 + B(z'' + z')] =$$
$$= A\frac{4(z_2 - z_1)}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt}\left\{1 + 2B\left[\frac{z_1 l_1 + z_2 l_2}{L} - \frac{(z_2 - z_1)}{\pi}\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)e^{-\frac{4\pi^2}{L^2}kt}\right]\right\}.$$

Ist **Fick's** Elementargesetz der Hydrodiffusion richtig, so muss also die elektromotorische Kraft zwischen den beiden Zinkelektroden eine solche Function der Zeit sein, dass

$$E = A_1 e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} - B_1 e^{-\frac{5\pi^2}{L^2}kt}$$

ist, wo A_1 und B_1 kurze Bezeichnungen gewisser constanter Werthe sein sollen.

Da nach den oben mitgetheilten Messungen der Werth der Constante B **sehr klein** ist verglichen mit dem Werthe der Constante A,

so wird sich schon nach kurzer Zeit der Ausdruck der elektromotorischen Kraft auf das erste Glied, auf

$$E = A_1 e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt}$$

reduciren.

Die Messung der elektromotorischen Kraft wurde nach der Dubois-Reymond'schen Modification der Compensationsmethode ausgeführt. Als compensirende elektromotorische Kraft diente ein Daniell'sches Element, dessen elektromotorische Kraft nie um mehr als $\frac{1}{1300}$ ihres Werthes variirte. Der benutzte Messdraht war in seinen einzelnen Theilen vollkommen gleichwerthig; es wurde ausserdem dafür Sorge getragen, dass der Widerstand des Daniell'schen Elementes und der sonstige Widerstand des galvanischen Kreises, in welchem der compensirende Daniell stand, während aller Messungen derselbe blieb. Bedeutet λ diejenige Länge des Messdrahtes, welcher als beiden galvanischen Kreisen gemeinschaftlicher Theil eingeschaltet werden muss, um vollständige Compensation der zu messenden elektromotorischen Kraft im zweiten Kreise herzustellen, bezeichnet w den Widerstand der Längeneinheit des Messdrahtes, bedeutet W den Gesammtwiderstand des ersten Kreises und D die elektromotorische Kraft des compensirenden Daniell'schen Elementes, so ist der Ausdruck der zu messenden elektromotorischen Kraft E:

$$E = \frac{\lambda w}{W} \cdot D.$$

Die Länge λ des Messdrahtes, die zur Zeit t eingeschaltet werden muss, um die zu dieser Zeit zwischen den beiden Zinkelektroden vorhandene elektromotorische Kraft durch das Daniell'sche Element vollständig zu compensiren, hängt hienach mit der Zeit so zusammen, dass allgemein

$$\lambda = \frac{W}{wD}\left(A_1 e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} - B_1 e^{-\frac{5\pi^2}{L^2}kt}\right) \text{ (für t > 1)}$$

und für grössere Werthe von t

$$\lambda = \frac{W}{wD} \cdot A_1 e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} \quad \text{ist.}$$

Hieraus geht kervor:

Sind für eine Reihe gleich weit abstehender Zeitmomente t_0, t_1, t_2... bei der Herstellung der Compensation der den Concentrationen



der Grenzschichten entsprechenden elektromotorischen Kräfte die eingeschalteten Messdrahtlängen gleich λ_0, λ_1, λ_2 . . . gefunden worden, so muss die Grösse $\log\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\right)$ mit wachsender Zeit, also mit wachsendem i, sehr schwach ansteigen und ziemlich bald constant werden; der constante Werth, welchen diese Grösse schliesslich erreicht, ist:

$$\log\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\right) = \frac{\pi^2}{L^2} k \Delta t,$$

wo $\Delta t = t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = t_3 - t_2$ etc. Mit Hilfe dieses constanten Werthes, er heisse η, lässt sich die Grösse der Fick'schen „Diffusionsconstante“ k ermitteln; es ergibt sich:

$$k = \eta \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\Delta t}.$$

Resultate der Beobachtungen.

Die ersten zwei Beobachtungsreihen wurden in einem Zimmer des physikalischen Instituts im Laufe des Monats October angestellt. In Folge der Heizung stieg die Temperatur dieses Zimmers während des Vormittags bis gegen Mittag regelmässig um ca. 2°, um von da an bis gegen Morgen in regelmässigster Weise äusserst langsam um eben so viel abzunehmen. Die Beobachtungen, die in jeder Beobachtungsreihe Tag und Nacht hindurch in Zwischenräumen von je 3 Stunden angestellt wurden, zeigten einen äusserst gleichmässigen Verlauf der Diffusion während der Zeit von ca. 1^h Mittags bis ca. 7^h Vormittags; für die sechs Vormittagsstunden ergaben sie dagegen Tag für Tag einen etwas abweichenden Verlauf. Dieses deutete an, dass schon Temperaturvariationen in dem Betrage von ca. 2° den Verlauf der Diffusion erheblich stören und dass reine Resultate nur bei möglichst constanter Temperatur des Diffusionsgefässes gewonnen werden können. (Aus den später mitgetheilten Versuchen wird sich ergeben, dass die von mir benutzte Beobachtungsmethode so empfindlich ist, dass sie bereits einen Einfluss einer Temperaturvariation von $\frac{1}{5}$° mit der grössten Schärfe hervortreten lässt.) Herr Prof. R. Wolf hatte die Freundlichkeit, mir die Kellerräume der eidgenössischen Sternwarte für längere Zeit zur Verfügung zu stellen. Hier habe ich zwei möglichst ausgedehnte Beobachtungsreihen ausgeführt. Mitten in die erste Beobachtungsreihe hinein fiel leider ein plötzlicher und sehr

beträchtlicher Rückgang der äusseren Lufttemperatur, der sich, allerdings sehr stark abgeschwächt, auch bis in die Kellerräume hinunter geltend machte. Ich unterlasse es daher, die Resultate dieser Beobachtungsreihe mitzutheilen. Während der zweiten Beobachtungsreihe variirte die Temperatur des Kellerraumes nur äusserst wenig und sehr langsam, wie die in der unten folgenden Tabelle angegebenen Temperaturablesungen erkennen lassen. Für diese zweite Beobachtungsreihe war der Versuch in folgender Weise eingerichtet worden.

Am 9. November wurde auf die untere amalgamirte Zinkelektrode eine möglichst von Luft befreite Zinksulphatlösung mit der Concentration $z_2 = 0{,}3182$ (d. h. in einem Cubikcentimeter Lösung befanden sich $0{,}3182^{gr}$ wasserfreies Salz) bis zu der Höhe $l_2 = 1{,}98^{cm}$ gebracht. In dem Momente 7^h Morgens wurde über diese Lösung eine zweite mit der kleineren Concentration $z_1 = 0{,}1520$ bis zu einer Höhe $l_1 = 1{,}01^{cm}$ so aufgeschichtet, dass die Trennungsfläche beider Lösungen vollständig eben und vollkommen spiegelnd ausfiel. Hierauf wurde die zweite Zinkelektrode auf die obere Begrenzungsfläche dieser zweiten Schicht mittelst einer passenden Führung bis zur Berührung mit der Salzlösung herabgelassen und in dieser Stellung festgehalten. Nachdem das Diffusionsgefäss mit Hilfe von wachsgetränktem Papier und Wachs möglichst luftdicht verschlossen worden war, blieb es auf einem Pfeiler des Kellerraumes während der ganzen Beobachtungsdauer von 12 Tagen unberührt stehen. Die erste Ablesung wurde sofort nach Herrichtung des Versuches gemacht; die weiteren Ablesungen erfolgten täglich sechsmal, nach Verlauf von je 3 Stunden. So wurden in dieser Beobachtungsreihe 72 Daten gewonnen.

Wie schon oben erwähnt wurde, diente die Compensationsmethode zur Messung der elektromotorischen Kräfte. Das compensirende Daniell'sche Element besass eine elektromotorische Kraft von fast vollkommener Constanz: die constatirten Aenderungen seiner elektromotorischen Kraft überschritten nie den Werth $\frac{1}{1800}$ des Mittelwerthes. Neben dem Daniell'schen Elemente befand sich im ersten Kreise noch ein Widerstand von 130 Q. E. Der Widerstand des 1^m langen, vollkommen homogenen Messdrahtes betrug 2,221 Q. E. Dem Galvanometer des zweiten Kreises war eine solche Empfindlichkeit gegeben worden, dass die Einstellungen λ auf dem Messdrahte bis auf $0{,}1^{mm}$ genau gemacht werden konnten. Unmittelbar nach Herrichtung

des Versuches ergab sich eine Einstellung $\lambda = 976,1^{mm}$; 12 Stunden später war sie bereits auf $951,6^{mm}$ gesunken. Während der nächsten 12 Stunden nahm sie um $80,1^{mm}$ ab, in den weiter folgenden 12 Stunden um fast denselben Betrag. Diese angeführten Zahlen lassen erkennen, welchen hohen Grad von Empfindlichkeit und Schärfe die benutzte Messmethode besitzt: Eine Aenderung der Differenz der Concentrationen beider Grenzschichten gleich dem 800sten Theile derjenigen Aenderung dieser Concentrationsdifferenz, die während eines halben Tages vor sich ging, liess sich mit vollkommener Sicherheit wahrnehmen; die Einstellung λ nahm in den ersten Tagen von Minute zu Minute um in runder Zahl $0,1^{mm}$ ab, der Gang der Diffusion konnte also von Minute zu Minute gewissermassen greifbar verfolgt werden. Die anfängliche Concentrationsdifferenz der Grenzschichten $z_2 - z_1 = 0,1562$ entsprach der Einstellung $\lambda = 976,1^{mm}$; wegen der sehr angenäherten Proportionalität zwischen Concentrationsdifferenz und elektromotorischer Kraft entspricht einer Aenderung der Einstellung gleich $0,1^{mm}$ eine Aenderung der Concentrationsdifferenz im Betrage von $0,0160^{mgr}$. Erlitt also durch die Diffusion die untere Grenzschicht einen Salzverlust von $\frac{1}{120}{}^{mgr}$ pro Cubikcentimeter und die obere Grenzschicht gleichzeitig einen Salzgewinn von demselben Betrage, so konnte diese Diffusionswirkung eben noch deutlich wahrgenommen werden.

Die folgende Tabelle gibt die Gesammtheit aller Beobachtungen der besprochenen vierten Beobachtungsreihe. In der ersten Spalte steht das Tagesdatum; die zweite Spalte enthält die bei der jedesmaligen Beobachtung gefundene Temperatur des Kellerraumes; die dritte Spalte gibt die Einstellungen λ auf dem Messdraht; die letzte Spalte enthält vom zweiten Beobachtungstage an die Differenzen der gewöhnlichen Logarithmen je zweier auf einander folgender Einstellungen.

	$T=$ °	$\lambda=$ mm
9. Nov.	9,8	976,1
	9,8	974,8
	9,8	969,4
	9,9	961,0
	9,9	951,6
	9,8	939,0

	$T=$ °	$\lambda=$ mm	$\Delta \log =$
10. Nov.	9,6	871,5	
			0,01034
	9,7	849,9	
			0,01075
	9,7	830,1	
			0,01022
	9,8	810,8	
			0,01046
	9,8	791,5	
			0,01060
	9,7	772,5	

	$T =$ °	$\lambda =$ mm	$\Delta \log =$
11. Nov.	9,5	717,8	
			0,01028
	9,6	701,0	
			0,01079
	9,6	683,8	
			0,01061
	9,8	667,3	
			0,01074
	9,7	651,0	
			0,01060
	9,7	635,3	
12. Nov.	9,6	589,0	
			0,01053
	9,7	574,9	
			0,01063
	9,9	561,0	
			0,01058
	9,8	547,5	
			0,01149
	9,8	533,2	
			0,01047
	9,7	520,5	
13. Nov.	9,5	483,2	
			0,01102
	9,7	471,1	
			0,01158
	9,7	458,7	
			0,01103
	9,6	447,2	
			0,01131
	9,8	435,7	
			0,01101
	9,6	424,8	
14. Nov.	9,4	394,0	
			0,01106
	9,5	384,1	
			0,01168
	9,5	373,9	
			0,01047
	9,5	365,0	
			0,01084
	9,6	356,0	
			0,01050
	9,5	347,5	
15. Nov.	9,5	320,4	
			0,01126
	9,4	312,2	
			0,01141
	9,5	304,1	
			0,01114
	9,6	296,4	
			0,01098
	9,6	289,0	
			0,01127
	9,5	281,6	

	$T =$ °	$\lambda =$ mm	$\Delta \log =$
16. Nov.	9,4	260,1	
			0,01116
	9,6	253,5	
			0,01093
	9,5	247,2	
			0,01085
	9,5	241,1	
			0,00984
	9,6	235,7	
			0,01120
	9,4	229,7	
17. Nov.	9,4	212,5	
			0,01076
	9,6	207,3	
			0,01125
	9,7	202,0	
			0,01110
	9,6	196,9	
			0,01095
	9,6	192,0	
			0,01123
	9,7	187,1	
18. Nov.	9,5	173,2	
			0,01041
	9,5	169,1	
			0,01092
	9,4	164,9	
			0,01093
	9,6	160,8	
			0,01084
	9,5	156,8	
			0,01066
	9,4	153,0	
19. Nov.	9,5	141,2	
			0,01058
	9,5	137,8	
			0,01147
	9,6	134,3	
			0,01081
	9,6	131,0	
			0,01176
	9,5	127,5	
			0,01069
	9,5	124,4	
20. Nov.	9,4	115,0	
			0,01109
	9,5	112,1	
			0,01099
	9,6	109,3	
			0,01046
	9,5	106,7	
			0,01154
	9,4	103,9	
			0,01058
	9,4	101,4	

Eine Durchsicht dieser mitgetheilten Zahlen ergibt, dass die elektromotorische Kraft zwischen den beiden Zinkelektroden bei wachsender Zeit, genau den Forderungen der Theorie entsprechend, nach dem Gesetze

$$E = A_1 e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} - B_1 e^{-\frac{5\pi^2}{L^2}kt}$$

auf kleinere und kleinere Werthe heruntersank. Die Kleinheit des Coëfficienten B_1 im Verhältniss zum A_1 und die Kleinheit des Elektrodenabstandes L bewirkten, dass bereits vom vierten Tage an das zweite Glied des vorstehenden Ausdruckes nur einen verschwindend kleinen Beitrag zum Werthe E lieferte und die elektromotorische Kraft von da an in Form einer einfachen geometrischen Progression:

$$E = A_1 e^{-\frac{\pi^2}{L^2} k t}$$

mit wachsender Zeit variirte.

Berechnet man mit Hilfe dieser letzteren Relation den Werth der Constanten $\eta = \frac{\pi^2}{L^2} k$ aus allen Beobachtungen je zweier auf einander folgender Tage nach der Methode der kleinsten Quadrate, so findet man aus den Beobachtungen

			mittlere Temperatur
vom 13. u. 14.	Nov.	$\eta = 0{,}2032$	9,6°
„ 14. u. 15.	„	$\eta = 0{,}2066$	9,5
„ 15. u. 16.	„	$\eta = 0{,}2045$	9,5
„ 16. u. 17.	„	$\eta = 0{,}2027$	9,5
„ 17. u. 18.	„	$\eta = 0{,}2027$	9,5
„ 18. u. 19.	„	$\eta = 0{,}2049$	9,5
„ 19. u. 20.	„	$\eta = 0{,}2049$	9,4

Die Mittelwerthe aus den vier ersten, aus den vier letzten und aus allen diesen Werthen sind:

$$\eta = 0{,}2042$$
$$\eta = 0{,}2038$$
$$\eta = 0{,}2042$$

Diese Zahlen lassen wohl kaum einen Zweifel darüber aufkommen, dass die Grösse, die nach der Theorie constant sein sollte, für die hier verwirklichten Versuchsbedingungen auch factisch constant war.

Fick's Elementargesetz ist demnach für diejenigen Concentrationsdifferenzen, die in dem Diffusionsgefässe vom vierten Beobachtungstage an vorhanden waren, in der That der exacte Ausdruck des Diffusionsvorganges.

Als Werth der Fick'schen „Diffusionsconstante" wird aus dem obigen Mittelwerth für $\eta = \frac{\pi^2}{L^2} k$ und dem Werthe von L [$2{,}99^{\text{cm}}$] gefunden:

$$k = 0{,}1849 \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{Tag}^1}\right],$$ giltig für die mittlere Temperatur 9,5°.

Zweite Beobachtungsmethode.

Beschreibung der Methode.

Die beschriebene erste Versuchsmethode erfordert ziemlich lange Beobachtungszeiträume. In Folge dessen wird die Untersuchung sehr zeitraubend und wegen der nothwendig geforderten constanten Temperatur für die meisten Localitäten so gut wie unausführbar. Wohl scheint es möglich, die Beobachtungsdauer durch Verkürzung der Länge L beträchtlich zu vermindern; allein unter einen erheblich kleineren Werth als der in den obigen Versuchen benutzte darf schwerlich der Werth L heruntersinken, wenn der Anfangszustand des Diffusionsgefässes scharf definirbar bleiben soll.

Diese Eigenschaft der benutzten Versuchsmethode veranlasste mich, andere Untersuchungsmethoden in Anwendung zu bringen. Es ist mir gelungen, eine zweite Versuchsmethode ausfindig zu machen, welche die Möglichkeit gestattet, binnen einiger Stunden eine ausserordentlich feine Prüfung auf die Richtigkeit des Fick'schen Elementargesetzes der Diffusion anstellen und die Grösse der Diffusionsconstante innerhalb eines beliebigen Bruchtheils einer Stunde bestimmen zu können. Nach diesem Verfahren können die Einflüsse, welche Temperatur und Concentration auf den Verlauf der Diffusion ausüben, in ebenso scharfer wie bequemer Weise untersucht werden. Das Verfahren ist folgender Art:

Eine ebene, kreisrunde amalgamirte Zinkplatte bildet die Bodenfläche eines flachen Glascylinders von etwa 12 cm Weite. Auf drei Randstellen dieser Platte werden kleine, genau gleich dicke Stückchen einer planparallelen Hartgummiplatte von 0,52 cm Dicke gelegt, welche eine zweite, der unteren genau gleiche, amalgamirte Zinkplatte zu tragen haben. Der dünne Zwischenraum zwischen den beiden parallelen Zinkplatten wird mit einer Zinksulphatlösung von irgend einer Concentration (in den folgenden Versuchen wurden Concentrationen zwischen 0,20 und 0,38 benutzt) ausgefüllt. An die beiden Zinkplatten sind Drähte angelöthet, um durch das System der beiden Platten und der Lösung einen galvanischen Strom schicken, oder das System in den Kreis eines Galvanometers einschalten zu können. Werden die beiden Zinkplatten vor dem Versuche abgerieben und mit Zinksulphatlösung derjenigen Concentration abgespült, die zwischen beide gefüllt werden soll, so zeigt sich das System der beiden Zink-

platten und der eingefüllten Zinksulphatlösung bei gleichen Temperaturen beider Platten vollkommen ohne jede Potentialdifferenz; nur wenn beide Platten nicht genau die gleiche Temperatur haben, zeigt sich ein kleiner Ausschlag an einem empfindlichen Galvanometer, in dessen Kreis das System eingeschaltet wird. Durch die so vorgerichtete Combination wird hierauf ein constant erhaltener galvanischer Strom in einer solchen Richtung geschickt, dass derselbe durch die untere Zinkplatte ein-, durch die obere austritt. Durch die Wanderung der Ionen wird während des Stromdurchganges die Salzlösung in der Grenzschicht an der unteren Zinkplatte, der Anode, concentrirter und in der Grenzschicht an der oberen Zinkplatte, an der Kathode, verdünnter. Diese Concentrationsänderungen der Grenzschichten sind der Stärke und der Zeitdauer des Stromes proportional. Sowie nun durch die Thätigkeit des galvanischen Stromes diese Concentrationsänderungen beginnen, entwickelt sich der Diffusionsstrom, welcher die Wirkung des galvanischen Stromes auszugleichen sucht. Durch das Zusammenwirken von galvanischem Strom und Diffusionsstrom wird ein stationärer Zustand der Concentrationsvertheilung zwischen den beiden Zinkelektroden angestrebt, in welchem in der Zeiteinheit die Diffusion genau so viel Salz der $\left.\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Grenzschicht $\left.\begin{matrix}\text{zu-}\\ \text{ent-}\end{matrix}\right\}$führt, als durch die Thätigkeit des galvanischen Stromes der $\left.\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Grenzschicht $\left.\begin{matrix}\text{entzogen}\\ \text{mitgetheilt}\end{matrix}\right\}$ wird.

Hat der constante galvanische Strom die Combination eine passend lange Zeit durchzogen und ist in Folge dessen ein genau angebbarer Zustand der Concentrationsvertheilung zwischen den beiden Zinkplatten entstanden, so wird derselbe plötzlich unterbrochen. Von diesem Momente an ist die Salzlösung der alleinigen Wirkung der Diffusion ausgesetzt. Der weitere Verlauf der Diffusion wird nun mit Hilfe der elektromotorischen Kraft, welche die variabeln Concentrationen der Grenzschichten an den beiden Zinkplatten erzeugen, untersucht. Aus dem gefundenen zeitlichen Verlaufe dieser elektromotorischen Kraft lässt sich sowohl der ganze Verlauf der Diffusion erkennen, als auch der Werth der Diffusionsconstante berechnen.

Ein eminenter Vortheil dieser Methode liegt in dem Umstande, dass der Abstand der beiden Zinkelektroden *beliebig klein* ge-

nommen, also auch die Zeitdauer des ganzen Ablaufes der Diffusion beliebig kurz gemacht werden darf, ohne dass irgend eine Unsicherheit in die Definition des anfänglichen Zustandes der Concentrationsvertheilung hineinkommt, aus welchem heraus sich die beobachtete Diffusion entwickelt; in welchem Momente auch der galvanische Strom unterbrochen werden mag, es lässt sich immer die diesem Momente entsprechende Vertheilung der Concentration von Schicht zu Schicht angeben.

Theorie der Methode.

Durchfliesst ein galvanischer Strom eine zwischen zwei Zinkelektroden eingeschaltete Zinksulphatlösung, so bleibt die Salzmenge trotz der stattfindenden Elektrolyse unverändert; ebenso bleibt die Concentration jeder einzelnen inneren Flüssigkeitsschicht constant; nur die an den Elektroden gelegenen Grenzschichten der Lösung erleiden eine Aenderung ihrer Concentration: der Salzgehalt der an der Anode anliegenden Grenzschicht wird vermehrt, der Salzgehalt der Grenzschicht an der Kathode wird vermindert. Die Salzmenge, welche ein constanter Strom von der Stärke I durch die Vorgänge der Elektrolyse und der Wanderung der Ionen während der Zeit t der Grenzschicht an der Anode zu- und der Grenzschicht an der Kathode entführt, ist nach Hittorf's umfassenden Untersuchungen

$$2{,}48\,(1-n)\,\varepsilon I t,$$

wo n die Ueberführungszahl und ε das elektrochemische Aequivalent des Zinks bedeutet. Aus Hittorf's Messungen geht hervor, dass die Ueberführungszahl n für hohe Concentrationen und innerhalb eines nicht zu grossen Intervalls der Concentration kaum merkbar mit der Concentration variirt. Die in den folgenden Versuchen benutzten Concentrationen besassen so hohe Werthe und die erzeugten Concentrationsunterschiede wurden innerhalb so enger Grenzen gehalten, dass der Werth n bis auf einen Bruchtheil eines Procents constant sein musste.

Um den Zusammenhang zu ermitteln, der zwischen der Concentration z in irgend einer Schicht in der Tiefe x unter der oberen Elektrode nach Ablauf der Zeit t seit Beginn des Stromes und diesen beiden Variabeln x und t besteht, gehen wir von der Hypothese aus, dass wenn überhaupt die Thätigkeit des galvanischen Stromes den Vorgang der Diffusion beeinflusst, sich dieser Einfluss nur in dem

numerischen Werthe der „Diffusionsconstante" k geltend macht. (Nebenbei mag gleich hier bemerkt werden, dass eine weiter unten erwähnte Prüfung auf die Richtigkeit dieser Hypothese ergeben hat, dass der gleichzeitig neben der Diffusion durch die Lösung verlaufende galvanische Strom die Diffusion in keinerlei Weise merkbar beeinflusste.) Die variable Concentration z hat dann zunächst die partielle Differentialgleichung zu erfüllen:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \qquad (1$$

Ausserdem hat z zwei Grenzbedingungen zu erfüllen, deren Form zunächst zu entwickeln ist. Es möge diese Entwicklung für die eine Grenzfläche der Salzlösung bei $x = 0$ durchgeführt werden.

Aus der die obere Elektrode (die Kathode) berührenden Grenzschicht von der unendlich kleinen Dicke dx führt der galvanische Strom von der Stärke I während des Zeitelementes dt die Salzmenge heraus:

$$h \cdot I \cdot dt,$$

wenn für die Constante $2{,}48\,(1 - n)\,\varepsilon$ die kurze Bezeichnung h gesetzt wird. Werden die Werthe des Differentialquotienten der Concentration nach der Richtung der x für den Ort $x = 0$ mit $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 \cdots$ bezeichnet, so ist der Ausdruck der Salzmenge, welche der Diffusionsstrom während derselben Zeit dieser Schicht durch ihre untere Begrenzungsfläche aus den tiefer gelegenen Schichten zuführt:

$$k q \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 dx\right] dt,$$

wo q den Querschnitt des Diffusionsgefässes bezeichnet. Der Salzgewinn, den die unendlich dünne Grenzschicht während des Zeitelementes dt erleidet, hat also die Grösse:

$$\left[k q \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 - h I\right] dt + k q \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 dx\, dt.$$

Da sich andererseits dieser Salzgewinn auch durch den Werth $q\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 dx\, dt$ darstellen lässt, so gilt folgende Gleichung als Ausdruck der Salzbewegung in der Grenzschicht bei $x = 0$:

$$q\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_0 dx\, dt = \left[k q \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 - h I\right] dt + k q \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0 dx\, dt.$$

Für diese Grenzschicht muss also in jedem Momente

$$kq\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0 = h\,I, \text{ für alle } t, \tag{2}$$

sein. Es gilt also in diesem Falle eine Grenzgleichung, die der bekannten Grenzgleichung in der Theorie der Wärmeleitung analog ist.

Durch Anwendung derselben Betrachtungsweise auf die Vorgänge der Salzbewegung in der unteren, die Anode berührenden, Grenzschicht erhält man als zweite in jedem Momente giltige Grenzgleichung:

$$kq\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_L = h\,I, \text{ für alle } t. \tag{3}$$

Wird als Anfangspunkt der Zeit derjenige Moment genommen, in welchem der galvanische Strom die Lösung zu durchfliessen beginnt, so hat die Anfangsgleichung die Form:

$$\left.\begin{array}{l} z = z_0 \text{ für } t = 0 \\ \quad\text{und für alle } x. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Eine Lösung, welche die Gleichungen (1), (2) und (3) erfüllt, ist:

$$z = \frac{Ih}{kq}\,x + n\sum_0^\infty A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)e^{-\frac{n^2\pi^2}{L^2}kt}, \text{ wo } n = 0, 1, 2\ldots$$

Es erübrigt noch die Constante A_n so zu bestimmen, dass der Anfangsbedingung (4) genügt wird. Aus der für $t = 0$ geltenden Gleichung

$$z_0 = \frac{Ih}{kq}\,x + n\sum_0^\infty A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

folgt nach Fourier's Theorem:

$$A_0 = z_0 - \frac{Ih}{kq}\cdot\frac{L}{2} \quad \text{und}$$

$$A_n = \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{Ih}{kq}\cdot\frac{L}{\pi^2}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \text{ also } A_2 = A_4 = A_6 = \cdots = 0.$$

Die allgemeine, alle Bedingungen erfüllende Lösung der vorliegenden Aufgabe ist also:

$$z = z_0 + \frac{Ih}{kq}\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{Ih}{kq}\,L\left[\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{9}\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}kt} + \cdots\right]. \tag{5}$$

Für die in den Grenzschichten für $x = L$ und $x = 0$ vorhandenen Concentrationen z'' und z' ergeben sich daraus die Werthe:

$$z'' = z_0 + \frac{Ih}{kq} \cdot \frac{L}{2} - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{Ih}{kq} L \left(e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} + \frac{1}{9} e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}kt} + \cdots \right)$$

$$z' = z_0 - \frac{Ih}{kq} \cdot \frac{L}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{Ih}{kq} L \left(e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} + \frac{1}{9} e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} + \cdots \right),$$

und die im Momente t zwischen den beiden Zinkelektroden vorhandene elektromotorische Kraft E hat die Grösse:

$$E = A(z'' - z')\,[1 + B(z'' + z')] =$$
$$= A(1 + 2Bz_0) \frac{Ih}{kq} L \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \left(e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt} + e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}kt} + \cdots \right) \right]. \qquad (6$$

Mit Hilfe dieser Gleichung (6) liesse sich eine Prüfung auf die Richtigkeit des Elementargesetzes der Diffusion anstellen und eine Werthbestimmung der Constante k vornehmen. Eine nähere Discussion dieser Gleichung lässt aber erkennen, dass die eigenthümliche Form dieser Gleichung keine sehr genaue Bestimmung der Grösse k gestattet; ein sehr kleiner Beobachtungsfehler in der Messung der elektromotorischen Kraft E hat schon einen verhältnissmässig grossen Einfluss auf den Werth der zu bestimmenden Constante. Aus diesem Grunde habe ich die Gleichung (6) nicht zur definitiven Messung des Diffusionsverlaufes benutzt. Jedoch habe ich dieselbe zur Entscheidung der folgenden, manches Interesse darbietenden Frage verwendet: Besitzt der gleichzeitig neben dem Diffusionsstrom durch die Salzlösung gehende galvanische Strom Einfluss auf den Verlauf der Diffusion, d. h. auf die Grösse der Diffusionsconstante, oder nicht? Wiederholt ausgeführte Versuchsreihen ergaben, dass die Grösse der mit Hilfe dieser Gleichung (6) bestimmten Diffusionsconstanten so gut wie vollständig übereinstimmt mit dem Werthe, der sich für diese Grösse aus den Vorgängen ergibt, in denen der Diffusionsvorgang ohne den gleichzeitigen Durchgang eines galvanischen Stromes geschieht.

Eine äusserst bequeme Methode zur Untersuchung des Diffusionsverlaufes erhält man jedoch aus der obigen Gleichung (5) in folgender Weise:

Hat der constante galvanische Strom die Salzlösung während einer passend langen Zeit, etwa während der Zeit T, durchströmt, so unterbreche man den Strom. Die durch die gleichzeitige Thätigkeit

des Stromes und der Diffusion erzeugten Unterschiede der Concentrationen der einzelnen Schichten werden sich hierauf von diesem Momente an durch den alleinigen Vorgang der Diffusion nach und nach ausgleichen. Diese allmählich vor sich gehende Ausgleichung der Concentrationsunterschiede lässt sich mit ausserordentlich grosser Genauigkeit verfolgen und kann deswegen als feinstes Prüfungsmittel auf die Richtigkeit des Fick'schen Elementargesetzes der Diffusion dienen.

Das Gesetz, nach welchem diese Ausgleichung der Concentration vor sich geht, lässt sich leicht ermitteln.

In jedem Orte $x > 0$ und $< L$ und zu jeder Zeit ist die Differentialgleichung zu erfüllen:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \tag{7}$$

Für alle Zeitmomente t bestehen die Grenzgleichungen:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0} = 0 \tag{8}$$

und

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=L} = 0. \tag{9}$$

Als Anfangspunkt der Zeit soll der Moment genommen werden, in welchem der Strom unterbrochen wurde. Der Werth der Concentration, welcher in diesem Zeitpunkte in irgend einer Schicht in der Tiefe x unter der oberen Elektrode vorhanden ist, heisse $z_0^{\bullet}$. Der Anfangszustand des Diffusionsvorganges ist dann durch die Gleichung bestimmt:

Für $t = 0$:

$$z_0^{\bullet} = z_0 + \frac{Ih}{kq}\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{Ih}{kq} L \left[B_1 \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \frac{1}{9} B_3 \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{25} B_5 \cos\left(\frac{5\pi}{L}x\right) + \cdots\right], \tag{10}$$

wo

$$B_1 = e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt}, \quad B_3 = e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}kt}, \ \ldots$$

gesetzt worden ist.

Die Auffindung der allgemeinen Lösung für z, die sämmtlichen Bedingungen genügt, hat keine Schwierigkeiten; da die Wiedergabe

der Rechnung nur Wiederholung von bereits Ausgeführtem sein würde, will ich gleich das Endresultat geben. Die allgemeine Lösung ist:

$$z = z_0 - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{Ih}{kq} L \left[(1 - B_1) \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) e^{-\frac{\pi^2}{L^2} kt} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{9} (1 - B_3) \cos\left(\frac{3\pi}{L} x\right) e^{-\frac{9\pi^2}{L^2} kt} + \cdots \right]. \qquad (11$$

Daraus findet sich für die Concentration der Grenzschicht an der unteren Elektrode:

$$z'' = z_0 + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{Ih}{kq} L \left[(1 - B_1) e^{-\frac{\pi^2}{L^2} kt} + \frac{1}{9} (1 - B_3) e^{-\frac{9\pi^2}{L^2} kt} + \cdots \right]$$

und für die Concentration der Grenzschicht an der oberen Elektrode:

$$z' = z_0 - \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{Ih}{kq} L \left[(1 - B_1) e^{-\frac{\pi^2}{L^2} kt} + \frac{1}{9} (1 - B_3) e^{-\frac{9\pi^2}{L^2} kt} + \cdots \right].$$

Da die Differenz dieser Concentrationen

$$z'' - z' = \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{Ih}{kq} L \left[(1 - B_1) e^{-\frac{\pi^2}{L^2} kt} + \frac{1}{9} (1 - B_3) e^{-\frac{9\pi^2}{L^2} kt} + \cdots \right]$$

und deren Summe

$$z'' + z' = 2 z_0$$

ist, so nimmt der Ausdruck der elektromotorischen Kraft E, welche in dem Momente t zwischen den beiden Zinkelektroden vorhanden ist, folgende Form an:

$$E = A (z'' - z') [1 + B (z'' + z')] =$$
$$= A (1 + 2 B z_0) \frac{8 Ih}{\pi^2 kq} L \left[(1 - B_1) e^{-\frac{\pi^2}{L^2} kt} + \frac{1}{9} (1 - B_3) e^{-\frac{9\pi^2}{L^2} kt} + \cdots \right]. \qquad (12$$

Nach Verlauf einer gewissen Zeit wird der Werth des zweiten Gliedes bedeutungslos gegenüber dem Werthe des ersten. Von diesem Zeitmomente an bleibt dann als Ausdruck der elektromotorischen Kraft stehen:

$$E = C \cdot e^{-\frac{\pi^2}{L^2} kt}, \qquad (13$$

wo C den Werth der Constante $A (1 + 2 B z_0) \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{Ih}{kq} L (1 - B_1)$ bezeichnet.

Die Grösse L darf unbeschadet der Genauigkeit der nach dieser Methode anzustellenden Versuche sehr klein genommen und dadurch der Werth der Grösse $\frac{9\pi^2}{L^2} \cdot k$ ganz erheblich gesteigert werden. In den weiter unten besprochenen Versuchen betrug L $0{,}522^{\mathrm{cm}}$ und fand sich für k bei Zimmertemperatur ein Werth von beiläufig 0,20 bis $0{,}25 \left[\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{Tag}^{-1}}\right]$. Unter diesen Verhältnissen wird das Glied $\frac{1}{9} e^{-\frac{9\pi^2}{L^2}kt}$ schon nach Verlauf von 1½ Stunden so klein (es beträgt dann nur ca. $\frac{1}{1250}$), dass es gegenüber dem ersten Gliede $e^{-\frac{\pi^2}{L^2}kt}$ kaum mehr in Betracht kommt. In allen den nach dieser Methode gemachten Messungen begannen die Beobachtungen der elektromotorischen Kraft erst 1½ Stunde nach der Unterbrechung des Stromes; zu ihrer Berechnung durfte demnach die Gleichung (13) durchweg als vollkommen genau benutzt werden.

Die erhebliche Grösse des Werthes $\frac{\pi^2}{L^2} k$ lässt die elektromotorische Kraft sehr rasch mit der Zeit sinken (von 10 zu 10 Secunden nahm die elektromotorische Kraft deutlich wahrnehmbar ab) und macht deswegen eine Bestimmung der elektromotorischen Kraft nach der Compensationsmethode unmöglich. Es bleibt nichts übrig als die in einem gegebenen Momente vorhandene elektromotorische Kraft durch den ersten Ausschlag zu messen, den sie in einem empfindlichen Galvanometer hervorruft, in dessen Kreis sie in diesem Momente für die Dauer einer halben Schwingung der Galvanometernadel eingeschaltet wird. Die von dieser elektromotorischen Kraft erzeugten, jedesmal nur 5 Secunden dauernden Ströme erreichten nie Intensitäten, deren Grösse über $\frac{1}{10000} \left[\frac{\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{mm}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{Sec.}\ 1}\right]$ in absolutem elektromagnetischem Maasse hinaufstieg; die von diesen schwachen, kurzdauernden Strömen hervorgerufenen Aenderungen der an den Elektroden jedesmal bestehenden Concentrationen fallen also so klein aus, dass sie vollkommen ausser Betracht gelassen werden können. Der erste Ausschlag s, welchen eine elektromotorische Kraft in einem Galvanometer hervorruft, ist derselben proportional; bei constant bleibender Empfindlichkeit des Galvanometers und bei unveränderlichem Widerstande des Galvanometerkreises verhalten sich die in gewissen Zeitmomenten vor-

handenen elektromotorischen Kräfte wie die ersten Ausschläge, die sie in diesem Momente der Galvanometernadel ertheilen. Der Zusammenhang zwischen dem ersten Ausschlage s, welchen man an einem Galvanometer erhält, wenn man das Diffusionsgefäss in dem Momente t für die Dauer einer halben Schwingung in den Galvanometerkreis einschaltet, und der Zeit t hat also die Form:

$$s = C_1 \cdot e^{-\frac{\pi^2}{L^2} k t},$$

wo C_1 von der oben besprochenen Constante C, von dem Widerstande des Galvanometerkreises und von der Beschaffenheit des Galvanometers abhängt.

Die Quotienten je zweier auf einander folgender ersten Ausschläge $s_0, s_1, s_2 \ldots$, die in den um das gleiche Zeitintervall Δt abstehenden Zeitmomenten $t_0, t_1, t_2 \ldots$ beobachtet werden, müssen also constant sein, wenn Fick's Elementargesetz Ausdruck der Wirklichkeit ist.

Resultate der Beobachtungen.

Um zu allernächst zu zeigen, welche Feinheit der Beobachtungen nach dieser zweiten Methode erreicht werden kann, will ich die sämmtlichen Beobachtungen, die ich in der ersten der nach dieser Methode angestellten Beobachtungsreihen erhalten habe, ausführlich mittheilen.

Der Zwischenraum zwischen den beiden Zinkplatten des Diffusionsgefässes ($L = 0{,}522^{\mathrm{cm}}$) wurde am 30. October um 10^{h} mit einer Zinksulphatlösung von der Concentration 0,3120 gefüllt. Nach der Füllung zeigte sich auch nicht die geringste Spur einer elektromotorischen Kraft zwischen den beiden Zinkelektroden. Unmittelbar darauf wurde von 10^{h} bis 12^{h} ein genau constant erhaltener galvanischer Strom von der Stärke 1,1 $\left[\mathrm{mgr}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{mm}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{Sec.}^{-1}\right]$ in elektromagnetischem Maasse in der Richtung von unten nach oben durch das Diffusionsgefäss geleitet. Von 12^{h} bis $1^1/_2{}^{\mathrm{h}}$ blieb das Diffusionsgefäss bei constanter Temperatur unberührt stehen; um $1^1/_2{}^{\mathrm{h}}$ begannen die Beobachtungen des weiteren Verlaufes der elektromotorischen Kraft zwischen den beiden Zinkelektroden. Von 2 zu 2 Minuten wurde das Diffusionsgefäss für die Dauer einer halben Schwingung der Galvanometernadel (5,2 Sec.) in den Kreis eines empfindlichen Galvanometers mit grosser Dämpfung eingeschaltet und der erste Ausschlag beobachtet. Nach Ablauf von ca. $1^1/_2$ Minuten beruhigte sich die Gal-

vanometernadel vollständig, so dass der Anfangszustand der Nadel bei jeder Beobachtung der vollkommene Ruhezustand war. Der Widerstand des Diffusionsgefässes war verschwindend klein gegenüber dem sonstigen Widerstande (366 Q. E.) des Galvanometerkreises.

Die folgende Tabelle gibt in der zweiten und fünften Spalte die erhaltenen ersten Ausschläge s (bereits auf Bögen reducirt); in der dritten und sechsten Spalte steht die Temperatur des Diffusionsgefässes von je 10 zu 10 Minuten verzeichnet. Die letzte Spalte gibt die Differenzen der gewöhnlichen Logarithmen je zweier Ausschläge, die in der Zeit um eine halbe Stunde von einander abstehen. Die Zahlen dieser letzten Spalte zeigen hinreichend deutlich, welche Feinheit der Beobachtung auf diesem Wege erreicht werden kann und bis zu welchem Grade das der Theorie zu Grunde gelegte Elementargesetz den Thatsachen entspricht. Sie machen ferner evident, dass die Bestimmung der Diffusionsgrösse k schon aus einigen wenigen, während eines Bruchtheils einer Stunde ausgeführten Beobachtungen mit ziemlich grosser Genauigkeit ausgeführt werden kann.

	$s =$	$T =$		$s =$	$T =$	$\Delta \log =$	
12^h 0′:	170,3	18,4°	12^h 30′:	141,9	18,4°	0,07923	
2	168,3		32	140,3		0,07902	
4	166,4		34	138,7		0,07907	
6	164,5		36	137,1		0,07913	
8	162,5		38	135,5		0,07890	
12^h 10′:	160,5	18,4°	12^h 40′:	133,9	18,3°	0,07870	
12	158,5		42	132,3		0,07847	
14	156,6		44	130,7		0,07851	0,07870
16	154,6		46	129,0		0,07862	
18	152,7		48	127,4		0,07867	
12^h 20′:	150,9	18,4°	12^h 50′:	126,0	18,3°	0,07832	
22	149,0		52	124,5		0,07802	
24	147,3		54	123,0		0,07829	
26	145,5		56	121,5		0,07828	
28	143,6		58	119,9		0,07933	
1^h 0′:	118,4	18,3°	1^h 30′:	98,8	18,4°	0,07859	
2	117,1		32	97,7		0,07867	
4	115,8		34	96,5		0,07918	0,07874
6	114,5		36	95,4		0,07926	
8	113,1		38	94,3		0,07895	

	$s =$	$T =$		$s =$	$T =$	$\Delta\log =$	
1h 10′:	111,8	18,3°	1h 40′:	93,4	18,4°	0,07809	
12	110,4		42	92,1		0,07871	
14	109,1		44	90,9		0,07926	
16	107,7		46	89,8		0,07894	
18	106,5		48	89,0		0,07796	
1h 20′:	105,2	18,4°	1h 50′:	87,8	18,5°	0,07853	0,07874
22	103,8		52	86,7		0,07816	
24	102,6		54	85,5		0,07918	
26	101,3		56	84,4		0,07927	
28	100,0		58	83,5		0,07831	

Aus dem allgemeinen Mittelwerthe

$$0{,}07872$$

ergibt sich zufolge der Beziehung

$$0{,}07872 \times 2{,}303 = \left(\frac{\pi}{0{,}522}\right)^2 \cdot k \cdot \frac{1}{48}$$

der Werth:

$$k = 0{,}2404 \left[\frac{\text{cm}^2}{\text{Tag}^1}\right] \text{ für die Temperatur } 18{,}4^0.$$

Einfluss der Temperatur auf die Diffusionsgrösse *k*.

Die nach der ersten Versuchsmethode ausgeführten Beobachtungen liessen deutlich erkennen, dass der Werth der Diffusionsgrösse k mit steigender Temperatur sehr erheblich zunimmt. Zur Festlegung dieses Einflusses der Temperatur auf die Diffusionsgrösse k habe ich für drei verschiedene constante Temperaturen 12 Versuchsreihen nach der zweiten Versuchsmethode ausgeführt, die in genau derselben Weise und in genau demselben Umfange angestellt wurden wie die soeben ausführlich mitgetheilte Versuchsreihe. Der gefundene Diffusionsverlauf war in j e d e r dieser zwölf Beobachtungsreihen ein eben so vollendet regelmässiger wie in der ersten. Die Wiedergabe der langen Zahlenreihen will ich deswegen unterlassen; ich gebe nur die Endresultate.

Datum	k	T	
1. Nov.	0,1244	1,1°	
2. Nov.	0,1245	1,0	im Mittel: $k = 0{,}1252$ für $T = 1{,}20^0$.
6. Dec.	0,1262	1,3	
7. Dec.	0,1257	1,4	

Datum	k	T	
3. Nov.	0,2427	18,8°	im Mittel: $k = 0{,}2421$ für $T = 18{,}55°$.
4. Nov.	0,2443	18,9	
8. Dec.	0,2413	18,5	
10. Dec.	0,2400	18,0	
7. Nov.	0,4128	44,4°	im Mittel: $k = 0{,}4146$ für $T = 44{,}70°$.
8. Nov.	0,4163	45,2	
11. Dec.	0,4101	44,1	
12. Dec.	0,4194	45,1	

Aus diesen Resultaten geht hervor, dass die Diffusionsgrösse k innerhalb des Temperaturintervalles 0° bis 45° in nahezu linearer Weise mit der Temperatur wächst; den Beobachtungen entspricht ziemlich gut die Relation

$$k = 0{,}1187\,[1 + 0{,}0557 \cdot t].$$

Für die Temperatur 9,5° ergibt diese Beziehung den Werth: $k = 0{,}1815$; die nach der ersten Versuchsmethode bei dieser Temperatur ausgeführte Versuchsreihe ergab 0,1849.

Einfluss der Höhe der Concentration auf die Diffusionsgrösse k.

In Fick's Elementargesetz der Hydrodiffusion ist die Hypothese enthalten, dass die Diffusionsgrösse k unabhängig ist von der Höhe der Concentration.

Eine nähere Analyse der von uns benutzten Versuchsverfahren lässt erkennen, dass beide Versuchsmethoden nur dann geeignet sind, einen sichern Entscheid für oder wider diese Hypothese geben zu können, falls der Reihe nach Lösungen mit möglichst verschiedenen anfänglichen Concentrationen auf den Diffusionsverlauf untersucht werden. Ist (wie zu erwarten ist, falls diese Abhängigkeit überhaupt besteht) die Abhängigkeit der Diffusionsgrösse k von der Höhe der Concentration nur eine sehr geringe, so lässt sich diese Abhängigkeit aus dem Verlaufe einer und derselben Beobachtungsreihe wegen der zu geringen darin betheiligten Concentrationsdifferenzen auch bei den feinsten Ablesungen kaum erkennen. Zur Prüfung der besprochenen Hypothese habe ich die Diffusionsgrösse für zwei Lösungen mit den erheblich verschiedenen anfänglichen Concentrationen $z_0 = 0{,}214$ und $z_1 = 0{,}318$ wiederholt nach der zweiten Versuchsmethode bei Zimmertemperatur ermittelt. Die gefundenen Werthe enthalten die beiden folgenden Tabellen.

Lösung mit der Concentration 0,214.

		T	k
14. Nov.		18,0°	0,2399
17. Nov.		19,0	0,2435
18. Nov.		17,6	0,2397
21. Dec.		18,8	0,2428
23. Dec.		17,1	0,2384
27. Dec.		16,9	0,2377
	Mittel:	17,9°	0,2403

Lösung mit der Concentration 0,318.

		T	k
10. Nov.		18,1°	0,2297
11. Nov.		18,9	0,2331
12. Nov.		18,1	0,2288
20. Dec.		17,9	0,2306
22. Dec.		17,3	0,2248
24. Dec.		17,8	0,2264
	Mittel:	18,0°	0,2289

Daraus ergibt sich, dass die Diffusionsgrösse k nicht unabhängig von der Concentration ist, sondern mit steigender Concentration sehr langsam abnimmt.

In der Theorie der Diffusion ist also das Fick'sche Elementargesetz in derselben Weise zu corrigiren wie in der Theorie der Wärmeleitung das von Fourier aufgestellte Elementargesetz; wie dort die Grösse der inneren Wärmeleitung langsam mit steigender Temperatur abnimmt, so sinkt hier die Diffusionsgrösse mit wachsender Concentration allmählich auf kleinere Werthe. Fick's Hypothese gibt den Verlauf der Diffusion nur in einer ähnlich grossen Genauigkeit wieder, mit welcher Fourier's Elementargesetz den Vorgang der Wärmeleitung in starren Substanzen darstellt.

Anhang.

Bemerkungen über die sogenannten unpolarisirbaren Elektroden.

Dubois-Reymond constatirte 1859, dass die Polarisation amalgamirter Zinkelektroden in wässeriger Zinksulphatlösung bei Anwendung ausserordentlich schwacher polarisirender Ströme verschwindend

klein, jedenfalls ungleich kleiner ist als die irgend einer anderen Combination. Er glaubte die Combination: Amalgamirte Zinkelektroden in Zinksulphatlösung als „unpolarisirbar“ bezeichnen zu dürfen.

Diese Versuche wurden bisher fast ausnahmslos von Allen, die darüber berichten, irrig aufgefasst. Obschon aus Dubois-Reymond's Berichten bis zur Evidenz hervorgeht, dass diese Unpolarisirbarkeit nur bei äusserst schwachen polarisirenden Strömen angenähert besteht und mit zunehmender Stromstärke vollständig verloren geht, herrscht seit jener Zeit in der galvanischen Literatur die falsche Meinung: Amalgamirte Zinkelektroden in Zinksulphatlösung sind unpolarisirbar.

Die zweite der von mir benutzten Diffusionsmethoden legt in der schlagendsten Weise die ganz erhebliche Polarisirbarkeit dieser Combination dar. Es besteht nicht allein nachweisbare Polarisirbarkeit, sondern es lässt sich sogar auf diese Polarisirbarkeit die schärfste und bequemste Messungsmethode für den Verlauf der Diffusion gründen. Zu gleicher Zeit deckt diese Messungsmethode die Genesis dieser Polarisirung mit aller nur wünschbaren Klarheit auf. Die Polarisirung der Zinkelektroden ist nicht Folge der elektrolytischen Vorgänge an den Elektroden (der Gasausscheidung), sondern die Folge der durch die Wanderung der Ionen bedingten Aenderungen der Concentrationen in den die Elektroden berührenden Schichten zur Zinksulphatlösung.

Die Richtigkeit dieser Behauptungen habe ich schon vor etwa 6 Jahren im Berliner Laboratorium in einer ganz anderen Weise durch folgenden einfachen Versuch dargelegt. Zwei amalgamirte Zinkelektroden werden in einer Zinksulphatlösung nicht vertical einander gegenüber gestellt, sondern horizontal über einander gelagert. Es wird ein polarisirender Strom während einer kurzen Zeit durch die Combination geleitet und hierauf die Combination in den Kreis eines empfindlichen Galvanometers eingeschaltet. Es zeigt sich erstens die Combination bei allen, auch den schwächsten, polarisirenden Stromstärken und bei allen, auch den kürzesten, Durchströmungszeiten stets so polarisirt, dass der erzeugte Polarisationsstrom die entgegengesetzte Richtung des polarisirenden besitzt. Ferner ist die Grösse der erzeugten Polarisation eine ganz verschiedene, je nach der Richtung des polarisirenden Stromes: durchläuft der polarisirende Strom die Combination während einer gewissen Zeit in der Richtung von unten nach oben, so fällt die erzeugte elektromoto-

rische Kraft der Polarisation (gemessen durch die Grösse des Galvanometerausschlages) fünf bis sieben Mal so gross aus als in dem Falle, wo derselbe polarisirende Strom während derselben Zeit in der entgegengesetzten Richtung die Combination durchzieht. In dem ersteren Falle werden die von dem polarisirenden Strome an den Elektroden erzeugten Aenderungen der Concentration (an der unteren eine Concentrirung, an der oberen eine Verdünnung) nur ausserordentlich wenig durch die Diffusion verkleinert; in dem letzteren Falle zerstört dagegen die Wirkung der Schwere die durch den Stromdurchgang an den Elektroden erzeugten Concentrationsänderungen der Zinksulphatlösung fast vollständig.

Fortsetzung der Bezugsquellen-Liste.

Bezeichnung der Firma.	Fabrikate und Angabe der Specialität.
Hartmann, Eugen, Würzburg.	Physikalische u. astronom. Instrumente.
Hartnack, Dr. E., Potsdam.	Mikroskope.
Hasler & Escher, Bern.	Meteorologische Registrir-Instrumente.
Heller, Mechan. Werkstätte, Nürnberg.	Phys. Apparate für Vorlesungszwecke.
Hilger, Hermann, Frankfurt a. M.	Mechanische und optische Instrumente, Spec. Interferenz- u. Beugungsgitter.
Hipp, Neufchâtel.	Chronoskope, elektro-magnetische Registrirapparate etc.
Hofmann, Dr. J. G., 29 rue Bertrand, Paris.	Optische Instrumente, Spectroskope, Kalkspathapparate.
Houdek Dr.,&Hervert, Prag, Karpfengasse.	Egger'sche elektro-magnetische Motoren.
Jung, Mechaniker, Heidelberg.	Lippmann's Capillar-Elektrometer.
Kappeller, Heinr., jun., Wien V, Kettenbrückengasse 9.	Glasinstrumente.
König, Rudolph, Paris.	Akustische Apparate.
Ladd, W. & Co., Scientific Instrument Manufacturers, 11 u. 12, Beak Street, Regent Street, London W.	Magnet-elektrische Maschinen.
Leppin & Masche, Berlin S., alte Jacobsstrasse 83.	Physikalische Apparate.
Lessing, Dr., Nürnberg.	Fabrik galvanischer Kohlen.
Lorenz, G., Mech. Werkstätten, Chemnitz.	Apparate zu Weinhold's Vorschule der Experimentalphysik.
Maison des inventions nouvelles, 66, rue basse du Rempart, boulevard de la Madeleine, Paris.	Megaskopes Lefèvre.
Merz, G. & S., München, Müllerstr. 11.	Optische und astronomische Instrumente.
Miller, F., Innsbruck.	Physikalische Apparate.
Oertling, Aug., Mechaniker, Berlin, Oranienburgerstrasse 58.	Mineralogische, optische u. nautische Instrumente.
Prazmowski, A., rue Bonaparte I, Paris.	Optische Instrumente.
Riefler, Clemens, Maria Rain u. München, Karlsplatz 29.	Reisszeuge.
Schneider, E., Währing b. Wien.	Physikalische Präcisionsinstrumente.
Schuchardt, Dr. Theodor, Fabrik chem.-techn. Produkte, Görlitz.	Fluorescirende und phosphorescirende Präparate.
Schuckert, Sigmund, Mechan. Werkstätte, Nürnberg.	Dynamo-elektrische Maschinen für Galvanoplastik.
Siemens & Halske, Berlin, Markgrafenstrasse 94.	Elektrische Messinstrumente.
Steeg, W. & Reiter, Homburg v. d. Höhe.	Optische Instrumente zur Polarisation des Lichtes.
Steinheil, C. A. & Söhne, München, Landwehrstrasse 31.	Optische und astronomische Instrumente.
Stöhrer, E., jun., Leipzig.	Apparate für Projection phys. Versuche.
Stollnreuther, C. & Sohn, München.	Physikalische Instrumente.
Süss, F., Universitäts-Mechaniker, Marburg, Hessen.	Mikrotome.
Vogel, C. & J., Berlin, Ritterstrasse.	Uebersponnene Drähte.
Weisser, J. G., Söhne, St. Georgen (bad. Schwarzwald).	Drehbänke für physikal. Laboratorien.
Wesselhöft, Mechaniker, Halle a. d. Saale.	Elektrische und akustische Apparate.
Westphal, G., Celle, Hannover.	Physikalisch-chemische Waagen.

REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE & ASTRONOMISCHE INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN.

FÜNFZEHNTER BAND.

Inhalt des 10. Heftes.

MÜNCHEN, 1879.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Bei Correspondenzen, Bestellungen etc. an die hier anzeigenden Firmen bitten wir das Repertorium für Experimental-Physik gefl. als Quelle zu nennen.

Ueber die Dämpfung der Torsionsschwingungen von Drähten.

Von

W. Braun und **A. Kurz**

in Augsburg.

§. 1. Dieser Titel der Abhandlung von Streintz in Pogg. Ann. Bd. 153 würde auch diejenige von P. M. Schmidt „Ueber die innere Reibung fester Körper" in Wiedemann's Annalen Bd. 8 besser charakterisiren. Denn auch abgesehen davon, wieviel man bei der Torsionsdämpfung der inneren Reibung als Ursache zuschreiben kann oder darf, ist die letztere ein viel allgemeinerer Begriff, während Schmidt auch nur die Torsionsschwingungen von Drähten experimentell untersuchte.

Diese letztere Arbeit bildete den nächstliegenden Ausgangspunkt für unsere mit Anfang des letzten Wintersemesters begonnenen Versuche, welche (neben anderen Arbeiten) vermuthlich auch noch fortgesetzt werden. Die früheren, mit dem Namen W. Weber (Pogg. Ann. Bd. 34. 1835) beginnenden, Arbeiten verschiedener Physiker[1]) über die elastische Nachwirkung hatten schon viel länger unser Interesse beschäftigt, welches seither durch eigene Messungen in begreiflicher Weise gesteigert wurde.

§. 2. Um die Ideen für das Folgende gleich zu fixiren, kann

$$y = a \cdot e^{-\alpha t} \sin 2\pi \cdot \frac{t - t_0}{T} \qquad (I$$

die Schwingung mit Abnahme der Schwingungsbögen in geometrischer Reihe vorstellen; oder man setze zum Gebrauche der gewöhnlichen Logarithmen die Basis 10 statt e, und erhält dann nach m und n ganzen Schwingungen die Amplituden $a_m = a \cdot 10^{-\varepsilon m}$ und $a_n = a \cdot 10^{-\varepsilon n}$, woraus das constante logarithmische Decrement[2])

1) Eine umfassende Literaturangabe bis zum Jahre 1876 bei Schmidt a. a. O.

2) Im Folgenden ist immer dieses logarithmische Decrement gemeint und meist bloss Decrement genannt.

$$\varepsilon = \frac{\log a_m - \log a_n}{n - m} \tag{II}$$

sich ergibt und wozu also nur die Messung irgend zweier Amplituden und die Kenntniss der dazwischen abgelaufenen Schwingungszahl erforderlich ist.

Es genügt fürderhin nicht mehr von einer Abnahme der Amplituden zu sprechen; diese ist ja bei derartigen Untersuchungen selbstverständlich; sondern auf das Decrement kommt es an, ob dieses constant, oder ob dasselbe auch einer Abnahme unterworfen ist, was also eine raschere Abnahme der Amplituden bedeutet als nach der geometrischen Reihe; oder im Allgemeinen es frägt sich, wie das logarithmische Decrement variirt.

§. 3. Als dämpfende Ursache müsste zu den in Nr. 1 genannten auch noch die Luftreibung erwähnt werden, sofern diese nicht, wie es wohl bei der Mehrzahl aller bisherigen Versuche der Fall ist, als unbedeutend ausser Acht fällt. Der Luftwiderstand wird bei solch langsamen Bewegungen bekanntlich proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit gesetzt und kommt also noch das Glied $B\frac{dy}{dt}$ zur gewöhnlichen Pendelgleichung, so dass

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ay + B\frac{dy}{dt} = 0 \tag{III}$$

und das Integral derselben die in §. 2 angegebene Gleichung I wird. (Vgl. u. A. Streintz, Pogg. Ann. 153 S. 397; Cornu und Baille, Comptes Rendus T. 86 p. 571.)

Schmidt hebt (a. a. O. S. 56) hervor, dass der Einfluss der Luftreibung nicht ausser Acht gelassen werden dürfe. Aber er berechnet das logarithmische Decrement der Luftreibung allein nach der einer theoretischen Abhandlung Lampe's entnommenen Formel (S. 55) und findet z. B. als erste numerische Angabe S. 58 und 59 dafür die Zahl 0,00001 (mit noch drei weiteren Decimalen) bei einer englischen Claviersaite von 153 cm Länge und 0,09 Dicke, bei welcher er in den ersten vier Tagen, nachdem sie von der Rolle abgenommen und durch ein Gewicht von nahe $4\frac{1}{2}$ kgr gespannt worden, die abnehmenden Decremente

0,00070 64 61 59 58 57 55

beobachtete. Bei dieser Wiedergabe denke man sich 0,000 wieder-

holt; ferner wurden je zwei weitere Zifferstellen am Ende weggelassen, weil die mit diesen Messungsresultaten beabsichtigte Darlegung der Abnahme des Decrementes in vier auf einander folgenden Tagen sich schon in der vierten und fünften Decimalstelle offenbart, welchen gegenüber die zwei weiteren Stellen, auch wenn sie wirklich strenge angebbar sind, keine Bedeutung haben. Auch das vorhin mit 0,00001 der Lampe'schen Formel entnommene Decrement der Luftreibung allein beträgt von jenen Zahlen noch keine 2 Procente.

§. 4. Ist, um das vorige Zahlenbeispiel noch weiter zu benutzen, das Decrement 0,00055 constant geworden, so dass dieser Werth bei der gehörigen Vorsicht auch am fünften und an den weiter folgenden Tagen zum Vorschein käme, und ist nöthigen Falles das der Luftreibung allein zukommende Decrement von 0,00055 subtrahirt, so hätte man das der inneren Reibung allein zuzuschreibende Decrement vor sich. (S. 58 a. a. O.)

An derselben Stelle erklärt Schmidt die obige Annahme des Decrementes von relativ 70 zu 55 innerhalb vier Tagen auf eine Weise, die wenigstens uns nicht sehr deutlich zu sein schien. Es ist wie bei dem Beispiel in §. 3 die Rede von einem Draht, der auf eine Rolle aufgewickelt war und nun durch ein Gewicht gespannt wird; „dadurch werden die Moleküle des Drahtes gezwungen sich eine neue Ruhelage zu bilden. Wenn sich auch die äussere Form des Drahtes der neuen Gleichgewichtslage angepasst hat, so gehen im Innern immer noch molekulare Bewegungen vor sich“ u. s. w. Hierauf ist zu bemerken, dass der Beobachter mit Spiegel, Scala und Fernrohr gerade die äussere Form und nicht die inneren Bewegungen controlirt, oder die letzteren nur in so fern, als sie sich in der äusseren Gleichgewichtslage zu einem Gesammtbilde vereinigen.

Dass diese Gleichgewichtslage in einer mit der Anhängung des Gewichtes beginnenden Wanderung begriffen ist, und zwar entsprechend der noch fortdauernden Abwicklung des spiralförmig gewundenen Drahtes, davon sagt Schmidt nichts an dieser Stelle; einzig auf S. 63 findet man diesen Umstand gelegentlich erwähnt. Wir haben bald nach unsern Erstlingsversuchen die jeweiligen Lagen des Nullpunktes der Schwingungen in unsern Tabellen registrirt. Man kann auch zur Beachtung desselben durch die Einfachheit und Unmittelbarkeit dieses Beobachtungselementes, das überdies bei der Be-

rechnung der Amplituden auf dem Wege liegt, veranlasst werden. Das Uebrige siehe a. a. O.

Wenn im Zahlenbeispiel des §. 3 das Decrement 0,00064 am betreffenden Tage anhält, d. h. constant bleibt, und erst nach einigen Tagen auf 0,00055 herabsinkt, so heisst dies gemäss dem Eingange des §. 4, dass an jenem Tage der innere Widerstand ein grösserer ist als an den folgenden (siehe Schmidt), und es liegt nahe, diese Vergrösserung des Widerstandes mit der Wanderung des Nullpunktes in Beziehung zu bringen.

Immerhin ist auch der durch 0,00064 ausgedrückte Widerstand noch proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit, wie es zur Constanz des Decrementes gemäss §. 2 und 3 erforderlich ist.

Als kurze Bezeichnung für die öfter zu nennende Ursache der Abnahme des logarithmischen Decrementes in successiven Tagen wählt Schmidt den Ausdruck „Nachwirkungsdeformationen", und wir wollen gleich beisetzen erster Art.

§. 5. Dieser Beisatz dünkt uns zur Aufklärung erspriesslich, wie sogleich gezeigt werden soll. Im vorigen Beispiele war das Decrement von der Amplitude unabhängig. §. 5 der Abhandlung von Schmidt S. 241 bis 256 behandelt alsdann die „Abhängigkeit des logarithmischen Decrementes von der Amplitude". Es werden da mehrere Versuchsresultate mitgetheilt, denen gemäss das Decrement in einer und derselben Schwingungsreihe merklich abnahm; so dass man also auch im Zusammenhalte mit §. 4 auf den Begriff des Grenzwinkels geleitet wird, der also zu verstehen ist, dass bei kleineren oder grösseren Amplituden, als der Grenzwinkel besagt, das Decrement in einer und derselben Schwingungsreihe bzw. constant ist oder abnimmt. (Ersteres gemäss §. 3 und 4, abgesehen davon, ob morgen oder später nicht doch eine Abnahme des Decrementes zu bemerken sein wird.)

Die Ursache dieser Abnahme des Decrementes innerhalb derselben Schwingungsreihe nun bezeichnet Schmidt mit demselben Worte „Nachwirkungsdeformationen", und wir wollen gleich beisetzen zweiter Art; S. 251 ist wohl noch der schon besagte Unterschied in der äusseren Erscheinung der beiderlei Arten berührt; alsdann folgt die Erklärung der zweiten Art „ganz ähnlich" wie bei der ersten Art; S. 252 und 255 aber werden beide Ursachen als „identisch" proclamirt.

Wenn sie dies wären, so wäre die einerlei Benennung für zweierlei Erscheinungen gewiss berechtigt.

§. 6. Zu den obigen Gleichungen I. II. III der ersten Art in §. 4 können wir noch beisetzen

$$d\varphi = -\varepsilon \cdot \varphi \tag{IV}$$

als Gesetz der Abnahme der variablen Amplitude φ mit dem constanten logarithmischen Decrement ε; der Widerstand ist dabei proportional der ersten Potenz der Geschwindigkeit gesetzt worden (vgl. S. 248 a. a. O.), und die Kraft ist proportional der ersten Potenz der Ausbeugung (siehe Gleichung III).

Nun zur zweiten Art: da setzt Schmidt nach Gronau und O. E. Meyer[1]) (siehe Pogg. Ann. Bd. 142 S. 513 u. f.)

$$d\varphi = -\varepsilon\varphi \cdot (1 + \beta\varphi) \tag{V}$$

und fügt bei, dass der Widerstand die zweite Potenz der Geschwindigkeit enthält.

Das ist also doch schon eine ursächliche Verschiedenheit zwischen der ersten und zweiten Art, entsprechend der in der Erscheinung resp. Messung auftretenden Verschiedenheit. Dies zusammenfassend mit einer zweiten Abhandlung von Cornu und Baille (in dem in §. 3 angeführten Bande S. 1001 u. f.) schreiben wir statt der obigen Gleichung III

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ay + B\frac{dy}{dt} + A'y^2 + B'\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 0, \tag{VI}$$

so dass jetzt das Widerstandsgesetz und das Kraftgesetz andere sind als bei der ersten Art, resp. die zweite Potenz der Geschwindigkeit sowohl als der Ausbeugung hinzukommen.

Lassen wir jedoch Weiteres hierüber vorläufig auf sich beruhen; diese Verschiedenheit mag schwinden als nur in einer fast stetigen Gradation beruhend, wie ja auch der Widerstand des Mittels als Function der Geschwindigkeit v mit $(av + bv^2)$ geschrieben wird und je nach grossen oder kleinen v das erste Glied kleiner oder grösser als das zweite aufweist.

1) Den Herren Professoren Meyer und Gscheidlen sei bei dieser Gelegenheit für die gefällige Vermittlung des von Ersterem angegebenen und von Herrn Universitäts-Mechanikus Pinzger in Breslau gefertigten Apparates (s. Abh. von Schmidt) der geziemende Dank gesagt.



§. 7. Schmidt sucht vielmehr die von ihm behauptete Identität der beiden Arten von Nachwirkungen in der auf Gauss zurückzuführenden Formel

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{a}{b+t}, \qquad \text{(VII}$$

welche Schmidt von den Längenänderungen durch spannendes Gewicht (bei W. Weber a. a. O.) auf die Abnahme des obigen Decrementes ε überträgt und wobei ε_0 den Grenzwerth desselben in der Zeit t unendlich und a und b Constante vorstellen.

Weil die beiderlei Nachwirkungsdeformationen, resp. die Abnahme des Decrementes in successiven Tagen und diejenige in ein und derselben Schwingungsreihe (bei Ueberschreitung des Grenzwinkels) sich in die nämliche empirische Formel einordnen lassen, darum seien es zwei identische Arten von Nachwirkungsdeformationen. Dass hieraus kein Schluss in Bezug auf die Wesenheit der Ursachen gezogen werden kann, braucht nach dem Vorigen nicht mehr weiter erörtert zu werden.

Nur anhänglich sei noch bemerkt, dass auch die Motivirung, mittelst welcher Schmidt S. 62 zu VII gelangt, auf einer Verwechslung der Zug- oder gewöhnlichen mit der Schub- oder Torsionselasticität[1]) beruht, die so schlechterdings nicht anginge, wenn nicht VII als empirische Formel auf beide und auf noch viel andere Dinge gleich gut passen würde.

§. 8. Von jetzt ab soll das lange Wort „Nachwirkungsdeformationen“ wegbleiben und wir sprechen kürzer nur von Nachwirkung erster und zweiter Art: die erste lässt das jetzt constant auftretende Decrement später kleiner werden, die zweite lässt das Decrement jetzt schon abnehmen und führte uns auf den Grenzwinkel, innerhalb dessen die Amplituden nach der geometrischen Reihe oder also mit constantem Decremente abnehmen.

Die fortschreitende Wanderung des Nullpunkts der Schwingungen bei der Nachwirkung erster Art wurde oben im §. 4 erwähnt. Ausser dieser sichtbaren Wanderung kann man noch nach dem ersten Vorgange Weber's (a. a. O.) an eine hypothetische oscillatorische Wanderung des Nullpunktes denken. Aber Weber benutzte diese Hypothese einer Nachwirkung im Allgemeinen da, wo wir mit Schmidt

1) S. u. A. hierüber eine gedrängte Darstellung in A. Kurz, Taschenbuch der Festigkeitslehre. Berlin, Ernst & Korn. 1877.

an die innere Reibung denken, nämlich zur Erklärung des constanten logarithmischen Decrementes; mag nun die innere Reibung allein stehen resp. stark genug überwiegen, oder mag sie durch eine Nachwirkung erster Art (s. §. 4) minder und mehr merklich erhöht sein.

Dagegen würde uns die oscillatorische Wanderung auf die Nachwirkung zweiter Art führen, die bei einer den Grenzwinkel überschreitenden Amplitude durch sofortige Abnahme des Decrementes sich kundgab. Schwingt nämlich das Torsionspendel nach rechts, so würde in Folge der Nachwirkung die Ruhelage nach dieser Seite hin verdreht und ein Rest dieser Verdrehung noch vorhanden sein, wenn das Pendel die Ruhelage passirt; analog wenn das Pendel nach links schwingt u. s. w. Der Nullpunkt würde also eine kleine oscillatorische Bewegung vollführen von derselben Periode wie die Pendelschwingung selbst, und zwar in dem Sinne, dass er die Amplituden der letzteren ebenfalls verkleinerte, wie dies schon die Reibung thut. Wenn eine solche hypothetische Wanderung wirklich oder in merklicher Stärke existirt, so muss also daraus eine Dämpfung hervorgehen, welche zu der bei constantem Decremente stattfindenden noch hinzukommt.

Von Interesse wird es da sein, die im §. 6 angegebene Gleichung VI resp. die von Cornu und Baille a. a. O. integrirte und discutirte Gleichung noch weiter zu verfolgen als uns bisher möglich war; daselbst ist $B' = 0$ und wird auch bei der Integration das Quadrat von B vernachlässigt; das dort angegebene Integral ist wirklich die Superposition zweier Bewegungen: die erste derselben ist die Schwingung mit constantem Decrement; die zweite le déplacement périodique de cette position d'équilibre considérée comme mobile par le fait de la perturbation (Nachwirkung zweiter Art). La période de ce déplacement est en réalité la moitié de celle du premier mouvement u. s. w.

§. 9. Um nun zu unsern eigenen Messungen überzugehen, so ergab sich bei unsern Vorversuchen mit einem Neusilberdraht, dass die Nachwirkung zweiter Art bis zu einem sehr kleinen Grenzwinkel herab sich geltend machte, und dass also die Beobachtung innerhalb desselben nach der gewöhnlichen Methode wegen der langsamen Abnahme der Amplituden mit zu grossen unvermeidlichen Fehlern behaftet gewesen wäre. Denn sehr kleine Amplituden sind unsicher wegen der dieselben jeweils überragenden unvermeidlichen Erschütterungen (des Gebäudes etc.); also dass entsprechend niedrige Grenz-

winkel überhaupt nur sehr schwierig oder gar nicht auffindbar sein werden. Wir beobachteten daher später nach einer Methode, deren Wesen wir füglich durch die Bezeichnung Coincidenzenmethode charakterisiren können. Wir schrieben nämlich nur die Nummern solcher Schwingungen auf, bei welchen der Umkehrpunkt des Pendels mit einem Theilstrich zusammenfiel, so dass wir des Schätzens der Bruchtheile enthoben waren, beobachteten jeweils mindestens drei successive Coincidenzpunkte a, b, c und berechneten Nullpunkt, Amplitude und Zeit für den mittleren derselben b. Daher finden sich in unsern Tabellen auch gebrochene Schwingungszahlen aufgeführt, welche stets andeuten, dass die betreffenden Umkehrpunkte nicht genau mit den bezüglichen Theilstrichen coincidirten. Bei sehr kleinen Amplituden kam es wohl vor, dass mehrere auf einander folgende Umkehrpunkte mit einem Theilstrich coincidirten, in welchem Falle wir das Mittel aus der ersten und letzten betreffenden Schwingungszahl als den wahren Zeitpunkt für die Coincidenz notirten. Da wir Grund hatten mit den auf diese Weise erhaltenen Zahlen zufrieden zu sein, so wandten wir diese Methode in der Folge auch bei grösseren Amplituden an, und haben erst bei der Untersuchung des Messingdrahtes (s. unten im §. 16) Veranlassung genommen, einen anderen Weg einzuschlagen.

Bezüglich des Beobachtungs- und Messungsapparates ist nachträglich nur ein Ablesefernrohr mit Scala zu nennen und eine einfache Aufhängevorrichtung für den Draht, deren oberer Theil drehbar, so dass der am Gewichte angebrachte kleine Spiegel dem Fernrohr zugewendet werden kann. Das Gewicht kugelförmig oder cylindrisch, zur Verminderung der Luftreibung; ein Kasten schützt vor Störung durch Luftströmung und ist auf der dem Fernrohr zugewendeten Seite mit einer Spiegelglasplatte versehen, welche zur Bequemlichkeit auch als Thüre dienen kann. Zur Anregung der Torsionsschwingungen dient eine durch Zahnstange und Getriebe verstellbare Schale, auf welcher jeweils das Gewicht ruht, um von der Hand eine kleine Drehung zu erfahren, worauf es alsdann wieder frei gelassen wird.

§. 10. Der Kupferdraht, den wir ausschliesslich nach der im vorigen Paragraphen beschriebenen Methode beobachteten, zeigte gleich dem Neusilberdraht eine so starke Abhängigkeit des Decrementes von der Amplitude, dass wir einen Grenzwinkel nicht nachweisen konnten, wenn man sich nicht wegen des Einflusses der Temperatur,

der sich bei unsern (wahrscheinlich überhaupt unter gewöhnlichen) Verhältnissen mindestens in der dritten Ziffernstelle des Decrementes geltend machen dürfte, mit zwei Stellen begnügen will. In letzterem Falle würde der Grenzwinkel für unsern Kupferdraht bei der Länge von 245 cm gemäss Tab. I etwa 21 Min. betragen. Diese Tabelle enthält in der 1. Columne die Zimmertemperatur nach Cels., in der 2. die Anzahl (N) der verflossenen Schwingungen, in der 3. den jeweiligen Nullpunkt (nach einer Centimetertheilung), in der 4. die Amplitude in Centimeter, in der 5. diejenige Amplitude (S), für welche das in Col. 6 befindliche Decrement gilt. Um den Fehler des letzteren möglichst herabzudrücken, wurde es für grosse Intervalle berechnet, und zwar ist in der vorliegenden Tabelle die letzte Amplitude mit allen vorhergehenden combinirt, so dass der kleinste Divisor (in §. 2. II mit $n-m$ bezeichnet) 913 wird. Die zu jedem Decrement gehörige Amplitude ergibt sich offenbar annähernd als geometrisches Mittel aus den beiden Amplituden, die zur Berechnung des Decrementes gewählt wurden.

Tabelle I.

Kupferdraht, weich, 1 mm dick. (14. Dec. 1878.)
Länge des Drahtes 245 cm. Schwingungsdauer 11,64 Sec. Entfernung des Spiegels von der Scala 80 cm.

Temperatur (C.)	N	Nullpunkt	Ampl. cm	S	Log. Decr.
20,5°	5½	29,726	3,474	1,18	0,0008317
20,5	35½	29,727	3,273	1,15	8308
20,5	57	29,731	3,131	1,13	8295
20	145½	29,774	2,626	1,03	8265
20	173½	29,785	2,485	1,00	8256
20	213½	29,799	2,299	0,96	8248
17	1126½	29,994	0,406		

Einen zweiten Beleg für die Stärke der Nachwirkung zweiter Art bei unserm Kupferdraht möge die Tab. II bieten. Dieselbe lässt noch entschiedener als die Tab. I erkennen, dass der Grenzwinkel bei einer Amplitude von 1,37 cm = 32 Min. (circa) überschritten ist, was natürlich bei der kleineren Drahtlänge (180 cm) nicht zu verwundern ist.

Tabelle II.

Draht wie in Tab. I. (14. Jan.)
Länge des Drahtes 180^{cm}. Schwingungsdauer 10,00 Sec. Entfernung der Scala vom Spiegel $75,1^{cm}$.

Zeit	Decremente	Amplituden
12h 7′ 4″	0,000872	$1,85^{cm}$
12h 7′ 34″	862	
12h 7′ 51″	864	
12h 8′ 36″	855	
12h 16′ 13″	856	
12h 24′ 58″	845	
12h 25′ 46″	844	
12h 31′ 21″	838	
12h 32′ 38″	836	$1,37^{cm}$

§. 11. Um die Abnahme des Decrementes in auf einander folgenden Tagen (also in Folge des Verschwindens der Nachwirkung erster Art) zu illustriren, wurde Tab. III zusammengestellt. Dieselbe enthält in der 1. Columne das Datum, in der 2. die Amplitude, die aber nur für die Länge von 255^{cm} wegen der hier vorkommenden grösseren Amplituden in Bogenminuten umgerechnet sind, in der 3. die Zimmertemperatur, soweit sie abgelesen wurde, und in der 4. dasjenige Decrement, welches für die in Col. 2 stehende Amplitude nach den obigen Erläuterungen berechnet wurde. Man ersieht aus der Tabelle, dass der am 30. November aufgehängte Draht bereits am 11. December so ziemlich von der Nachwirkung erster Art befreit war. Die Abnahme des Decrementes, wiewohl durch die besagte unvermeidliche Abhängigkeit von der Amplitude jeweils etwas verdeckt, tritt doch deutlich genug hervor. Der am 7. December gefundene, etwas auffallende Werth kann sehr wohl den thatsächlichen Verhältnissen entsprechen; denn man kann nicht a priori die Annahme zurückweisen, dass der Draht sich an einem oder dem andern Tag unter merklich grösseren (inneren) Erschütterungen (s. oben Wanderung des Nullpunktes §. 4) abgewickelt habe.

Tabelle III.

Draht wie in Tab. I und II. 1 Scalentheil = 5,185 mm. Entfernung der Scala vom Spiegel 75 cm.

Datum	Ampl. in Bg.-Min.	Temper. in Cels.	Decremente	Datum	Ampl. in Sc.-Th.	Temper. in Cels.	Decremente
Länge des Drahtes 255 cm.				Länge 180 cm.			
30. Nov. Vorm.	183	—	0,00148	8. Jan.	2,89	—	0,00090
„ Nachm.	145,5		132	9. Jan.	4,32	—	89
3. Dec.	6,15	—	101	10. Jan.	5,21	—	86
4. Dec.	102,5	18°	105	14. Jan.	3,26	—	86
5. Dec.	98	—	101				
6. Dec. Vorm.	43	19	089	Länge 116 cm.			
„ Nachm.	48	—	090	15. Jan.	1,42	—	0,00089
7. Dec.	30	22	098	16. Jan.	1,07	—	82
10. Dec.	13,7	20	088	18. Jan.	7,57	20½°	95
11. Dec.	30	18½	085	20. Jan.	1,56	—	74
12. Dec.	30	22	085	21. Jan.	1,96	—	75
13. Dec.	64	22½	087				
14. Dec.	62	20½	086	Länge 54½ cm.			
18. Dec.	46	18	087	24. Jan.	1,68	—	0,00070
20. Dec.	36	20½	085	25. Jan.	5,91	18°	79

§. 12. Die Tab. III zeigt uns auch eine Abhängigkeit des logarithmischen Decrementes von der Länge des Drahtes; dass nämlich bei kleineren Längen eine solche existirt, und zwar in dem Sinne, dass das logarithmische Decrement mit der Länge abnimmt (vgl. dagegen Tab. V). Dass bei grösserer Länge eine solche Abhängigkeit nicht mehr wohl existiren kann, ist schon a priori einleuchtend; denn bei sehr langen Drähten wird offenbar das obere Stück an der Torsion gar nicht mehr betheiligt, so wenig wie das Wasser der Meerestiefe an den Wellen der Oberfläche. Aus diesem Grunde können wir auch der von Schmidt (a. a. O. S. 260) aufgestellten Formel[1]) keinen anderen Werth beilegen als den einer empirischen, welche nur in engen Grenzen Giltigkeit hat.

Zum Verständniss der Zahlen in Tab. III sei nur noch erwähnt, dass die Verkürzung des Drahtes unvermeidliche Nachwirkungen erster

1) $\varepsilon = \frac{c_1}{\sqrt{L}} + c_2 \sqrt{L}$, wo c_1 und c_2 Constante, ε das logarithmische Decrement, L die Drahtlänge bezeichnen sollen.

Art verursachte, welche für die folgenden Tage eine Erhöhung des Decrementes zur Folge hatten.

§. 13. Vom 28. Januar an untersuchten wir einen harten Messingdraht, und zwar anfangs nach der in §. 9 erläuterten Methode. Dieser unterschied sich in allen Stücken wesentlich vom Kupferdraht; fürs erste zeigte er eine grosse Empfindlichkeit gegen Temperaturschwankungen, was aus folgender Tabelle ersichtlich werden soll.

Tabelle IV.

Messingdraht, hart, 0,8 mm dick. (29. Jan.)
Länge des Drahtes 246 cm. Temperatur von 17 bis 19° C. steigend. Schwingungsdauer 13,024 Sec. Entfernung des Spiegels von der Scala 74½ cm. 1 Scalentheil = 5,185 mm.

	N	Nullp.	Ampl. Scalenth.	Combin.	N'	Decrement	S
A	2	15,012	5,412	A u. E	64¾	0,000517	5,02
B	6	14	386	B u. F	68¾	516	
C	17	18	318	C u. F	74¼	517	
D	23	21	279	B u. G	75½	517	
				C u. G	81	519	
E	127½	15,061	4,661	D u. H	86½	519	
F	131½	60	640				
G	145	64	564	E u. I	251¾	518	4,02
H	150	65	535	F u. K	257¼	518	
				G u. K	264	518	
I	376	15,135	3,465	F u. L	266½	519	
K	383	37	437	G u. L	273¼	519	
L	401½	40	360	H u. M	278	518	
M	406	42	342				
				I u. N	462¼	524	3,12
N	548½	15,186	2,814	K u. O	469¾	525	
O	556½	87	787	L u. O	479	524	
P	579	90	710	K u. P	481	527	
Q	584½	92	692	L u. P	490¼	526	
				M u. Q	495	526	

Um die Amplituden, welche wir zur Berechnung der in der 7. Columne stehenden Decremente benutzten, rasch kenntlich zu machen, haben wir dieselben mit Buchstaben bezeichnet, welche die 1. Columne ausfüllen. Die 2. enthält die Schwingungszahlen (s. §. 9), die 5. die Angabe der Amplitudencombinationen, die 6. die Nummer (N') der-

jenigen Schwingung, für welche das jeweilige Decrement berechnet ist, die 8. die zu N' gehörige Amplitude (S).

Die Werthe für das Decrement zeigen unverkennbar ein im Verhältniss zu der geringen Temperaturzunahme von 2° C. bedeutendes Anwachsen. Dass dieser Zusammenhang ein ursächlicher ist, geht ziemlich klar aus Tab. V hervor, zu deren Erläuterung die Bemerkung genüge, dass vom 21. Februar an die Temperatur nicht mehr am unteren Ende, sondern in der Mitte des Drahtes abgelesen wurde.

Tabelle V.

Draht wie in Tab. IV.

Datum	Zimmertemperatur nach Cels.	Decremente
Länge des Drahtes 246 cm.		
28. Jan.	—	0,000628 644 643 638
29. Jan.	17 bis 19° steigend	0,000518 519 521 522
1. Febr.	20°	554
2. Febr.	14½°	431 436 436
4. Febr.	21½°	606 603 607
5. Febr.	18°	522 521
6. Febr.	19½°	558 552 550
9. Febr.	17½°	438 439 439
Länge 186 cm.		
13. Febr.	—	523 527 533
18. Febr. 9h bis 12h	20 bis 26° steigend	593 609 616 638
18. Febr. 12½ bis 2h	25 bis 23° fallend	600 628 597 588

Datum	Temperatur des Drahtes nach Cels.	Decremente
Länge 186 cm.		
20. Febr.	23½ bis 27° steigend	0,000658 662 666
21. Febr.	25 bis 26° steigend	561 564 566 568
22. Febr.	27 bis 24° fallend	577 572 535
25. Febr.	13,7 bis 13,5° fallend	463 458 458
27. Febr.	23½ bis 25½° steigend	541 546
28. Febr.	24,3 bis 25,5° steigend	532 536
1. März	21,1 bis 22,8° steigend	500 498 497 501
Länge 100 cm.		
13. März	19½ bis 22¾ steigend	621 611 601 591 } fallend
14. März	22 bis 23° steigend	596 597 601
15. März	22 bis 23,2° steigend	626 625 622 618 } fallend

Die Vergleichung der Decremente dieser Tabelle lässt sowohl für einen und denselben Tag, als auch für auf einander folgende Tage das Parallellaufen von Decrement und Temperatur erkennen. Man darf indess eben wegen der hierin documentirten Empfindlichkeit des Messingdrahtes gegen die gewöhnlichsten Schwankungen der Zimmertemperatur gar nicht erwarten, dass der erwähnte Verlauf ein ausnahmsloser ist. Ferner kommt noch hinzu, dass, wie schon Schmidt bemerkt, die jeweils abgelesene Temperatur durchaus nicht maassgebend ist für den inneren Zustand des Drahtes, dass vielmehr die vorhergegangenen Temperaturverhältnisse Nachwirkungen hinterlassen, über die die abgelesene Temperatur nichts aussagen kann. Es gelang uns daher auch nicht, durch Reduction der Decremente der Tab. V auf eine Normaltemperatur (etwa 20° C.) eine regelmässig fallende Reihe herzustellen, wie sie die Tab. III nach Reduction auf eine Normalamplitude (mit wenigen Ausnahmen) liefert, obgleich die Decremente des 25. und 27. Februar bei Adoption einer von Schmidt aufgestellten empirischen Formel[1]) sehr wohl die approximative Berechnung des Temperaturfactors ($\alpha = 0{,}02$) ermöglichten.

§. 14. Ausser solchen von uncontrolirten Temperaturverhältnissen herrührenden Ausnahmen weist die Tab. V aber auch scheinbare Ausnahmen auf, welche sich aus der Uebereinanderlagerung von Temperatur- und Nachwirkungseinflüssen (hauptsächlich zweiter Art) erklären. Dies gilt wahrscheinlich für den 1. März, sicher aber für den 13. und 15. März. Während nämlich an den vorhergehenden Tagen die beobachteten Amplituden einen Winkel von 74 Min. nicht überschritten, betrug die Maximalamplitude am 1. März 2° 47′. Da nun an diesem Tage (nach Tab. V) bei dem Anwachsen der Temperatur um etwa 2° eher eine Abnahme als eine Zunahme, besten Falles eine Constanz der Decremente constatirt werden kann, so muss diese Amplitude ungefähr dem Grenzwinkel entsprechen. Bei der Länge von 186^{cm} nehmen wir daher für unsern Messingdraht als Grenzwinkel rund 2—3° an. Genauer gelang es uns den Grenzwinkel für die Länge von 100^{cm} zu bestimmen; da nämlich am 13. und 15. März, an welchen Tagen die Decremente eine Ueberschreitung des Grenzwinkels andeuten, die Maximalamplitude 79 resp. 144 Min., am

---

1) $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \alpha \vartheta)$; wo ϑ die Temperatur, ε das logarithmische Decrement für diese Temperatur, ε_0 das Decrement für 0° und α eine Constante bedeutet.

14. März dagegen 56 Min. beträgt, so muss man daraus schliessen, dass für diese Länge der Grenzwinkel zwischen 56 und 79 Min. liegt.

§. 15. Zu diesem zweiten (das erste s. §. 13) Unterscheidungsmoment für die bisher besprochenen Drähte, das ist Angebbarkeit eines Grenzwinkels beim Messingdraht, könnte man noch als drittes das anders geartete Abhängigkeitsverhältniss des Decrementes zur Länge anführen. Wenn es überhaupt gestattet ist in dieser Hinsicht aus den Zahlen der Tab. V Schlüsse zu ziehen, so muss man annehmen, dass die Verkürzung des Drahtes von 246^{cm} auf 186^{cm} das Decrement ungeändert liess, die weitere Verkürzung aber auf 100^{cm} eine Erhöhung desselben zur Folge hatte. Es ist nicht wohl anzunehmen, dass diese Erhöhung eine Folge von Nachwirkungen erster Art (s. §. 12 am Ende) sei, da die Verkürzung auf 100^{cm} schon am 7. März vorgenommen wurde.

§. 16. Die eigenthümlichen Resultate, zu denen wir bei Untersuchung des Messingdrahtes gelangten und die wir nicht sogleich dem factisch vorhandenen Einflusse der Temperaturschwankungen zuzuschreiben geneigt waren, veranlasste uns noch eine andere als die bisher angewandte Beobachtungsmethode eintreten zu lassen; in der Besorgniss, es möchte bei der relativ beträchtlichen Wanderung des Nullpunktes während des Intervalles zwischen zwei auf einander folgenden Coincidenzen, welches bei kleinen Amplituden lange währt, die Berechnung des Nullpunktes auf dem Wege der Interpolation nicht mehr zulässig sein. Deshalb kehrten wir am 21. Februar zu der gewöhnlichen Methode zurück, die wir nur in so fern vervollkommneten, als wir zur Ermittlung einer Amplitude $n+1$ (meistens 6) Umkehrpunkte der einen Seite und die dazwischen liegenden n der anderen Seite beobachteten und daraus in selbstverständlicher Weise Amplitude und zugehörigen Nullpunkt berechneten.

Desgleichen eigneten wir uns auch zur Bestimmung der Schwingungsdauer eine Berechnungsmethode an, welche in möglichst kurzer Zeit einen genauen Werth liefert. Wir notirten für acht Durchgänge durch die Gleichgewichtslage, und zwar sowohl beim Durchgang nach rechts als auch nach links, die Zeiten, combinirten alle Werthe, die beim Durchgang nach der einen Seite gefunden wurden, mit einander und dann die übrigen[1]), verschafften uns so zwei Mittel und nahmen

1) Dabei wurde natürlich jeder Werth nur einmal benutzt.

daraus das Hauptmittel. Es zeigte sich, wie zu erwarten war, dass die beiden Mittel unter Umständen beträchtlich verschieden ausfielen. Bei der Wanderung des Nullpunktes nach links zeigte z. B. das für den Durchgang nach links berechnete Mittel einen zu grossen, das andere einen zu kleinen Werth. Der mittlere Fehler betrug bei dieser Methode beispielsweise für eine Schwingungsdauer von 30,106 nur ± 0,003 Secunden.

§. 17. Aehnliche Eigenschaften wie der in den vorhergehenden Paragraphen abgehandelte Messingdraht zeigte auch ein Stahldraht, den wir vom 25. März an untersuchten. Die Beobachtungen über denselben sind noch nicht abgeschlossen und wir geben daher in Tab. VI und VII nur eine vorläufige Uebersicht der bis zum 5. April gewonnenen Resultate.

Tabelle VI.

Stahldraht, Klaviersaite aus der Fabrik von Pöhlmann in Redwitz, 0,5 mm dick. (5. April.)

Länge des Drahtes 125 cm. Schwingungsdauer 22,37 Sec. Entfernung der Scala vom Spiegel 73,7 cm.

	Zeit	Temp. (C.)	Nullp.	Ampl. mm	Combinat.	Decremente
a	10h 10′ 18″	16,2°	301,09	35,17		
b	10h 20′ 22″	16,3	301,19	32,61		
c	10h 40′ 29″	16,5	301,17	28,54		
d	10h 50′ 11″		301,12	26,96		
e	10h 59′ 52″	16,8	301,19	25,31	a u. e	0,001074
f	11h 10′ 18″		301,18	23,74	b u. f	1029
g	11h 19′ 59″	17	301,21	22,32	c u. g	1007
h	11h 30′ 3″		301,15	20,98	d u. h	1018
i	11h 40′ 7″	17	301,28	19,58	e u. i	1032

Tabelle VII.

Stahldraht wie in Tab VI. Länge 245 cm. Entfernung der Scala vom Spiegel 758 mm.

25. März. Temperatur von 16 bis 19° C. steigend.
Scalenausschlag 97 bis 49 mm.
Decremente 0,00105; 105; 104; 103; 104; 105; 106.

26. März. Temperatur von 16 bis 20° C. steigend.
Scalenausschlag 66½ bis 23¼ mm.
Decremente 0,00101; 101; 095; 094.

27. März. Temperatur von 16,8 bis 18,1° C. steigend.
Scalenausschlag 69, 26 bis 51 mm.
Decremente 0,00097; 95; 94; 93; 92.

28. März. Temperatur von 18,9 bis 19,9° C. steigend.
Scalenausschlag von 68,5 bis 55 mm.
Decrement 0,00095.

29. März. Temperatur von 19½ bis 21½° C. steigend.
Scalenausschlag 88,71 bis 53,24 mm.
Decremente 0,00096; 94.

1. April. Temperatur von 18,9 bis 20,9° C. steigend.
Scalenausschlag 57,2 bis 37,2 mm.
Decremente 0,00092; 92; 94.

2. April. Temperatur von 18 bis 20½° C. steigend.
Scalenausschlag 183,15 bis 67,75 mm oder 815 Min. bis 306½ Min.
Decremente 0,00097; 98; 99.

Die Abnahme des Decrementes in den auf einander folgenden Tagen (also das Vorhandensein von Nachwirkungen erster Art) tritt in Tab. VII deutlich hervor. Sonst aber lassen die Zahlen in beiden Tabellen eine eingehende Discussion nicht zu, da der Einfluss der Temperatur und der Nachwirkung zweiter Art sich gegenseitig bekämpfen und theilweise verdecken. Es lässt sich nur so viel aussagen, dass das Anwachsen des Decrementes an ein und demselben Tage vom Steigen der Temperatur, das Abnehmen von der Nachwirkung zweiter Art herrühren muss. Jedenfalls muss auch bei diesem Draht der Temperaturfactor sehr gross sein, da die Decremente des 2. April sonst unerklärlich wären. Die Decremente des 25. März (Tab. VII) und des 5. April (Tab. VI) zeigen deutlich, wie der Einfluss der Temperatur allmählich die Oberhand über die Nachwirkung zweiter Art erlangt, während er am 26. und 27. März nicht hervortritt, wiewohl er gewiss vorhanden ist.

Ueber die innere Reibung in einem Gemische von Kohlensäure und Wasserstoff.

Von

Dr. **J. Puluj,**

Privatdocent und Assistent am physikalischen Cabinete der Wiener Universität.

(Aus den Wiener Sitzungsberichten vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Erste Abhandlung.

Als ich die Reibung des Aetherdampfes bei sehr kleinen Drucken untersuchte, ergab sich, dass bei fortgesetzter Verdünnung des Dampfes der Werth der Reibungsconstante grösser wurde. So erhielt ich bei Zimmertemperatur von ungefähr 17° C. für die Reibungsconstante des Aetherdampfes $\eta = 0{,}000073$ bei dem Drucke $p = 32{,}9^{mm}$ und $\eta = 0{,}000083$ bei $p = 0{,}03^{mm}$[1]). Der Erklärungsgrund davon ist darin zu suchen, dass der Wasserdampf, welcher an der Oberfläche der Körper sehr fest haftet und selbst durch sorgfältiges Trocknen nicht ganz wegzubringen ist, bei fortgesetzter Evacuation von den Wänden des Apparates sich loslöst und den Aetherdampf verunreinigt. Es wird bei fortschreitender Verdünnung die Menge Wasserdampf über die des Aetherdampfes immer mehr überwiegen und daher, wegen grösserer Reibung des ersteren[2]), auch die Reibungsconstante des Dampfgemisches zunehmen. Dies veranlasste mich, die innere Reibung eines Gasgemisches (Kohlensäure und Wasserstoff) in ihrer Abhängigkeit von den Mischungsverhältnissen der einzelnen Bestandtheile zu untersuchen.

---

1) Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. (Juli) Bd. 78. — Repertorium lauf. Bd. S. 433 ff.

2) Die Reibungsconstante des Wasserdampfes ist nach Herrn Kundt und Warburg $\eta = 0{,}000098$ bei $t = 20{,}6$ °C. und $p = 16{,}1^{mm}$ (Pogg. Ann. Bd. 155 S. 541) und nach meiner Bestimmung $\eta = 0{,}000097$ bei $t = 16{,}7$ °C. und $p = 12{,}8^{mm}$. (Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. Bd. 78. — Repertorium a. a. O.)

Die hier mitgetheilten Versuche sind mit demselben Apparate ausgeführt worden, welchen ich bei meiner Abhandlung „Ueber die Reibung der Dämpfe"[1]) beschrieben habe. Zur Messung der Mengenverhältnisse der einzelnen Bestandtheile des Gasgemisches wurde das in jener Abhandlung beschriebene Manometer *sp* verwendet. Zu diesem Zwecke wurde aus dem weiteren Schenkel des Communicationsgefässes der Holzcylinder entfernt, derselbe mit einem Kork verschlossen und durch den letzteren ein in eine Spitze ausgezogener und mit Millimetertheilung versehener Glasstab vertical durchgesteckt. Zur Bestimmung des Druckes eines verdünnten Gases im Apparate wurde die Spitze auf das Quecksilberniveau eingestellt und die Quecksilberkuppe im Manometerrohr *sp*, sowie die Millimetertheilung mit einem Fernrohre beobachtet. Die Höhe der Quecksilbersäule, vom gleichzeitig beobachteten Barometerstande abgezogen und auf 0° reducirt, gibt den in Folge mit p bezeichneten Druck des Gases oder Gasgemisches an. Weiter wird angegeben werden, wie aus den Drucken p und den Barometerständen b die Mischungsverhältnisse der Gase im Apparate berechnet wurden. Der Gasentwicklungsapparat stand in Verbindung mit einem Trockenapparat (Chlorcalcium-Cylinder, Waschflasche mit Schwefelsäure und drei Glasröhren, gefüllt mit Glasperlen, welche mit Schwefelsäure benetzt waren) und der letztere mit der Quecksilberpumpe.

Vor der Füllung des Reibungsapparates mit Gas wurde derselbe auf einige Hundertstel Millimeter ausgepumpt, das Gas gegen eine halbe Stunde durch den Trockenapparat durchströmen gelassen, nachher das Glasröhrchen, mit dem der Kautschukschlauch vom Trockenapparate versehen war, in das Ansatzstück k mit der Pumpe bis zum Hahn hineingesteckt, um auch aus den letzteren die Luft zu entfernen, und schliesslich der Kautschukschlauch über das Ansatzrohr k geschoben. Durch vorsichtiges Oeffnen des Hahnes wurde das Gas in den Reibungsapparat langsam hineinströmen gelassen und, um die letzten Spuren Luft aus demselben zu entfernen, nachher noch zwei- bis dreimal ausgepumpt und wieder gefüllt.

Es wurde der Apparat zuerst mit Kohlensäure gefüllt und nach Bestimmung der Reibungsconstante das Gas bis auf den Druck p_1 ausgepumpt und der Apparat nachher bis zum Atmosphärendrucke b_1

1) Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. Bd. 78. — Repertorium a. a. O.

mit Wasserstoff gefüllt. Wasserstoff wurde aus Zink und verdünnter Schwefelsäure, und Kohlensäure aus Marmorstücken und verdünnter Salzsäure entwickelt. Das erstere Gas wurde in Schwefelsäure, das letztere in Wasser und Schwefelsäure gewaschen. Auch vor dem Füllen mit Wasserstoff wurde dafür gesorgt, dass aus den Trockenapparaten sowie dem Ansatzrohr k die letzten Spuren Kohlensäure und Luft entfernt werden. Nachdem der Apparat etwas über den Atmosphärendruck b_1 gefüllt war, drehte ich den Hahn des Ansatzrohres k zu, entfernte den Kautschukschlauch und hielt nachher eine kurze Zeit den Hahn offen, damit der Druck im Apparate mit dem der Atmosphäre b_1 sich ausgleiche. Beim Oeffnen des Hahnes strömte nur reiner Wasserstoff heraus, da die Kohlensäure noch keine Zeit hatte durch Diffusion in der langen und dünnen federnden Glasröhre, durch welche die Verbindung zwischen dem Apparate und der Quecksilberpumpe hergestellt war, sich zu verbreiten. Nachher wurden beim abgesperrten Hahne durch mehrmaliges Aus- und Hineinpumpen die Gase im Apparate gemischt und gewartet, bis der Apparat die Zimmertemperatur angenommen hat.

Nach Bestimmung der Reibungsconstante des Gasgemisches wurde der Apparat bis auf p_2 (von p_1 nur wenig verschieden) ausgepumpt und nachher bis zum Atmosphärendrucke b_2 mit Wasserstoff auf die beschriebene Weise gefüllt.

Dieses Verfahren wurde mehrmals wiederholt, solange die im Apparate zurückbleibenden Spuren Kohlensäure auf den Werth der Reibungsconstante des Wasserstoffes noch von Einfluss waren.

Schliesslich wurde der Apparat mit reinem Wasserstoff gefüllt und die Reibungsconstante bestimmt.

Aus dem beschriebenen Verfahren, welches beim Füllen des Apparates beobachtet wurde, ergibt sich mit Leichtigkeit die Bestimmung der Mengenverhältnisse der einzelnen Bestandtheile des Gasgemisches.

Wird die Menge des Gasgemisches gleich eins gesetzt, so enthält der Apparat nach einmaliger Füllung desselben mit Wasserstoff:

$$\frac{p_1}{b_1} \text{ Kohlensäure und } 1 - \frac{p_1}{b_1} \text{ Wasserstoff,}$$

nach zweimaliger Füllung:

$$\frac{p_1 p_2}{b_1 b_2} \text{ Kohlensäure und } 1 - \frac{p_1 p_2}{b_1 b_2} \text{ Wasserstoff}$$



und nach n-maliger Füllung:

$$\frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} \text{ Kohlensäure und } 1 - \frac{p_1 p_2 \ldots p_n}{b_1 b_2 \ldots b_n} \text{ Wasserstoff.}$$

Ich habe mit Kohlensäure und Wasserstoff drei Versuchsreihen ausgeführt und lasse hier die beobachteten sowie die aus denselben berechneten Zahlen folgen. Die in den Columnen stehenden Scalentheile sind bereits auf Bogen reducirt; t bedeutet die Temperatur des Reibungsapparates, η die Reibungsconstante, und p und b haben die obige Bedeutung und sind bereits auf 0° reducirt. Bei allen Versuchen war die Schwingungsdauer der Scheiben 16,593. An dem Reibungsapparate wurde während aller drei Versuchsreihen nichts geändert.

Kohlensäure — Wasserstoff.

Erste Versuchsreihe.

1.			2.		
9. Juli.	Reine Kohlensäure.		$(CO_2 - H_2)$	$p = 462,2$	$b = 748,0$
139,4	141,7	143,9	145,7	149,6	141,9
127,7	129,8	131,9	133,7	136,9	130,0
116,8	118,9	120,9	122,1	125,7	118,9
107,0	108,9	110,8	111,8	114,8	108,9
98,1	99,9	101,7	102,7	105,0	99,7
89,9	91,8	93,0	93,9	96,1	91,6
82,4	83,9	85,0	85,9	87,9	83,8
75,8	77,0	78,1	78,9	80,8	76,8
69,2	70,4	71,8	72,0	74,0	69,9
63,4	64,8	65,8	66,0	67,7	63,9
58,2	59,0	60,0	60,1	61,8	59,0
53,2	54,1	55,0	55,2	56,8	53,9
48,8	49,7	50,4	50,6	51,9	49,0
44,9	45,5	46,0	46,1	47,2	45,0
41,0	41,7	42,1	42,2	43,2	41,2
$t =$ 19,7°C.	19,7°C.	19,7°C.	19,7°C.	19,8°C.	19,9°C.

3.			4. 10. Juli.		
$(CO_2 - H_2)$	$p = 449,1$	$b = 746,7$	$(CO_2 - H_2)$	$p = 437,7$	$b = 746,4$
147,6	144,6	146,2	145,6	144,4	142,7
135,5	132,6	134,5	134,5	132,9	131,7
124,1	121,7	123,2	123,8	122,8	121,7
113,9	111,6	113,0	114,0	112,9	111,8
104,7	102,6	103,9	105,1	104,1	103,1
95,9	93,9	95,0	97,0	95,9	95,0
87,9	86,0	87,2	89,5	88,8	87,8
80,8	79,0	80,0	82,6	81,9	80,9

(CO_2-H_2) $p=449,1$		$b=746,7$	(CO_2-H_2) $p=437,7$		$b=746,4$
74,0	72,8	73,3	76,0	75,2	74,8
67,9	66,7	67,3	70,0	69,3	68,9
62,1	61,0	61,9	64,8	64,0	63,2
57,1	56,0	56,9	59,7	59,0	58,8
52,1	51,2	52,0	54,9	54,2	53,9
48,0	47,0	47,8	50,9	50,0	49,7
44,0	43,0	44,0	46,9	46,1	45,9
$t=$ 19,2° C.	19,2° C.	19,3° C.	20,0° C.	20,1° C	20,2° C.

5.			6.		
(CO_2-H) $p=339,5$		$b=745,6$	(CO_2-H) $p=338,1$		$b=745,3$
147,6	144,2	147,4	141,6	144,5	143,9
137,7	133,5	137,4	132,7	135,7	135,2
128,5	124,1	127,8	124,8	127,6	126,9
119,4	115,7	118,8	117,0	119,7	119,0
111,0	107,8	110,8	109,8	112,1	111,7
103,8	100,1	103,1	103,0	105,7	104,9
96,7	93,1	95,9	96,9	98,9	98,7
89,8	86,9	89,2	90,9	92,9	92,7
83,8	80,9	83,1	85,2	87,1	86,9
77,9	75,2	77,6	79,9	81,9	81,7
72,3	70,0	71,9	75,1	77,0	76,8
67,8	65,1	67,0	70,7	72,0	71,9
63,0	60,8	62,4	66,1	68,0	67,2
58,8	56,7	58,2	62,1	63,5	63,1
54,6	52,8	54,1	58,3	59,7	59,5
$t=$ 20,5° C.	26,6° C.	20,8° C.	20,5° C.	20,5° C.	20,5° C.

7.			8. 11. Juli.		
(CO_2-H) $p=401,2$		$b=738,9$	(CO_2-H) $p=333,0$		$b=739,0$
149,6	146,6	147,6	149,6	148,6	147,6
141,4	138,5	139,0	141,7	140,7	139,8
132,9	130,4	130,9	133,8	132,8	131,9
125,6	122,8	123,8	126,8	125,8	125,1
118,1	115,8	116,5	119,7	119,0	118,0
111,3	108,9	109,7	113,1	112,6	111,7
104,9	102,9	103,7	107,0	106,6	105,8
98,9	96,9	97,6	101,1	100,7	99,9
93,0	91,0	92,1	95,8	95,0	94,6
87,8	86,0	86,7	90,6	89,9	89,2
82,8	80,9	81,6	85,7	85,0	84,6
78,0	76,4	77,0	80,9	80,4	79,9
73,7	72,0	72,2	76,8	76,0	75,8
69,1	67,9	68,1	72,2	72,0	71,3
65,3	63,9	64,1	68,3	68,0	67,7
$t=$ 20,5° C.	20,5° C.	20,5° C.	19,7° C.	19,7° C.	19,8° C.

9.			10.		
(CO_2 — H_2) $p = 333,1$	$b = 739,0$		Reiner Wasserstoff.		
143,3	142,8	147,6	144,6	144,5	147,6
135,7	135,5	139,7	137,6	137,0	140,3
128,7	128,1	132,5	130,4	130,0	132,8
121,8	121,6	125,5	123,8	123,0	125,9
115,6	114,9	118,7	117,0	116,8	119,7
109,0	108,9	112,6	110,9	110,8	113,7
103,4	103,1	106,6	105,6	105,0	107,8
97,9	97,8	100,9	99,7	99,8	102,0
92,9	92,6	95,7	94,9	94,7	96,9
87,8	87,7	90,6	89,9	89,7	91,9
83,0	82,9	85,8	85,1	84,9	86,9
78,8	78,9	81,0	80,9	80,7	82,6
74,8	74,3	77,0	77,0	76,8	78,2
70,9	70,5	72,9	72,9	72,8	74,2
67,0	66,7	68,9	69,0	69,0	70,2
$t =$ 20,2 °C.	20,2 °C.	20,3 °C.	19,9 °C.	19,9 °C.	19,9 °C.

Nachstehend folgen die aus obigen Zahlen berechneten Reibungsconstanten des Gasgemisches.

t	η	t	η
19,7	0,000151	20,5	0,000110
19,7	150	20,5	108
19,7	150	20,5	108
19,7	152	20,5	102
19,8	152	20,5	102
19,9	152	20,5	102
19,2	148	19,7	96
19,2	148	19,7	96
19,3	147	19,8	96
20,0	139	20,2	93
20,1	140	20,2	93
20,2	139	20,3	93
20,5	121	19,9	91
20,6	124	19,9	91
20,8	123	19,9	91

Die zwei ersten Columnen der weiter folgenden Tabelle bedeuten die Mengenverhältnisse der einzelnen Bestandtheile des Gasgemisches, in der dritten Columne ist das Mittel der voranstehenden zusammengehörigen Temperatur und in der vierten das Mittel der entsprechenden Reibungsconstanten.

CO_2	H_2	t	η
1,000	0,000	19,7 °C.	0,000150
0,618	0,382	19,8	152
0,372	0,628	19,2	148
0,218	0,782	20,1	139
0,099	0,901	19,6	123
0,045	0,955	20,5	109
0,024	0,976	20,5	102
0,011	0,989	19,7	096
0,005	0,995	20,2	093
0,000	1,000	19,9	091

Die Temperaturen sind so wenig von einander verschieden, dass die Reduction der Reibungsconstanten auf dieselbe mittlere Temperatur 19,9°C. Werthe liefert, die erst in der siebenten Decimalstelle von den beobachteten sich unterscheiden.

Aus der voranstehenden Tabelle ersieht man, dass während 62 Procent Wasserstoff noch immer kaum einen merklichen Einfluss auf die Reibungsconstante der Kohlensäure ausüben, von der letzteren schon 0,5 Procent genügen, um die Reibungsconstante des Wasserstoffes merklich zu verändern.

Zur Controle sind noch zwei Versuchsreihen mit Kohlensäure — Wasserstoff ausgeführt worden.

Zweite Versuchsreihe.

1.			2.		
12. Juli.	Reine Kohlensäure.		$(CO_2 - H_2)$ $p = 339,2$	$b = 743,5$	
136,7	137,9	139,7	141,8	143,6	143,0
125,1	126,6	127,9	129,9	131,5	130,9
114,8	115,8	117,5	119,0	120,6	119,9
105,1	106,7	107,6	108,9	110,1	109,9
96,2	97,1	98,7	99,9	100,9	100,7
88,1	89,0	90,0	91,7	92,7	92,1
80,9	81,8	82,8	83,8	84,8	84,2
74,1	74,9	76,0	76,9	77,9	77,2
68,0	68,8	69,3	70,1	71,0	70,9
62,1	62,9	63,8	64,3	65,1	64,9
57,0	57,9	58,2	59,0	59,7	59,3
52,1	52,9	53,3	53,9	54,7	54,2
48,0	48,2	48,9	49,3	49,0	49,9
43,1	44,2	44,9	45,2	45,9	45,5
40,0	40,7	41,0	41,4	41,9	41,8
$t =$ 19,6 °C.	19,7 °C.	19,8 °C.	20,3 °C.	20,4 °C.	20,3 °C.

3.

$(CO_2 - H_2)$	$p = 339{,}6$	$b = 743{,}8$
145,6	138,7	147,2
134,6	127,7	135,7
124,0	117,8	125,3
114,6	108,7	115,6
105,7	100,3	106,7
97,3	92,6	98,0
89,8	85,1	90,8
82,8	78,9	83,8
76,7	72,8	77,1
70,5	67,0	71,1
65,0	61,9	65,7
60,0	57,0	60,3
55,1	52,7	55,9
51,0	48,2	51,3
47,0	44,8	47,3
$t = 20{,}4$ °C.	20,4 °C.	20,4 °C.

4.

$(CO_2 - H_2)$	$p = 339{,}3$	$b = 743{,}8$
142,0	143,6	148,6
132,8	133,7	138,7
123,7	124,7	129,3
114,9	115,9	120,5
107,0	108,0	111,8
99,9	100,9	104,7
93,0	93,9	97,2
86,8	87,6	90,8
80,8	81,7	84,1
75,1	76,0	78,9
70,0	70,9	73,1
65,1	66,0	68,1
60,9	61,2	63,8
56,9	57,0	59,1
52,9	53,1	55,0
19,5 °C.	19,5 °C.	19,5 °C.

5.
13. Juli.

$(CO_2 - H_2)$	$p = 337{,}2$	$b = 744{,}6$
149,5	141,9	143,5
140,6	133,7	134,7
131,7	125,6	126,6
123,8	117,8	118,8
116,6	110,7	111,6
109,1	104,0	104,9
102,8	97,9	98,7
96,7	91,9	92,7
90,8	86,1	86,9
85,0	80,9	81,7
79,9	76,1	76,9
75,0	71,8	72,0
70,5	67,1	67,7
66,1	63,0	63,6
62,1	59,1	59,7
$t = 19{,}2$ °C.	19,3 °C.	19,4 °C.

6.

$(CO_2 - H_2)$	$p = 340{,}8$	$b = 745{,}3$
146,8	146,5	148,5
138,7	138,4	140,4
130,8	130,5	132,5
123,8	122,9	124,8
116,8	115,9	117,8
109,9	109,7	111,0
103,9	103,9	104,9
98,0	97,8	98,9
92,7	92,0	93,8
87,1	86,9	88,1
82,4	81,9	83,1
77,9	77,7	78,9
73,5	73,0	74,0
69,1	69,0	70,9
65,5	65,1	66,1
19,8 °C.	19,9 °C.	19,9 °C.

7.

$(CO_2 - H_2)$	$p = 339{,}4$	$b = 744{,}0$
149,0	144,9	142,7
141,0	137,7	134,9
133,6	129,9	127,8
126,6	122,9	120,8
119,7	116,8	114,6
113,0	111,0	108,7
107,1	104,6	102,7

8.
14. Juli.

$(CO_2 - H_2)$	$p = 337{,}5$	$b = 743{,}5$
149,1	145,6	144,9
141,6	138,5	137,7
133,9	130,8	130,6
127,0	124,5	123,8
120,6	118,1	117,0
114,0	111,7	110,8
108,1	105,9	105,1

($CO_2 - H_2$) $p = 339{,}4$		$b = 744{,}0$	($CO_2 - H_2$) $p = 337{,}5$		$b = 743{,}5$
101,7	98,9	97,0	102,8	100,1	99,9
95,9	93,8	91,9	97,1	94,9	94,7
90,9	88,6	87,0	92,1	89,9	89,7
86,0	83,8	82,0	87,2	85,4	84,9
81,4	79,2	78,0	82,9	80,9	80,7
77,1	75,0	74,0	78,7	77,0	76,4
73,0	71,0	69,9	74,2	72,9	72,3
69,0	67,1	66,1	69,7	69,0	68,7
t = 19,9 °C.	19,9 °C.	19,9 °C.	19,3 °C.	19,4 °C.	19,5 °C.

9. / 10. 15. Juli.

($CO_2 - H_2$) $p = 338{,}2$		$b = 744{,}0$	($CO_2 - H_2$) $p = 339{,}1$		$b = 743{,}9$
143,6	145,1	149,6	149,6	147,8	139,6
135,9	137,7	141,8	141,9	140,6	132,5
129,0	130,6	134,6	134,7	133,4	125,8
122,5	123,8	127,7	127,9	126,6	118,9
115,8	117,6	120,8	120,9	119,8	112,8
109,8	110,9	114,7	114,8	113,8	107,1
104,2	105,6	108,8	108,9	107,8	101,7
98,9	99,9	103,0	103,3	102,1	96,5
93,9	94,8	97,8	97,9	96,9	91,0
88,9	89,9	92,7	92,9	91,9	86,8
84,0	84,9	87,8	87,9	87,0	82,0
79,9	80,9	83,0	83,7	82,7	77,9
76,0	76,8	79,0	78,1	78,2	73,9
71,9	72,5	74,9	75,1	74,2	69,9
67,9	68,9	71,0	71,2	70,2	66,2
t = 19,7 °C.	19,8 °C.	19,9 °C.	18,9 °C.	19,0 °C.	19,1 °C.

t	η	t	η
19,6	0,000151	19,8	0,000099
19,7	150	19,9	100
19,8	150	19,9	099
20,3	151	19,9	095
20,4	151	19,9	095
20,3	151	19,9	094
20,4	138	19,3	092
20,4	139	19,4	091
20,4	139	19,5	091
19,5	121	19,7	092
19,5	122	19,8	091
19,5	121	19,9	091
19,2	108	18,9	091
19,3	107	19,0	091
19,4	108	19,1	091

CO_2	H_2	t	η
1,000	0,000	19,7 °C.	0,000150
0,456	0,544	20,3	151
0,208	0,792	20,4	139
0,095	0,905	19,5	121
0,042	0,958	19,3	108
0,019	0,981	19,9	099
0,009	0,991	19,9	095
0,004	0,996	19,4	091
0,002	0,998	19,8	091
0,001	0,999	19,0	091

Das Resultat dieser Versuchsreihe ist mit dem der ersten in bester Uebereinstimmung.

Dritte Versuchsreihe.

1.			2.		
15. Juli.			16. Juli.		
Reine Kohlensäure.			$(CO_2 - H_2)$ $p = 340,0$ $b = 746,2$		
137,8	140,5	138,4	148,6	137,8	146,7
126,7	128,7	126,8	136,5	126,6	134,7
115,9	117,9	116,0	124,9	115,8	123,6
106,0	107,9	106,7	114,6	106,0	113,1
97,6	98,9	97,7	104,9	97,1	103,8
89,1	90,8	89,2	97,0	88,9	94,9
81,8	83,1	81,9	88,0	81,8	86,9
75,0	76,1	75,0	80,9	74,9	79,9
68,9	69,8	68,9	74,0	68,7	73,0
63,0	64,0	63,0	68,0	62,9	67,0
57,9	58,9	58,0	62,0	57,8	61,2
52,9	53,9	53,0	57,0	52,9	56,1
48,3	49,1	48,3	52,0	48,1	51,3
44,3	45,0	44,3	47,9	44,3	47,0
40,9	41,2	40,9	43,9	40,6	43,1
$t =$ 19,7 °C.	19,7 °C.	19,8 °C.	19,5 °C.	19,5 °C.	19,6 °C.

3.			4.		
$(CO_2 - H_2)$ $p = 339,5$ $b = 748,6$			$(CO_2 - H_2)$ $p = 341,0$ $b = 748,6$		
147,6	148,7	138,7	142,5	147,9	140,3
136 4	137,6	127,9	132,8	138,3	130,6
125,8	126,9	117,9	123,8	128,8	121,8
115,8	116,9	108,9	115,6	119,8	113,7
107,1	108,0	100,7	107,8	111,8	105,9
98,9	99,8	92,8	100,1	104,1	98,7
91,0	91,9	85,7	93,2	97,1	91,9
84,0	84,8	79,0	87,0	90,7	85,9
77,8	78,3	72,9	81,0	84,1	79,9

($CO_2 - H_2$)	$p = 339,5$	$b = 748,6$
71,9	72,2	67,1
66,0	66,9	62,0
61,0	61,7	57,1
56,1	57,0	52,9
51,9	52,3	48,8
47,9	48,2	45,0
t = 29,7 °C.	20,6 °C.	20,5 °C.

($CO_2 - H_2$)	$p = 341,0$	$b = 748,6$
75,9	79,0	74,2
70,2	73,1	69,1
65,8	68,1	64,8
61,1	63,8	60,0
57,0	59,2	56,0
53,0	55,1	52,1
19,2 °C.	19,2 °C.	19,3 °C.

5.

17. Juli.

($CO_2 - H_2$)	$p = 338,1$	$b = 750,0$
144,6	141,8	141,5
135,8	133,6	132,8
127,9	125,6	124,8
120,1	117,9	117,7
112,9	110,9	110,6
106,0	104,6	104,1
99,9	98,1	97,9
93,9	92,6	92,0
88,1	86,9	86,7
82,9	81,8	81,6
78,0	77,0	76,9
73,5	72,1	72,0
68,9	68,0	67,9
64,9	64,0	63,8
61,0	60,1	60,0
t = 18,3 °C.	18,4 °C.	18,5 °C.

6.

($CO_2 - H_2$)	$p = 339,7$	$b = 751,9$
149,0	143,6	143,8
140,8	135,7	135,8
132,9	128,1	128,7
125,7	120,9	121,5
118,8	114,3	114,7
111,9	108,0	108,1
105,9	102,0	102,1
99,9	96,4	96,7
94,7	90,9	91,1
89,2	85,9	86,0
84,3	81,0	81,4
79,9	76,9	77,0
75,2	72,7	72,8
71,1	68,4	68,6
67,2	64,8	64,9
19,4 °C.	19,7 °C.	20,0 °C.

7.

($CO_2 - H_2$)	$p = 343,1$	$b = 751,7$
144,8	146,6	144,1
137,4	138,8	136,6
129,8	131,5	129,0
123,0	124,6	122,2
116,3	117,8	115,8
110,0	111,6	109,7
104,5	105,7	104,1
98,9	99,9	98,3
93,7	94,7	93,0
88,7	89,6	88,0
83,9	84,9	83,2
79,6	80,3	79,0
75,1	76,0	74,9
71,1	72,0	70,9
67,5	68,1	67,0
t = 20,7 °C.	20,7 °C.	20,7 °C.

8.

18. Juli.

($CO_2 - H_2$)	$p = 341,1$	$b = 750,8$
144,6	145,3	140,8
137,3	137,7	133,7
129,8	130,6	126,7
123,1	123,8	119,9
116,8	116,9	113,9
110,7	110,9	107,8
104,9	105,1	102,1
99,7	99,9	96,9
94,1	94,8	91,9
89,7	89,8	86,9
84,7	84,9	82,3
80,0	80,4	78,0
76,7	76,1	74,0
72,0	72,1	70,1
68,1	68,5	66,5
19,7 °C.	19,7 °C.	19,7 °C.

9.			10.		
(CO_2 — H_2) p = 339,9 b = 751,1			Reiner Wasserstoff.		
143,7	144,8	142,5	146,5	149,5	149,6
136,4	137,7	134,9	138,8	141,7	142,1
129.2	130,5	128,0	131,7	134,6	134,7
122,7	123,7	121,6	124,9	127,7	127,9
115,9	117,0	115,0	118,7	120,9	121,6
109,8	110,9	108,9	112,6	114,8	114,9
104,3	105,2	103,3	106,8	108,9	109,1
98,9	99,9	98,0	101,1	103,4	103,8
93,8	94,7	92,9	96,0	98,0	98,1
88,9	89,8	88,0	91,0	93,0	93,1
84,2	84,9	83,8	86,4	88,0	88,1
79,9	80,8	79,1	81,9	83,8	83,9
75,9	76,8	75,0	77,9	79,3	79,7
71,9	72,3	71,1	73,9	75,1	75,5
68,1	68,9	67,4	69,9	71,3	71,7
t = 19,9 °C.	19,9 °C.	19,9 °C.	20,2 °C.	20,3 °C.	20,4 °C.

t	η	t	η
19,7	0,000149	19,4	0,000098
19,7	150	19,7	98
19,8	150	20,0	98
19,5	150	20,7	94
19,5	150	20,7	94
19,6	150	20,7	94
20,7	138	19,7	92
20,6	138	19,7	92
20,5	138	19,7	92
19,2	121	19,9	92
19,2	121	19,9	91
19,3	121	19,9	92
18,3	106	20,2	91
18,4	105	20,3	91
18,5	105	20,4	91

CO_2	H_2	t	η
1,000	0,000	19,7 °C.	0,000150
0,456	0,544	19,5	150
0,207	0,793	20,6	138
0,094	0,906	19,2	121
0,042	0,958	18,4	105
0,019	0,981	19,7	098
0,009	0,991	20,7	094
0,004	0,996	19,7	092
0,002	0,998	19,9	092
0,000	1,000	20,3	091

Die Zahlen dieser Tabelle verglichen mit den entsprechenden Zahlen der ersten und zweiten Versuchsreihe zeigen eine sehr gute Uebereinstimmung.

Auch hier ist zu ersehen, dass während 54 Procent Wasserstoff die Reibungsconstante der Kohlensäure noch gar nicht ändern, schon 0,2 Procent des letzteren Gases genügen, um die Reibungsconstante des ersteren merklich zu vergrössern.

Das übereinstimmende Resultat aller drei Versuchsreihen ist folgendes:

1. Die Reibungsconstante eines Gemisches von Kohlensäure und Wasserstoff (und voraussichtlich auch aller Gase, die auf einander keine chemische Einwirkung ausüben) ist nicht grösser (kleiner) als die Reibungsconstante desjenigen Bestandtheiles, welcher die grösste (kleinste) innere Reibung besitzt.
2. Gase mit grösseren Molekulargewichten haben bei gleichen Mischungsverhältnissen einen grösseren Einfluss auf den Werth der Reibungsconstante des Gasgemisches.

Ich suchte für die Abhängigkeit der Reibungsconstante η eines Gasgemisches von den Molekulargewichten m_1 und m_2 und den Mischungsverhältnissen p_1 und p_2 ($p_1 + p_2 = 1$) der einzelnen Bestandtheile eine mathematische Formel aufzustellen.

Ausgehend von der Formel, welche die kinetische Gastheorie für die Reibungsconstante eines Gases liefert:

$$\eta = \frac{mw}{4\pi\sigma^2},$$

worin m das Molekulargewicht, w die Molekulargeschwindigkeit und σ den Radius der Wirkungssphäre eines Moleküls bedeutet, erhält man, unter Annahme, dass bei einem Gasgemisch statt der Masse eines Moleküls

$$m = m_1 p_1 + m_2 p_2$$

und statt des Volumens der Molekularsphäre

$$\frac{4\pi\sigma^3}{3} = \frac{4\pi\sigma_1^3}{3} p_1 + \frac{4\pi\sigma_2^3}{3} p_2$$

gesetzt werden darf, und unter Berücksichtigung der Relation $mu^2 = m_1 u_1^2$, welche Beziehung wegen Gleichheit der Temperatur

des Gasgemenges und der einzelnen Bestandtheile bestehen muss, die Formel:

$$\eta = \frac{\eta_1 \sqrt{p_1 + \frac{m_2}{m_1} p_2}}{\left[p_1 + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right)^{\frac{2}{3}} p_2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

worin η_1 und η_2 die Reibungsconstanten der einzelnen Bestandtheile bedeuten.

Für Kohlensäure ist $m_1 = 44$, $\eta_1 = 0{,}000150$ und für Wasserstoff $m_2 = 2$, $\eta_2 = 0{,}000091$. Man erhält somit zur Berechnung der obigen Versuche die Formel:

$$\eta = \frac{150 \sqrt{p_1 + 0{,}04546 p_2}}{[p_1 + 0{,}20833 p_2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Die nach dieser Formel aus den entsprechenden Werthen p_1 (Columne CO_2) und p_2 (Columne H_2) der letzten Tabelle berechneten Werthe finden sich in der nachfolgenden Tabelle mit den beobachteten zusammengestellt.

p_1	p_2	η beob.	η berech.	B. — R.
1,000	0,000	0,000150	0,000150	± 0
0,456	0,544	150	151	— 1
0,207	0,793	138	143	— 5
0,094	0,906	121	128	— 7
0,042	0,958	105	113	— 8
0,019	0,981	098	103	— 5
0,009	0,991	094	097	— 3
0,004	0,996	092	094	— 2
0,002	0,998	091	091	± 0
0,000	1,000	091	091	± 0

Die obige Formel liefert allerdings etwas zu grosse Werthe der Reibungsconstante, ist daher bloss als eine Näherungsformel zu betrachten.

Die dritte Versuchsreihe wurde auch noch nach einer Potenzreihe mittelst Methode der kleinsten Quadrate berechnet, und es ergab sich die Formel:

$$\eta = 0{,}000092 + 0{,}0002881 p_1 - 0{,}0001665 p_1^2 - 0{,}0006929 p_1^3 + 0{,}0006295 p_1^4.$$

Wie aus der nachfolgenden Zusammenstellung zu ersehen ist, stimmen die nach dieser Formel berechneten Werthe mit den beobachteten ganz gut überein.

p_1 (CO_2)	η beob.	η berech.	B. — R.
1,000	0,000150	0,000150	± 0
0,456	150	149	+ 1
0,207	138	140	— 2
0,094	121	118	+ 3
0,042	105	104	+ 1
0,019	098	098	± 0
0,009	094	094	± 0
0,004	092	093	— 1
0,002	092	093	— 1
0,000	091	092	— 1

Es sei hier noch bemerkt, dass η_1 mit drei Constanten berechnet für die zurückgerechneten Reibungscoëfficienten Zahlen liefert, welche von der beobachteten stark abweichen, dass es daher nöthig war, η mit fünf Constanten zu berechnen.

Herr J. C. Maxwell hat in seiner neuen Gastheorie (Phil. Mag. Vol. 35 (4) p. 213) unter Annahme einer abstossenden Kraft zwischen den Gasmolekülen, welche der fünften Potenz ihrer Entfernung verkehrt proportional ist, die Reibung eines Gasgemisches berechnet. Die Berechnung meiner Versuche nach der Maxwell'schen Formel folgt in der nächsten Abhandlung.

Lamont †.

Am 6. August verschied mein hochverehrter Lehrer und väterlicher Freund, der Director der Münchener Sternwarte, Dr. Johann von Lamont. Derselbe war geboren am 13. December 1805 zu Braemar in Schottland, kam in seinem 13. Jahre in die Schottenstiftung zu Regensburg, woselbst er seine Gymnasialstudien vollendete. Bereits im Jahre 1827 wurde Lamont Assistent der unter Soldner's Leitung stehenden Sternwarte bei München und verblieb daselbst, nachdem er 1835 als Soldner's Nachfolger ernannt worden war, bis zu seinem Tode.

Sein Leben war ausschliesslich der Wissenschaft geweiht, und werde ich in einem späteren Hefte eine übersichtliche Darstellung der bedeutenden Leistungen des Verlebten auf dem Gebiete der physikalischen Disciplinen zu geben versuchen.

Carl.

Bezugsquellen-Liste.

Wir empfehlen den verehrlichen Instituten zur Verfertigung von physikalischen Apparaten etc. die Einschaltung Ihrer werthen Firma unter dieser Rubrik. Preis pro Zeile und Jahr M. 5. —.

Hochachtungsvoll

München,
Glückstrasse Nr. 11.

Die Expedition des Repertorium für Experimental-Physik
R. Oldenbourg.

Bezeichnung der Firma	**Fabrikate und Angabe der Specialität**
***Albert,** Frankfurt a. M., Mainzerstrasse.	Physikalische Vorlesungsapparate.
***Anstalt,** optische, astro-physikal. Werkstätte, Würzburg (Eugen Hartmann).	Specialität: Optische Gläser, Präcisions-Instrumente für Physik.
Breithaupt, F. W., & Sohn, Cassel.	Astronomische u. geodätische Instrumente.
Cleff, C. & F., Remscheid-Hasten.	Elektrische u. speciell magnet-elektrische Apparate.
Edelmann, M. Th., München.	Physikalische, meteorologische, physiologische, medicin. etc. Instrumente und Apparate für elektrisches Licht.
Ertel, T., & Sohn, München, Louisenstrasse 12.	Astronomische, mathematische u. geodätische Instrumente.
Fein, C. & E., Stuttgart, Kasernenstr. 43 b.	Galvanische Batterien und elektrische Vorlesungsapparate.
Hasler, G., Telegr.-Werkstätte, Bern.	Meteorologische Registrir-Instrumente.
Heller, Mechan. Werkstätte, Nürnberg.	Physik. Apparate für Vorlesungszwecke.
Hottinger & Cie., Meteorolog., phys. u. mechan. Werkstätte in Zürich.	Aneroid-Barometer mit Mikrometerschraube, Procent-Hygrometer mit Justirvorrichtung, Anemometer.
Houdek, Dr. & **Hervert,** Prag, Karpfengasse.	Egger'sche elektro-magnetische Motoren.
***Kappeller,** Heinr., jun., Wien V, Kettenbrückengasse 9.	Barometer, Thermometer, Psychrometer, Aräometer etc.
Kohl, Max, Chemnitz, Poststrasse 21	Physikalische Instrumente und Apparate neuester Constructionen. Preiscourant neu.
Lessing, Dr., Nürnberg.	Fabrik galvanischer Kohlen.
Lorenz, G., Mech. Werkstätten, Chemnitz.	Apparate zu Weinhold's Vorschule der Experimental-Physik.
Merz, G. & S., München, Müllerstr. 11.	Optische und astronomische Instrumente.
***Miller,** F., Universit.-Mechan., Innsbruck.	Physikalische u. mathemat. Instrumente.
Oertling, Aug., Berlin, Oranienburgerstrasse 57 u. 58.	Chemische Waagen, Sextanten, mathematische Instrumente, Kreistheilungen.
Pauly-Stahel, G., Friedrichshafen a. B.	Fabrik elektr. Drähte.
Riefler, Clemens, Maria Rain u. München, Karlsplatz 29.	Fabrik mathemat. Instrumente, Reisszeuge.
Schmidt, Franz, & **Haensch,** Berlin S., Stallschreiberstrasse 4.	Spectral-Apparate, Polarisations-Apparate, Mikroskope.
***Schuckert,** Sigmund, Nürnberg.	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Galvanoplastik u. Lehranstalten.
Steinheil, C. A., & Söhne, München, Landwehrstrasse 31.	Optische und astronomische Instrumente.
Stöhrer, E., jun., Leipzig.	Apparate für Projection physik. Versuche.
Stollnreuther, C., & Sohn, München.	Physikalische Instrumente.
Vogel, C. & J., Berlin, Ritterstrasse.	Uebersponnene Drähte.
Weisser, J. G., Söhne, St. Georgen (bad. Schwarzwald).	Drehbänke für physikal. Laboratorien.
Wesselhöft, Mechaniker, Halle a. d. Saale.	Elektrische und akustische Apparate.

* Ein ausführliches Inserat befindet sich im Inseratentheile.


Digitized by Google

REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE & ASTRONOMISCHE INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN.

FÜNFZEHNTER BAND.

Inhalt des 11. Heftes

(mit Tafel XXIII).

MÜNCHEN. 1879.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Beitrag zur Kenntniss der inneren Reibung im Eisen.

Von

Jgnaz Klemenčič,

Assistenten am physikalischen Institute der Universität in Graz.

(Aus den Wiener Sitzungsberichten vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Bekanntlich sucht man die Dämpfung der Schwingungen fester Körper auf die elastische Nachwirkung zurückzuführen und die letztere durch eine Verschiebung der Moleküle nebst einer gleichzeitigen Verdrehung derselben um ihren Schwerpunkt zu erklären. Diese Ansichten hat bereits W. Weber in seinen bekannten Arbeiten (Pogg. Ann. Bd. 34 u. 54) aufgestellt. Es herrscht aber auch bezüglich des Vorganges der Magnetisirung eine Hypothese, die sich denselben ebenfalls als eine Drehung der Moleküle, resp. Molekularmagnete, um ihren Schwerpunkt vorstellt. Es schien mir daher eine Untersuchung über die Wechselbeziehung zwischen der Magnetisirung und dem logarithmischen Decremente λ der Torsionsschwingungen eines Eisendrahtes nicht uninteressant, zumal da durch die ausführlichen Versuche von Wiedemann (Pogg. Ann. Bd. 103 u. 106) ein Zusammenhang zwischen dem Magnetismus und der Torsion festgestellt worden ist. Auch die Arbeiten von H. Streintz (Wiener Sitzungsber. Bd. 69, auch Pogg. Ann. Bd. 153) und P. Schmidt (Wied. Ann. Bd. 2) über die innere Reibung in den Metallen liessen Beobachtungen früher erwähnter Art lohnend erscheinen.

Zu diesem Zwecke wickelte ich eine lange Magnetisirungsspirale auf ein 28^{mm} weites Messingrohr. Um die Drahtspirale bei den ziemlich starken Strömen, die zur Anwendung gekommen sind, vor Erwärmung zu schützen, wurde in das Rohr ein zweites, engeres (15^{mm} Durchmesser) concentrisch eingefügt und der Raum zwischen ihnen oben und unten, bis auf je eine kleine Oeffnung, um Wasser zu- und abfliessen zu lassen, abgeschlossen. Die Magnetisirungsspirale bestand

aus zwei Lagen 1,34^{mm} dicken Kupferdrahtes, und in jeder Lage liefen zwei Drähte knapp neben einander; es waren also eigentlich zwei Spiralen, die sich in ihrer Wirkung beinahe vollständig compensirten, wenn sie der Strom in entgegengesetzter Richtung durchfloss.

Das in der Drahtspirale circulirende Wasser kam von der Wasserleitung; seine Temperatur wurde vor dem Ein- und nach dem Ausflusse gemessen; es floss nämlich in beiden Fällen in gut verschlossene Glasgefässe, in die Thermometer getaucht waren.

Zur Untersuchung diente ein gut ausgeglühter, 1342^{mm} langer und 1,39^{mm} dicker Eisendraht. Er wurde durch ein Gewicht von beiläufig 2700^{gr} gespannt. Die Schwingungsdauer betrug 6,285 Sec. Den Draht umgab die früher beschriebene Magnetisirungsspirale und deckte ihn in einer Länge von 1215^{mm}. Das spannende Gewicht schützte ein Kasten vor Luftströmungen.

Ich konnte zunächst an diesem Drahte dieselben Erscheinungen beobachten, die schon H. Streintz und P. Schmidt (a. a. O.) bei anderen Metallen gefunden haben. Das logarithmische Decrement fiel in ungefähr vier Wochen von 0,00432, welchen Werth es gleich nach dem Ausglühen besass, auf 0,00227. Es wäre wahrscheinlich noch weiter gesunken, wenn ich es nicht durch stärkere Deformationen, die ich dem Drahte ertheilte, wieder erhöht hätte. Es war auch eine Abhängigkeit des λ von der Amplitude zu beobachten, und ebenso erwies sich die anfängliche Anregung auf den Werth des λ nicht ohne Einfluss.

Alle diese Umstände wurden bei der eigentlichen Untersuchung, welche darin bestand, dass ich den Draht im magnetischen und unmagnetischen Zustande Torsionsschwingungen ausführen liess und deren logarithmische Decremente bestimmte, berücksichtigt.

Da sich trotz der Wassercirculation innerhalb der Spirale dieselbe in Folge des Stromdurchganges etwas erwärmte, so wurden auch bei entgegengesetzter Einschaltung der beiden Drahtwindungen Beobachtungen gemacht, in welchem Falle wohl die Erwärmung, aber nicht die Magnetisirung das λ beeinflussen konnte.

In Tab. I ist eine Beobachtungsreihe in der Folge, wie sie ausgeführt wurde, mitgetheilt. Die drei Werthe des λ in jeder Rubrik wurden aus fortlaufenden, etwas über 13 Min. dauernden Beobachtungen bestimmt; die in den einzelnen Rubriken in gleicher Höhe stehenden Werthe entsprechen gleichen mittleren Schwingungsweiten.

Die zur Anwendung gekommene Stromstärke war nach magnetischem Maasse $= 111{,}2 \frac{mm^{\frac{1}{2}} mgr^{\frac{1}{2}}}{Sec.}$ und die elektromagnetische Scheidekraft für die Mitte der Spirale nach demselben Maasse $= 791{,}8 \frac{mgr^{\frac{1}{2}}}{mm^{\frac{1}{2}} Sec.}$

Tabelle I.

1	2	3	4	5	6
$\lambda = 0{,}002611$	$\lambda = 0{,}002612$	$\lambda = 0{,}002587$	$\lambda = 0{,}002587$	$\lambda = 0{,}002592$	$\lambda = 0{,}002598$
2596	2626	2580	2572	2611	2614
2552	2566	2532	2538	2590	2591
Mittel 0,002586	0,002601	0,002566	0,002566	0,002597	0,002601

Die Rubriken 1 und 6 enthalten die Beobachtungen ohne Strom, 2 und 5 bei entgegengesetzt, 3 und 4 bei gleich fliessendem Strome in den beiden Spiralen. Die Mittelwerthe der Resultate von 1, 6 und 2, 5 sind gleich, ein etwaiger Unterschied hätte nur von der Erwärmung der Spirale herrühren können; eine solche war auch vorhanden[1]); aber der Draht scheint ihrem Einflusse in der kurzen Zeit noch nicht gefolgt zu sein, trotzdem der weiche Eisendraht bei einer Erhöhung oder Erniedrigung der Temperatur das logarithmische Decrement sehr rasch ändert, was bei anderen Metallen nicht der Fall ist. Die Werthe von 3 und 4 sind etwas kleiner als die in den übrigen Rubriken; sie würden für eine Verminderung der inneren Reibung durch die Magnetisirung sprechen; allein die einzelnen Werthe stimmen zu wenig unter einander, um eine solche Behauptung mit Bestimmtheit aufstellen zu können. Man kann jedoch in dieser Beziehung Folgendes sagen:

Der Einfluss der Magnetisirung eines Eisendrahtes auf die Dämpfung seiner Torsionsschwingungen ist entweder gar nicht, oder nur in einem sehr geringen Grade vorhanden.

Der Strom wirkte nur während der 13 Min. dauernden Beobachtungen. Kamen durch die Magnetisirung Nachwirkungsdeformationen (die Bez. von P. Schmidt a. a. O.) in den Draht, so mussten sich ja diese gerade in den ersten Zeiten der Stromeinwirkung am bemerkbarsten machen. Um jedoch sicher zu sein, dass auch eine etwas

1) Das Thermometer am Ausflusse zeigte am Schlusse der Beobachtungen bei geschlossenem Strome eine Temperaturzunahme von 1,5—2°.

länger dauernde Magnetisirung die Dämpfung nicht ändert, liess ich den Strom einige Male durch mehr als eine halbe Stunde geschlossen. Dann hatte z. B. das λ bald nach Schluss des Stromes den Werth 0,002632 und gegen Ende 0,002641.

Auch rasch auf einander folgendes Schliessen und Oeffnen des Stromes zeigte sich in keiner Weise von einem Einflusse auf den Werth des λ. Die Anzahl der auf einander folgenden Unterbrechungen variirte zwischen 100 und 450.

Eben solche Resultate wie die vorstehenden erhielt ich auch mit einem Drahte aus hartem Eisen und einem aus Stahl.

Sowohl H. Streintz als auch P. Schmidt (a. a. O.) haben bei ihren Untersuchungen eine Zunahme des logarithmischen Decrementes mit der Temperatur beobachtet. In sehr ausführlicher Weise hat sich mit der Feststellung der Beziehungen zwischen der Temperatur und der Dämpfung der Torsionsschwingungen bei Metallen Pisati[1]) beschäftigt. Er hat seine Beobachtungen bis zu 300° ausgedehnt und für die von ihm untersuchten Metalle, sobald sie den elastischen Normalzustand erreicht haben, eine Zunahme des λ mit der Temperatur gefunden. Er bringt die Metalldrähte in diesen Normalzustand, indem er sie auf 300° erhitzt, unter fortwährendem Schwingen durch längere Zeit auf dieser Temperatur erhält und dann langsam abkühlen lässt. Drähte, die den erwähnten Zustand noch nicht erreicht haben, zeigen Unregelmässigkeiten, die namentlich beim weichen Eisen stark hervortreten. So zeigte ein solcher Draht für den Werth des λ für 100° ein Minimum. Als er dann auf die früher erwähnte Weise in den elastischen Normalzustand gebracht wurde, verhielt er sich gegenüber dem Temperatureinflusse ebenso wie die anderen Metalle, zugleich aber hat die Dämpfung der Torsionsschwingungen sehr bedeutend abgenommen.

Auch der weiche Eisendraht, der zu den früher beschriebenen Versuchen diente, wies den elastischen Normalzustand noch nicht auf, indem das logarithmische Decrement seiner Torsionsschwingungen mit der Temperatur sank. Die Temperaturerhöhung bewirkte ich

---

1) Sulla elasticita dei metalli a diverse temperature. Gazzeta chimica italiana T. VI (1876) e T. VII (1877).



dadurch, dass ich warmes Wasser im Zwischenraume der beiden Röhren circuliren liess. Zur Erwärmung des Wassers floss dasselbe vorerst in ein Gefäss, das sich in kochendem Wasser befand[1]). Durch Regulirung des Wasserzuflusses konnte die Temperatur in der den Draht umgebenden Spirale geändert werden. Um zu starke Luftströmungen in der Röhre zu vermeiden, wurde das obere Ende derselben mit Baumwolle zugedeckt.

Ich gebe in Tab. II einige Resultate. Zur Gewinnung derselben wurde der Draht nur durch etwa eine halbe Stunde auf einer constanten Temperatur erhalten und dann beobachtet. Es hat sich nämlich durch vorhergegangene Beobachtungen herausgestellt, dass der Draht das einer bestimmten Temperatur entsprechende λ ziemlich rasch annimmt. t gibt das Mittel der am unteren und oberen Thermometer abgelesenen Temperaturen. Die äussere Temperatur war im Mittel $= 19{,}6^0$.

Tabelle II.

t	λ
15,2	0,002210
30,1	0,001466
35,9	0,001163
40,9	0,000976
45,6	0,000903
47,9	0,000829
51,9	0,000771
14,9	0,002244

Trotzdem ich den Draht öfters durch mehrere Stunden bei einer Temperatur von $50 - 60^0$ schwingen liess, so zeigte er dennoch bei einer nachfolgenden niederen wieder nahezu denselben Werth für λ wie vor der Temperaturerhöhung. Es scheint also für die Temperaturen, innerhalb deren der elastische Normalzustand herbeigeführt werden kann, eine Grenze zu geben, oder es brauchen die Moleküle bei niederen Temperaturen eine viel längere Zeit, um in die den erwähnten Zustand bedingenden Lagen zu gelangen.

Wie schon Eingangs erwähnt, sucht man die Ursache der Dämpfung der Schwingungen, wie sie hier beobachtet worden sind, auf die elastische Nachwirkung zurückzuführen. P. Schmidt hat auch einen experimentellen Beleg für diese Ansicht geliefert, indem er

1) Siehe Neesen, Pogg. Ann. Bd. 153.

zeigte, dass sich das bekannte, von W. Weber für die elastische Nachwirkung aufgestellte Gesetz auch auf die durch das Verschwinden der Nachwirkungsdeformationen zu erklärende Abnahme des logarithmischen Decrementes anwenden lässt. Ebenso spricht auch die bisher beobachtete gleichzeitige Zunahme des λ und der elastischen Nachwirkung mit der Temperatur für eine Wechselbeziehung zwischen den beiden Erscheinungen.

Es schien mir der Mühe werth, auch das weiche Eisen bezüglich der elastischen Nachwirkung bei verschiedenen Temperaturen zu prüfen. Ich musste zwar im Vorhinein auf genaue quantitative Messungen verzichten, da der ganze Apparat nicht zu diesem Zwecke eingerichtet war, und da sich gerade das weiche Eisen im gewöhnlichen Zustande (nicht elastischen Normalzustande) sehr unregelmässig verhält; ich glaubte jedoch, wenigstens qualitative Beobachtungen machen zu können.

Zu diesem Behufe wurde das während der Schwingungsversuche den Draht spannende Gewicht weggenommen und an denselben ein Hebel, der sich zur Ertheilung der Torsion besser eignete, befestigt. Am Hebel befand sich in der Verlängerung des Drahtes ein Stift, der in einem Führungsloch steckte, das zugleich das Centrum eines Torsionskreises bildete. Natürlich schwebte im Falle des untordirten Drahtes der Stift vollkommen frei im Führungsloche.

Selbst kleine Torsionen hinterliessen dauernde Deformationen und nur zum geringsten Theile eine elastische Nachwirkung. Tab. III gibt eine Beobachtungsreihe für den Torsionswinkel 70° und für die Torsionsdauer = 3 Min. Die Torsion wurde einmal nach der einen, dann nach der anderen Seite ertheilt. Ferner wurde abwechselnd bei einer niederen und dann bei einer hohen Temperatur beobachtet. Jeder Werth der Tabelle ist das Mittel aus 6 Beobachtungen. t bedeutet dasselbe wie vorher. Unter *d. D.* sind die dauernden Deformationen in Theilen einer Millimeterscala angegeben. Endlich gibt die Rubrik *e. N.* die Anzahl der Scalentheile, um die sich die Ruhelage während 1,5, 4,5 und 10,5 Min. geändert hat, wobei zur Zeit 0,5 Min. nach dem Aufhören der Torsion mit der Beobachtung begonnen wurde.

Die Entfernung der Scala vom Spiegel = 1745^{mm}.

Die äussere Temperatur im Mittel = 17,5°.

Tabelle III.

t	$d. D.$	$e. N.$		
		1,5	4,5	10,5
14,2	107,5	1,36	2,02	2,4
14,2	105,8	1,48	2,09	2,5
14,3	113	1,7	2,41	2,95
14,3	113,3	1,61	2,24	2,65
14,2	108,8	1,61	2,19	2,56
14,2	106,5	1,57	2,1	2,61
14,2	106,9	1,42	1,96	2,38
Mittel: 14,23	108,8	1,54	2,14	2,58
51,3	108,8	1,22	1,9	2,44
51,6	105,3	0,97	1,71	2,3
49,4	111,5	1,21	1,86	2,38
50	113,4	1,12	1,68	2,22
49,8	111,2	1,22	1,86	2,47
Mittel: 50,4	110	1,15	1,8	2,36

Die Mittelwerthe der elastischen Nachwirkung sind bei höherer Temperatur etwas kleiner als bei niederer; sie weisen jedoch bei weitem nicht dieselbe Differenz auf wie die logarithmischen Decremente für die betreffenden Temperaturen. Es dürften die hier beobachteten Thatsachen und die Abnahme des logarithmischen Decrementes der Torsionsschwingungen eines im gewöhnlichen elastischen Zustande sich befindlichen Eisendrahtes mit der Temperatur kaum in einem innigen Zusammenhange stehen [1]).

Es möge noch eine Thatsache erwähnt werden, durch die das Eisen von anderen Metallen abweicht. H. Streintz (a. a. O.) fand, dass sich die Dämpfung der Torsionsschwingungen eines Drahtes durch das Ausglühen desselben vermindert. Das Eisen verhält sich umgekehrt. So bekam ich für einen harten Eisendraht $\lambda = 0{,}0007$. Nach dem Ausglühen aber und zwar am nächstfolgenden Tage $\lambda = 0{,}0022$ und nach 5 Tagen $= 0{,}002$. Der Draht besass natürlich nicht den elastischen Normalzustand.

1) Als ich die obenstehenden experimentellen Daten bereits fertig hatte, bekam ich eine Notiz über Beobachtungen bei Torsionsschwingungen eines geglühten Eisendrahtes von Dr. Messer aus den Berichten der naturf. Ges. zu Freiburg zu sehen. Die darin versprochenen näheren Angaben über seine Arbeit sind mir bis zur Zeit nicht bekannt geworden.

Das Mikroskop-Goniometer,

ein neues Instrument zum Messen von Krystallen mit spiegellosen Flächen.

Von

J. Hirschwald

in Berlin.

(Hiezu Tafel XXII.)

Neben der Anforderung einer ausreichenden Präcision wird der Werth der Apparate zur Bestimmung der mathematischen Constanten der Krystalle wesentlich bedingt werden durch eine möglichst uneingeschränkte Anwendbarkeit. Denn je zahlreicher und in je mannigfaltigerer Ausbildung die Objecte für die in Rede stehenden Untersuchungen verwendbar sind, desto eher wird es gelingen, unvermeidliche Beobachtungsfehler zu eliminiren und die in den Gesetzen der Krystallbildung liegenden Abweichungen von den durch äussere Störungen veranlassten Anomalien zu unterscheiden.

Vergleicht man in Rücksicht hierauf die Methoden der goniometrischen und optischen Bestimmung mit einander, so ergibt sich, dass die Resultate derselben von verschiedenem generellen Werth für die Krystallforschung sein werden.

Abgesehen von den Metallen zeigen die allermeisten Mineralspecies, und zwar in ihren mannigfachsten Vorkommnissen und Ausbildungen, eine hinreichende Pellucidität, um genaue optische Bestimmungen zu ermöglichen. Ein Gleiches gilt von fast allen künstlichen Verbindungen. Diese Ausgiebigkeit des Materials hat dahin geführt, die optischen Constanten in Abhängigkeit von gewissen, bisher nicht näher bestimmten Verhältnissen des individuellen Krystallbaues als vielfach variable Werthe erkennen zu lassen.

Durchaus anders verhält es sich mit der goniometrischen Untersuchung. Die Methode derselben bringt es mit sich, dass nur Individuen mit ausgezeichnet spiegelnden Flächen zur Messung

verwendet werden, und indem wir so unter Hunderten von regelmässig und ebenflächig gebildeten Krystallen einzelne nach bestimmter Eigenschaft auswählen, sind zugleich alle übrigen von der Winkelmessung ausgeschlossen. Ueberdies sind Krystalle mit völlig spiegelnden Flächen, zumal in häufigeren Vorkommnissen, nicht allen Mineralspecies eigen, und es gibt viele derselben, deren gesammte goniometrische Kenntniss auf einzelnen Messungen beruht.

Läge es demnach schon im Interesse der fundamentalen Winkelbestimmung, die Messungen auf ein grösseres Untersuchungsmaterial ausdehnen zu können, als es die Individuen mit gut spiegelnden Flächen liefern, so würde es für die Lösung mannigfacher Probleme der Krystallforschung von Interesse sein, die Krystalle in ihren verschiedenen Ausbildungstypen und Vorkommnissen in systematischer Weise goniometrisch zu untersuchen, und es wäre hiedurch vielleicht auch die Möglichkeit gegeben, den Beziehungen nachzuforschen, welche aller Wahrscheinlichkeit nach zwischen dem variabeln optischen Verhalten und den Winkelverhältnissen bestehen.

Demnach erscheint es als eine nicht unwichtige Aufgabe, eine Methode der Krystallmessung zu finden, für welche die Reflexionsfähigkeit der Flächen keine nothwendige Vorbedingung sei.

Zieht man die Hilfsmittel in Betracht, deren sich die Experimentalphysik zur Orientirung einer Fläche im Raume bedient, worauf ja im Wesentlichen die Krystallmessung beruht, so findet man, dass dieselben sämmtlich der für den vorliegenden Zweck erforderlichen Genauigkeit entbehren. Dagegen liess sich erwarten, dass die Empfindlichkeit eines geeignet construirten Mikroskops auf genaue Einstellung eines ebenflächigen Objectes gross genug sein würde, um dieses Instrument für die Krystallmessung verwerthbar zu machen.

Ein Mikroskop mit Mikrometerschraube, deren Umdrehungen an einem getheilten Kreise abgelesen werden konnten, wurde mit einem der gebräuchlichen Linsensysteme von 300 facher Vergrösserung versehen, und es ergab sich, dass eine Veränderung der genauen Einstellung von $0{,}02^{mm}$ hinreichte, um eine merkliche Undeutlichkeit des Bildes zu bewerkstelligen. Denkt man sich also als Object eine Krystallfläche von beispielsweise 10^{mm} Breite, von den parallelen Kanten A, B begrenzt, und es wäre das Mikroskop genau auf die der Kante A zunächst liegenden Theile der Fläche eingestellt, so wird es durch Drehung der letzteren, unter Voraussetzung einer

geeigneten Construction des Apparates, möglich sein, auch den an *B* liegenden Flächentheil, innerhalb der Fehlergrenze von 0,02^{mm}, in die deutliche Sehweite zu bringen. Auf diese Weise wäre aber die Fläche selbst senkrecht zur Achse des Mikroskops eingestellt, vorausgesetzt dass die Kante *A* diese Lage gehabt hätte. Der maximale Fehler der doppelten Einstellung ist daher durch die Tangente des Abweichungswinkels (α) ausgedrückt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0{,}02 \cdot 2}{10}$$

$$\alpha = 13 \text{ Min. } 46 \text{ Sec.}$$

Weitere Versuche in dieser Richtung ergaben, dass bei zweckmässiger Wahl des Linsensystems eine bei weitem grössere Genauigkeit, selbst für kleinere Krystalle, sich erreichen lässt, und es ist daher dieses Princip dem nachstehend beschriebenen Instrument zu Grunde gelegt worden.

Construction.

Das Mikroskop-Goniometer Taf. XXII besteht im Wesentlichen aus drei Theilen: dem Messkreise mit Krystallträger, dem Mikroskop mit Schlittenführung und dem Centrirfernrohr, welche Theile sämmtlich auf einer gemeinsamen metallenen Grundplatte befestigt sind.

1. Der Messkreis. Derselbe ist im Allgemeinen dem Wollaston'schen Goniometer entlehnt und kann auch selbständig zu Reflexionsmessungen benutzt werden. Die Theilung gestattet eine Ablesung von einzelnen Minuten. Zur genauen Einstellung dient die Mikrometervorrichtung *J*. Um einen grösseren Raum zwischen Kreis und Mikroskop zu gewinnen, ist ersterer rechts vom Träger angebracht. Die Construction selbst ist eine äusserst stabile, da die geringsten Schwankungen des an der Kreisachse befestigten Krystalls die genaue mikroskopische Einstellung behindert. Der Krystallträger ist nach dem Petzval'schen Princip construirt. Er zerfällt in zwei Theile: dem Kugelsegment *A*, an vier Armen beweglich, und der Planscheibe *B*, die eine allseitige Verschiebung in einer zur Achse des Kreises rechtwinkligen Ebene ermöglicht.

2. Das Mikroskop. Es steht auf einem Doppelschlitten *E*, *D* und ist mittelst dieser, ebenfalls sehr sorgfältig und solide construirten Vorrichtung genau parallel der Kreisachse und rechtwinklig zu derselben verschiebbar, so dass es möglich ist, eine horizontal eingestellte Krystallfläche nach beiden Richtungen und in ganzer Ausdehnung mit

dem Mikroskop zu bestreichen. Die Mikrometerschraube F hat ein Windungsintervall von $0{,}4^{mm}$ und trägt einen getheilten Kreis, mittelst dessen $0{,}004^{mm}$ Hebung oder Senkung des Mikroskops bestimmbar ist. Das Ocular enthält einen parallel der Achse des Messkreises ajustirten Faden, der für die Folge kurzweg als Ocularfaden bezeichnet werden soll.

Die Theilung bei G gibt die Verschiebung des Schlittens E in halben Millimetern an; bei der Einstellung auf 0 fällt der Ocularfaden genau in die Verticalebene der Messkreisachse. Diese Vorrichtung kann demnach zur axialen Parallelstellung der zu messenden Kante, sowie zur Controle ihrer Centrirung dienen. Mittelst der Schraube H ist der untere Schlitten D auf der Grundplatte festzustellen.

Das Linsensystem hat eine 350fache, nach Ausschaltung der unteren Objectivlinse eine 200fache Vergrösserung. Der Anforderung grösstmöglicher Empfindlichkeit des Systems auf genaue Einstellung steht die Bedingung eines nicht zu kleinen Focalabstandes entgegen. Letzteres ist sowohl zum Zweck einer guten Oberflächenbeleuchtung für opake Krystalle, als auch des bequemeren Arbeitens wegen erwünscht.

Das gewählte System zeigt bei 350facher Vergrösserung einen Focalabstand von $1{,}2^{mm}$ und eine Empfindlichkeit der Einstellung von $0{,}004^{mm}$, bei 200facher Vergrösserung einen Fokalabstand von 6^{mm} und eine Empfindlichkeit von $0{,}008^{mm}$[1]).

Zur Beleuchtung durchsichtiger Krystalle dient ein auf dem Schlitten E befestigter Planspiegel, für undurchsichtige wird eine starke Beleuchtungslinse angewendet. Dieselbe ist mit doppeltem Kugelscharnier an einem besonderen Stativ befestigt.

3. Das Centrirfernrohr K, mit verstellbarem Fadenkreuz. Letzteres ist genau in der Achse des Messkreises ajustirt. Die Objectivlinse kann durch eine andere von kürzerer Brennweite ersetzt werden, um der verschiedenen Sehweite für grössere und kleinere Krystalle zu entsprechen. Das Fernrohr ist ebenfalls mittelst eines Schlittens auf der Grundplatte C befestigt[2]).

1) Da die Präcision des Goniometers vor allem von der Construction des Linsensystems abhängig ist, so darf von weiteren Versuchen in dieser Richtung eine Vervollkommnung des Instrumentes erwartet werden.

2) Das Instrument ist von Herrn Mechaniker Fuess (Berlin, Alte Jakobstrasse 109) ausgeführt und von demselben zu beziehen. Für genauere Reflexionsmessungen wird auf Wunsch ein besonderes Fernrohr beigegeben, das an Stelle des Mikroskops auf den Schlitten aufgeschoben werden kann.



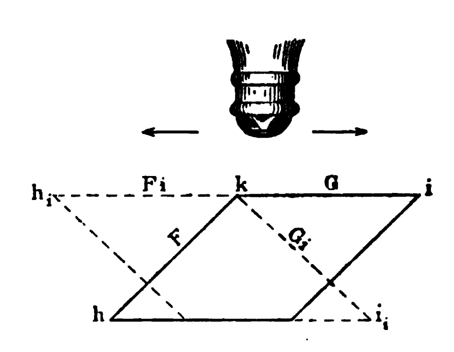
Methode der Messung.

Die zu messende Kante des an dem Träger *A* befestigten Krystalls wird mittelst des Ocularfadens axialparallel eingestellt. Bei einer Drehung des Krystalls muss Kante und Ocularfaden stetig parallel bleiben. Man controlirt die G e n a u i g k e i t der Ajustirung, indem man das Mikroskop auf eine der tautozonalen Krystallflächen einstellt und mittelst des Schlittens *D* axialparallel verschiebt. Das Bild der Fläche muss hiebei stets gleiche Schärfe behalten.

Nunmehr wird die zu messende Kante centrirt. Zu dem Ende verschiebt man die Planscheibe *B* des Krystallträgers, bis das Fadenkreuz des Fernrohrs *K* sich mit der Kante deckt. Behufs Controle der genauen Centrirung wird das Mikroskop an der Theilung *G* auf *O* gestellt; es fällt alsdann der Ocularfaden in die axiale Verticalebene. Dreht man nun den Krystall, so muss bei genauer Centrirung Faden und Krystallkante in steter Deckung bleiben. Kleinere Correcturen sind unter dem Mikroskop leicht auszuführen.

Es erfolgt nunmehr die eigentliche Messung, wobei die Schraube *H* am unteren Schlitten festgezogen wird, so dass das Mikroskop nur noch vertical zur Kreisachse verschiebbar bleibt.

Die zu messende Kante *k* sei gebildet durch die Flächen *F* und *G*, die andererseits von den tautozonalen Kanten *h*, *i* begrenzt werden.



Nachdem das Mikroskop auf die der Kante *k* zunächst liegenden Theile der Fläche *G* genau eingestellt ist, schiebt man dasselbe über die Fläche *G* hin und dreht nunmehr den Krystall, bis auch die der Kante *i* zunächst liegenden Flächentheile ein scharfes Bild geben. Ist auf diese Weise, eventuell unter Wiederholung des Verfahrens, die Fläche *G* genau fixirt, so wird der Krystall mittelst der Kreisachse des Goniometers gedreht, bis auch die Fläche *F* in gleicher Weise genau eingestellt ist. Der am Goniometer ablesbare Drehungswinkel ist der Supplementwinkel der zu messenden Kante.

Um die Genauigkeit der Messung zu erörtern, nehmen wir an, dass der maximale Fehler der mikroskopischen Einstellung, je nach

der Beschaffenheit der Krystallfläche, 0,004 bis 0,012^{mm} betrage (siehe oben). Für jede Messung bedarf es zweier Einstellungen. Den ungünstigsten Fall vorausgesetzt, dass nämlich beide Fehler sich summirten, würde die maximale Ungenauigkeit des Messungsresultates annähernd durch die Formel gegeben sein: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{u \cdot 2}{x}$, wobei u den Fehler der Einstellung, x die Durchschnittsbreite der Krystallflächen bedeutet.

Für $x = 10^{mm}$ und $u = 0{,}004$ ist $\alpha = 2' 45''$
„ $x = 5$ „ $u = 0{,}004$ „ $\alpha = 5' 30''$
„ $x = 10$ „ $u = 0{,}008$ „ $\alpha = 5' 30''$
„ $x = 5$ „ $u = 0{,}008$ „ $\alpha = 11' 0''$.

In Wirklichkeit erweist sich dieser Fehler aber wesentlich kleiner, da die Ungenauigkeiten der Einstellung sich zum Theil aufheben, so dass man bei Wiederholung der Messungen an völlig ebenflächigen Krystallen meistens nur Differenzen von 1 Minute und darunter erhält.

Anmerkungen zur Ausführung der Messung.

1. Die ebene Beschaffenheit der Krystallflächen wird controlirt, indem man letztere nach ihrer genauen Einstellung in ganzer Ausdehnung mit dem Mikroskop bestreicht und sich überzeugt, ob alle Theile gleich scharfe Bilder geben. Ist dies an einer Stelle nicht der Fall, so kann man mittelst der Mikrometerschraube des Mikroskops genau einstellen und an der Kreistheilung F das Maass der Unebenheit ablesen. Ebenso lässt sich bei regelmässig gekrümmten Flächen unter Zuhilfenahme der Theilung G der Krümmungsradius bestimmen.

2. Zur Erzielung einer genauen mikroskopischen Einstellung empfiehlt es sich, die Krystallflächen mit einem feinen Pulver zu bestäuben. Für durchsichtige Krystalle wendet man zweckmässig sehr fein geriebene Lindenkohle an, die mittelst eines kleinen, mit Röhre versehenen Gummiballchens aus einiger Entfernung aufgeblasen wird. Die mikroskopische Einstellung geschieht nicht auf die Kohlenpartikel selbst, sondern auf die Berührungsstellen derselben mit der Krystallfläche, so dass hiebei jede Ungenauigkeit ausgeschlossen ist.

Für undurchsichtige Krystalle verwendet man, namentlich wenn dieselben dunkel gefärbt sind, statt der Kohle fein geriebenen Gummi arabicum. Mit der Linse oberflächlich beleuchtet, erscheinen die

Gummistäubchen hell und durchsichtig und gestatten so eine recht präcise mikroskopische Einstellung.

3. Auch Krystalle mit regelmässig gekörnten, gestreiften oder polyëdrischen Flächen sind messbar. Man stellt das Mikroskop auf die Vertiefungen oder Erhabenheiten ein, je nachdem man sich überzeugt hat, dass die einen oder anderen in einer Ebene liegen (siehe Anmerkung 1).

4. Da die Krystallflächen je nach ihrer Beschaffenheit eine verschiedene Genauigkeit der mikroskopischen Einstellung gestatten, so ist es von Interesse, den Grad derselben in jedem einzelnen Falle mit Hilfe der Mikrometertheilung *F* festzustellen. Bestimmt man alsdann die Breite der Krystallflächen am Maassstabe *G*, so lässt sich aus diesen beiden Factoren der maximale Fehler der Winkelmessung berechnen. Unter sonst gleichen Bedingungen werden daher schmale Krystallflächen ein weniger genaues Resultat liefern als solche von grösserer Ausdehnung, wie andererseits durchsichtige Krystalle eine präcisere mikroskopische Einstellung gestatten als opake.

Zur Theorie der Tafelwagen.

Von

Johann Endlweber,

k. k. Aich-Inspector für Oberösterreich und Salzburg.

Tafelwagen oder oberschalige Wagen werden speciell jene gleicharmigen Wagen genannt, bei welchen die zur Aufnahme des abzuwägenden Körpers und der Gewichte bestimmten Schalen sich oberhalb des Wagebalkens befinden. Es ist nothwendig, beides zu betonen, da sonst auch Brückenwagen gewöhnlicher Construction in diese Kategorie eingereiht werden könnten, nachdem bei diesen letzteren allerdings die zur Aufnahme des Körpers bestimmte „Brücke" oberhalb des Hebelsystems liegt, während jedoch die Wagschale wie bei einer gewöhnlichen Balkenwage aufgehängt ist. Sowohl bei den Brückenwagen als auch bei den Tafelwagen kommt es wesentlich darauf an, eine Combination von ein- und zweiarmigen oder lauter doppelarmigen Hebeln zu ersinnen, durch welche der Einfluss der verschiedenen Stellung der Lasten auf den Schalen paralysirt wird. Durch eine Veränderung der Lage des Gewichtes wird nämlich ein mit dieser variirendes Drehungsmoment erzeugt, welches naturgemäss die Indication der Wage beeinflusst, da eine scheinbare Veränderung in der Länge des betreffenden Wagebalkens zu Tage tritt. In der That zeigen die älteren unvollkommenen Arten von Tafelwagen z. B. die Roberval'sche Construction nicht unbedeutende Variationen in der Gewichtsangabe eines und desselben Körpers, je nachdem derselbe in Mitte der Wageschale ruht oder gegen den Rand derselben verschoben wird. Die in neuerer Zeit aufgetauchten Systeme von oberschaligen Wagen haben diese Klippe einerseits durch die Construction an und für sich, andererseits durch die exacte Ausführung glücklich vermieden, so dass behauptet werden kann, dieselben entsprechen den an eine Tafelwage zu stellenden Anforderungen zur Genüge. Dass man nicht die Empfindlichkeit einer Präcisionswage fordern dürfe, erscheint wohl

durch die bedeutende Anzahl von Schneiden begründet, welche eine in der Praxis keineswegs zu vernachlässigende Reibung erzeugen.

Unter gewissen Voraussetzungen werden die Angaben einer Tafelwage vollauf mit jenen einer gewöhnlichen besseren Balkenwage hinsichtlich der Genauigkeit concurriren können; es darf jedoch nicht übersehen werden, dass bei gewissen Stellungen der Belastung jede oberschalige Wage ohne Ausnahme den Dienst als Wage versagt. Dies tritt dann ein, wenn der Schwerpunkt der Last ausserhalb eines bestimmten Dreieckes liegt, welches gewöhnlich als „Belastungsdreieck" bezeichnet wird. Dieses Dreieck hat als Ecken die Horizontalprojectionen der drei Unterstützungspunkte einer jeden der beiden Wageschalen, welche bekanntlich zur Herstellung der stabilen Lage unerlässlich sind. Zwei dieser Stützpunkte werden, wie sich bei Besprechung der einzelnen Constructionen ergeben wird, durch zwei an dem eigentlichen Wagebalken in gleichem Abstande von der Mittelschneide angebrachte Schneiden, deren scharfe Kanten somit genau in einer geraden, zur Balkenachse senkrechten Linie liegen müssen, hergestellt, während die Gewinnung des dritten Unterstützungspunktes die Verschiedenheit der nachstehend zu besprechenden zwei Systeme von Tafelwagen begründet. Durch diese beschränkte Fläche für den Ort des Schwerpunktes oder richtiger für dessen Horizontalprojection ist somit auch die Grösse der Wagschale einigermassen bestimmt.

Die im Nachstehenden zu erörternden Constructionsarten von Tafelwagen sind diejenigen, welche in Oesterreich einer amtlichen Verification unterzogen werden dürfen, nämlich die oberschaligen Wagen nach Pfanzeder und nach Beranger, welche, obwohl constructiv principiell verschieden, doch eine Anzahl Eigenschaften gemeinsam besitzen, wie sich zeigen wird. Der Gang der Entwickelung wird so viel als möglich parallel sein, und behufs Vermeidung weitläufiger Wiederholungen werden bei Erörterung des Systems Beranger manche Punkte oberflächlicher berührt, welche bereits bei Besprechung der Pfanzeder'schen Construction näher gewürdigt wurden.

Zur Zusammenstellung der elementar-theoretischen Darlegung der Eigenschaften oberschaliger Wagen wurde ich hauptsächlich durch den Umstand veranlasst, dass eine solche in keinem physikalischen Lehrbuche existirt und die vorhandenen verhältnissmässig weitläufigen Ableitungen ausschliesslich mathematische, also schwerlose Hebel voraussetzen, wodurch die auf die Lage der Schneiden bezüglichen Sätze

nicht gefunden werden konnten. Ich habe übrigens nicht die Absicht, eine vollkommene Theorie der in Rede stehenden Wagen zu geben; ich muss dies anderen Händen überlassen. Aus diesem Grunde habe ich mir auch erlaubt, einige Vereinfachungen in den Voraussetzungen zu machen, welche vom Standpunkte der exacten Theorie vielleicht nicht gutgeheissen werden. Hieher gehört zunächst die Vernachlässigung des Gewichtes der Gehänge etc. Wesentlicher vom Standpunkte der Theorie ist die zweite Specialisirung, welche die Rechnung sehr vereinfacht und das Resultat dennoch rein hervortreten lässt. Diese Bedingung bezieht sich, wie später nochmals hervorgehoben werden wird, auf die Anordnung der Schneiden an dem Hauptbalken, welche mit Ausnahme der Mittelschneide als in einer einzigen Ebene liegend angenommen werden. Da aber im Laufe der Entwickelung die Bedingung gefunden werden wird, dass sämmtliche Schneiden des Hauptbalkens, also auch die Mittelschneide, in einer und derselben Ebene liegen müssen, soll die Wage richtig functioniren, so ist eine Beeinflussung des Resultates durchaus nicht vorhanden, und glaube ich hiedurch eine Rechtfertigung dieser specialisirten Annahme gegeben zu haben.

I. Die Tafelwage nach Pfanzeder.

Unter den Systemen oberschaliger oder Tafelwagen, deren Verwendung im öffentlichen Verkehre in Oesterreich und auch im deutschen Reiche gesetzlich gestattet ist, nehmen wohl die Pfanzeder'schen Constructionen hinsichtlich der Verbreitung den ersten Platz ein. Pfanzeder hat im Laufe der Zeit drei verschiedene Constructionsarten von Tafelwagen erdacht, welche durch die Anzahl der vorhandenen Schneiden (16, 14 oder 12) unterschieden werden; der Grundgedanke ist jedoch bei allen derselbe und findet seinen Ausdruck in der Art der Herstellung eines dritten Unterstützungspunktes für den Wagschalenträger, der in zwei Punkten auf dem Hauptbalken aufliegt. Um die übereinstimmenden und auch die verschiedenen Constructionsdetails der drei nach Pfanzeder benannten Tafelwagen in Kürze darstellen zu können, müssen zuerst die Begriffe „Schalenträger“ und „Leitbalken oder Nebenbalken“ definirt werden.

Schalenträger werden jene (bei Pfanzeder-Wagen gewöhnlich in Form eines flachen Ringes hergestellten) Körper genannt, auf welche erst die eigentliche Schale zu liegen kommt und welche mittelst

Schneiden und Gehängen (sogenannter „Mitnehmer") mit den verschiedenen Balken der Wage in Verbindung stehen.

Unter Leitbalken, Nebenbalken oder Leithebel werden bei oberschaligen Wagen jene Balken verstanden, durch deren Anwendung einerseits eine richtige von der Stellung des Gewichtes auf der Wageschale unabhängige Gewichtsangabe als auch eine Parallelführung der Wageschalen oder der Schalenträger erzielt werden soll.

Die Eigenthümlichkeit der Pfanzeder'schen Wagenconstructionen besteht nun darin, dass jeder Schalenträger mittelst eines an demselben befestigten Fortsatzes in ein Gehänge an einem Arme des Leitbalkens der anderen Seite der Wage eingreift, während er auf dem gabelförmigen Hauptbalken in zwei Schneiden aufruht, deren Abstand von der Mittelschneide des Hauptbalkens gleich sein muss. Die Leitbalken befinden sich stets unter dem Hauptbalken. Es wirkt nun eine Componente p_2 der z. B. auf der linken Schale befindlichen Last durch Vermittlung des rechtsseitigen Leitbalkens auf den rechten Arm des Hauptbalkens, und analog wird es sich mit einer Componente der rechts befindlichen Last Q und dem linken Arme des Hauptbalkens verhalten. Die eingangs erwähnte Verschiedenheit der drei nach Pfanzeder benannten Systeme von oberschaligen Wagen besteht in der Verbindung des Leithebels der einen Seite mit dem gleichartig gelegenen Arme des Hauptbalkens, welche mittelst der sogenannten „Mitnehmer" entweder direct (Pfanzeder-Wage mit 16 Schneiden) oder erst durch Vermittlung des Schalenträgers (Wagen mit 14 und 12 Schneiden) erfolgen kann. Es soll nun zunächst die ältere Construction der Pfanzeder'schen Tafelwagen (mit 16 Schneiden) näher besprochen werden.

1. Die Wage mit 16 Schneiden.

Die Pfanzeder'sche Tafelwage mit 16 Schneiden, deren Schema in Fig. 1 dargestellt ist, besteht aus dem Wagebalken ACB, welcher bei A und B je zwei in gleichem Abstande von C befindliche, der Mittelschneide C parallele und zur Balkenachse senkrecht stehende Schneiden besitzt, auf welchen die Schalenträger T_1 und T_2 mit ihren Lagern ruhen. Der Hauptbalken der Wage besteht entweder aus zwei fest mit einander verbundenen Wagebalken, oder derselbe ist in einiger Entfernung von A und B gegabelt, um die erwähnten zwei Schneiden auf jeder Seite anbringen zu können. Die beiden Leit-

balken $E_1C_1F_1$ und $E_2C_2F_2$ drehen sich in den Punkten C_1 und C_2 um Schneiden, welche wie die einer gewöhnlichen Balkenwage in

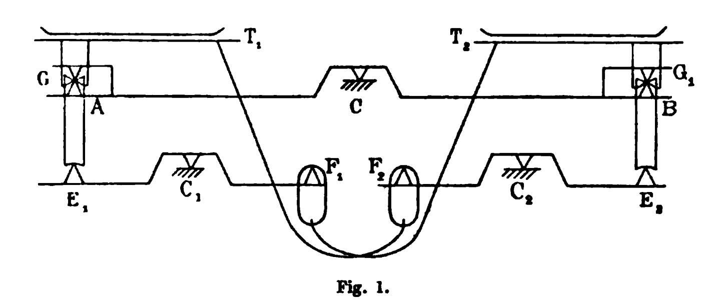


Fig. 1.

Lagern ruhen. Da diese Schneiden sehr lang sind, was auch von C gilt, so werden bei Bestimmung der Schneidenanzahl C, C_1 und C_2 als je zwei Schneiden gezählt. Die Führungs- oder Leitbalken sind mit dem Hauptbalken ACB durch die „Mitnehmer“ E_1G und E_2G_1 verbunden, und ist deshalb an den beiden Enden des Hauptbalkens zwischen den als Unterstützung der Schalenträger dienenden Schneiden je eine nach abwärts gekehrte Schneide angebracht, welche mit den vertical darunter liegenden äusseren Endschneiden der Leitbalken, wie erwähnt, durch die Mitnehmer in Verbindung stehen. Die anderen, nach innen liegenden Endschneiden F_1 und F_2 eines jeden Nebenbalkens stehen, wie bereits bekannt, mit dem Schalenträger der anderen Seite der Wage in der bereits besprochenen Verbindung.

In den folgenden Entwickelungen wird angenommen, dass die Schwerpunkte der drei Balken (nämlich des Haupt- und der zwei Leitbalken) nicht genau unterhalb des Drehpunktes derselben liegen, wenn die Wage auf Null steht, sondern dass sie um gewisse Längen rechts von den betreffenden Drehpunktsverticalen liegen. Dieselben werden in der Richtung der Endschneiden des Balkens gemessen. Die Längen sämmtlicher Hebelarme werden als ungleich gross vorausgesetzt, um zu möglichst allgemeinen Formeln zu gelangen. Bezüglich der Schneiden wird jedoch festgehalten werden, dass dieselben genau senkrecht zu den zugehörigen Wagebalken stehen und dass die drei an jedem Ende des Hauptbalkens befindlichen Schneiden (wovon zwei als Unterstützungspunkte des Schalenträgers, die dritte aber zur Aufnahme des Mitnehmers dient) mit ihren scharfen Kanten in einer und derselben Ebene liegen. Als Balkenachse wird die Schnittlinie dieser horizontalen Ebene mit jener verticalen Ebene angenommen, welche

durch den Schwerpunkt senkrecht auf die Richtung der Schneiden gedacht werden kann. Es wird nun vorausgesetzt, die Wage (Fig. 2)

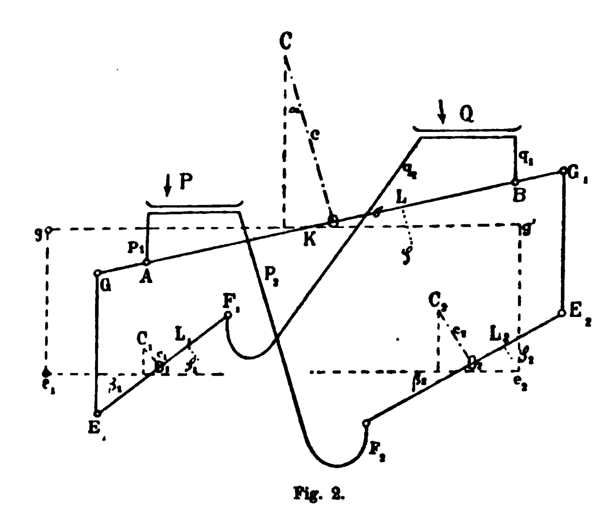


Fig. 2.

oder eigentlich deren Hauptbalken weiche um einen Winkel α von der Nullstellung ab, befinde sich jedoch im Zustande des Gleichgewichtes; die Leithebel haben sich sodann um die Winkel β_1 und β_2 gedreht, deren Abhängigkeit von α später definirt werden soll. Man setze nun nach der Zeichnung:

$$
\begin{array}{ll}
GO = L & G_1O = L_1 \\
AO = l & BO = l_1 \\
CO = c & OL = \sigma \\
E_1O_1 = \lambda_1 & LS = s \\
O_1F = \lambda_1' & O_2F_2 = \lambda_2 \\
O_1L_1 = \sigma_1 & E_2O_2 = \lambda_2' \\
L_1S_1 = s_1 & O_2L_2 = \sigma_2 \\
C_1O_1 = c_1 & L_2S_2 = s_2 \\
 & C_2O_2 = c_2.
\end{array}
$$

Die Abstände der Schwerpunkte in der Ruhelage der Wage von den durch die Drehpunkte gezogenen zur Balkenachse senkrechten Linien sind also beziehungsweise σ, σ_1, σ_2, die Entfernungen derselben von den Balkenachsen nach abwärts s, s_1, s_2, während sich die Drehpunkte der Balken um die Distanzen c, c_1 und c_2 über den Verbindungslinien der respectiven Endschneiden befinden.

Jede der Belastungen P und Q wird in zwei parallele Componenten zerlegt, von welchen die eine (p_1) auf den Hauptbalken (in A), die andere dagegen auf die eine Schneide des Leithebels der Gegenseite wirkt. Es muss jedoch für jede Lage des Gewichtes P die Gleichung erfüllt sein:

$$P = p_1 + p_2. \tag{1}$$

Und analog muss für die Belastung Q stattfinden:

$$Q = q_1 + q_2. \tag{2}$$

Sämmtliche vier Kräfte p_1, p_2, q_1, q_2 wirken natürlich in der Richtung der Schwere nach abwärts, und haben p_2 und q_2 somit das Bestreben, die Punkte F_1 und F_2 nach abwärts zu drehen, mithin E_1 und E_2 zu heben. Die Wirkung von q_2 in G, welche mit x bezeichnet werden soll, ist also entgegengesetzt zu derjenigen von p_1 auf den Hebel ACB. Dasselbe gilt von p_2, welche Kraft in G_1 mit der Stärke y angreift, im Vergleiche mit q_1. Soll nun der Hauptbalken in der von der Ruhelage um einen Winkel α abweichenden Stellung im Gleichgewichte sich befinden, was gleichzeitig auch für jeden Leithebel der Fall sein muss, so muss die Bedingung erfüllt sein:

$$p_1(l - c \operatorname{tg} \alpha) - x(L - c \operatorname{tg} \alpha) = q_1(l_1 + c \operatorname{tg} \alpha) - y(L_1 + c \operatorname{tg} \alpha) + \\ + S[\sigma + (c + s) \operatorname{tg} \alpha]. \tag{3}$$

Die Werthe von x und y in dieser Relation werden durch Betrachtung des Gleichgewichtszustandes der beiden Leithebel erhalten, und muss für x an dem Balken $E_1 O_1 F_1$ die Gleichung stattfinden:

$$x = q_2 \frac{\lambda_1' + c_1 \operatorname{tg} \beta_1}{\lambda_1 - c_1 \operatorname{tg} \beta_1} + S_1 \frac{\sigma_1 + (c_1 + s_1) \operatorname{tg} \beta_1}{\lambda_1 - c_1 \operatorname{tg} \beta_1}. \tag{4}$$

Analog ergibt sich für y und den Leithebel $E_2 O_2 F_2$:

$$y = p_2 \frac{\lambda_2 - c_2 \operatorname{tg} \beta_2}{\lambda_2' + c_2 \operatorname{tg} \beta_2} - S_2 \frac{\sigma_2 + (c_2 + s_2) \operatorname{tg} \beta_2}{\lambda_2' + c_2 \operatorname{tg} \beta_2}. \tag{5}$$

Werden die durch die Ausdrücke (4) und (5) dargestellten Werthe von x und y in die Gleichung (3) substituirt unter gleichzeitiger Berücksichtigung der Relationen (1) und (2), so entsteht durch Elimination der Grössen p_1 und q_1 der folgende Ausdruck als Bedingung des Gleichgewichtes:

$$P(l - c\,\mathrm{tg}\,\alpha) + p_2\left[\frac{\lambda_2 - c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\lambda_2' + c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}(L_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha) - (l - c\,\mathrm{tg}\,\alpha)\right] -$$

$$- S_1 \frac{\sigma_1 + (c_1 + s_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\lambda_1 - c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1}(L - c\,\mathrm{tg}\,\alpha) =$$

$$= Q(l_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha) + q_2\left[\frac{\lambda_1' + c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\lambda_1 - c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1}(L - c\,\mathrm{tg}\,\alpha) - (l_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha)\right] +$$

$$+ S_2 \frac{\sigma_2 + (c_2 + s_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\lambda_2' + c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}(L_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha) + S[\sigma + (c + s)\,\mathrm{tg}\,\alpha]. \quad (6$$

Die Grössen p_2 und q_2 sind Functionen der Lage der Gewichte P und Q auf den Wageschalen. Wird z. B. P verschoben, so ändern sich p_1 und p_2, jedoch derart, dass stets die Bedingung (1) erfüllt ist. In Folge dieser Veränderlichkeit von p_2 und q_2 wäre die Ausführung einer correcten Gewichtsbestimmung auf einfache und sichere Weise unmöglich. Um die Wage brauchbar zu machen, muss der Einfluss dieser variabeln Werthe p_2 und q_2, welche im Allgemeinen nicht Null sind, eliminirt werden, was nur durch Nullsetzung der Coëfficienten von p_2 und q_2 in der Gleichung (6) erreicht werden kann. Man erhält dergestalt die folgenden zwei Bedingungsgleichungen für die Unveränderlichkeit der Gewichtsangaben bei Verschiebung der Belastungen:

$$\frac{\lambda_2 - c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\lambda_2' + c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}(L_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha) = l - c\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad (7$$

$$\frac{\lambda_1' + c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\lambda_1 - c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1}(L - c\,\mathrm{tg}\,\alpha) = l_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad (8$$

aus welchen Relationen durch Ausführung der angedeuteten Operationen die folgenden Bedingungsgleichungen hervorgehen:

$$\lambda_2 L_1 - \lambda_2' l - (L_1 + l)\,c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2 + (\lambda_2' + \lambda_2)\,c\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0 \quad (9$$

$$\lambda_1' L - \lambda_1 l_1 + (L + l_1)\,c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - (\lambda_1' + \lambda_1)\,c\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0. \quad (10$$

Wie bereits erwähnt, sind β_1 und β_2 vorläufig noch unbestimmte Functionen von α. Es sollen nun die Gleichungen (9) und (10) für jeden Werth von α, also auch für jeden Werth von β_1 und β_2 erfüllt sein; dies kann nur erreicht werden, wenn die von den veränderlichen Grössen unabhängigen Glieder der Ausdrücke (9) und (10) für sich Null werden und ebenso die von α, β_1 und β_2 abhängigen Theile der genannten Relationen für sich verschwinden. Es muss also stattfinden:

$$\lambda_2 L_1 - \lambda_2' l = 0 \quad (11$$
$$\lambda_1' L - \lambda_1 l_1 = 0, \quad (12$$

aus welchen Gleichungen sich durch Addition und Subtraction von $L_1 \lambda_2'$ bzw. $L\lambda_1$ finden lässt:

$$L_1 (\lambda_2' + \lambda_2) = \lambda_2' (L_1 + l) \quad (13$$
$$L\ (\lambda_1' + \lambda_1) = \lambda_1\ (L + l_1). \quad (14$$

Unter Berücksichtigung dieser letzteren Ergebnisse erhält man aus den Formeln (9) und (10):

$$L_1 c_2 \operatorname{tg} \beta_2 = \lambda_2' c \operatorname{tg} \alpha \quad (15$$
$$L c_1 \operatorname{tg} \beta_1 = \lambda_1 c\ \operatorname{tg} \alpha. \quad (16$$

Bevor diese letztgefundenen Beziehungen für die Unveränderlichkeit der Gewichtsangaben der Wage bei verschiedenen Stellungen der Belastungen weiter verwerthet werden, soll eine andere Beziehung zwischen den Drehungswinkeln der drei Wagebalken entwickelt werden. Zu diesem Zwecke wird die Bedingung gestellt, dass die Schalen oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Schalenträger während der Schwingungen der Wagebalken parallel der Anfangslage bleiben sollen. Unter dieser Voraussetzung muss die Bewegung des Punktes A am Hauptbalken an Grösse und Richtung gleich jener von F_2 sein, wie sich durch Betrachtung der Fig. 2 leicht erkennen lässt; die Ortsveränderung von B muss aus demselben Grunde conform mit der Ortsveränderung von F_1 sein.

Eine absolute Gleichheit der Ausweichungen und der Richtung derselben wird aber nur unter der Bedingung vollkommener Uebereinstimmung der Balken AC und F_2C_2 hinsichtlich aller Dimensionen (L, λ_2, c und c_2) stattfinden können, und zwar ist dann die Identität der Bewegungen von A und F_2 für alle Werthe der Winkel α und β hergestellt. Nachdem nun in der Praxis stets nur kleine Elongationswinkel in Betracht kommen, von der Annahme vollkommener Uebereinstimmung der beiden Balken aber unbedingt Umgang genommen werden muss, so sind nun die Bedingungen zu suchen, unter welchen annähernde Gleichheit der Bewegungen der Punkte A und F_2 stattfinden kann.

Die Linie GG_1, die angenommene Achse des Hauptbalkens, durchschneidet die gedachte Nullstellung gg' desselben in einem Punkte K, der nach Fig. 2 von A um $l - c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ und von G_1 demgemäss um

$L_1 + c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ entfernt ist. Der Punkt K liegt nämlich, wie leicht einzusehen ist, in der Halbirungslinie des Winkels bei C, welcher α genannt wurde. Da der Abstand des Drehungspunktes C von der Balkenachse während der Schwingung der Wage naturgemäss constant bleiben muss, so ergibt die Elongation des Punktes A in verticaler Richtung zu:

$$D_v = \left(l - c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \sin \alpha. \tag{17}$$

Für F_2 ergibt sich in ähnlicher Weise:

$$D_v' = \left(\lambda_2 - c_2 \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}\right) \sin \beta_2. \tag{18}$$

Die horizontalen Ausweichungen der genannten zwei Punkte werden gegeben durch:

$$D_h = \left(l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + c\right) \sin \alpha \tag{19}$$

$$D_h' = \left(\lambda_2 \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} + c_2\right) \sin \beta_2. \tag{20}$$

Es ist nämlich nach Fig. 2:

$$D_h = l + c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \left(l - c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \cos \alpha,$$

aus welcher Relation sich durch eine entsprechende kurze Transformation der Ausdruck (19) bilden lässt.

Wird nun des weiteren angenommen, dass auch die beiden Mitnehmer $E_1 G$ und $E_2 G_1$ während der Schwingungen der Wage parallel ihrer Anfangslage bleiben sollen, so muss hinsichtlich des Punktes G_1 und des Mitnehmers $E_2 G_1$, bzw. des Endpunktes E_2 des vorher berücksichtigten rechtsseitigen Leithebels $F_2 C_2 E_2$ dieselbe Bedingung wie für A und F_2 bestehen. Es ist nun:

$$\Delta_v = \left(L_1 + c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \sin \alpha \tag{21}$$

$$\Delta_v' = \left(\lambda_2' + c_2 \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}\right) \sin \beta_2 \tag{22}$$

$$\Delta_h = \left(L_1 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - c\right) \sin \alpha \tag{23}$$

$$\Delta_h' = \left(\lambda_2' \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2} - c_2\right) \sin \beta_2. \tag{24}$$

Diese Gleichungen im Vereine mit den Ausdrücken (17), (18), (19), (20) stellen die Ausweichungen der vier betrachteten Punkte an dem Hauptbalken und dem einen Nebenbalken in verticaler und horizontaler Richtung dar. Den gestellten Bedingungen gemäss müssen die Werthe von D_v und D_v', D_h und D_h', Δ_v und Δ_v', endlich von Δ_h und Δ_h' einander gleichen. Durch Combination der Ausdrücke (17), (18), (21) und (22) entsteht die Relation:

$$\frac{l - c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{L_1 + c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\lambda_2 - c_2 \operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2}}{\lambda_2' + c_2 \operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2}} \tag{25}$$

und hieraus durch Reduction:

$$l\lambda_2' - L_1\lambda_2 - (\lambda_2 + \lambda_2')\, c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + (L_1 + l)\, c_2 \operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2} = 0. \tag{26}$$

Auf einem analogen Wege wird mit Zugrundelegung der Relationen (19), (20), (23) und (24) die Beziehung gefunden:

$$(l\lambda_2' - L_1\lambda_2) \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2} + (\lambda_2 + \lambda_2')\, c \operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2} - (L_1 + l)\, c_2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 0. \tag{27}$$

Diese beiden Ausdrücke müssen gleichzeitig für alle Werthe von α und β_2 erfüllt sein; es müssen daher die Coëfficienten von $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ und $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, sowie das hievon unabhängige Glied in Gleichung (26) für sich der Nulle gleich werden. Es muss daher zunächst sein:

$$l\lambda_2' = L_1\lambda_2, \tag{28}$$

woraus unmittelbar folgt:

$$l(\lambda_2 + \lambda_2') = \lambda_2(L_1 + l). \tag{29}$$

Hiemit gehen die Bedingungen (26) und (27) über in:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= l c_2 \operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2} \\ l c_2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \lambda_2 c \operatorname{tg}\frac{\beta_2}{2}, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

woraus durch Elimination von α und β_2 gefunden werden kann:

$$\lambda_2 c = l c_2$$

und somit auch

$$\alpha = \beta_2,$$

welches Resultat nach den gemachten Voraussetzungen vollständig aus-

geschlossen werden muss. Es kann somit für c und für c_1 nur der Nullwerth angenommen werden, mit welchem sowohl den Ausdrücken (30) als auch den Gleichungen (15) und (16) unzweifelhaft vollständig genügt wird.

Auf ganz gleiche Weise wird natürlich die Untersuchung für den zweiten Schalenträger und den Mitnehmer $E_1 G$-durchgeführt, und liefert dieselbe wegen der Symmetrie der Ausdrücke die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{c} l_1 \lambda_1 = L \lambda_1' \\ c = c_1 = 0. \end{array}\right\} \quad (31$$

Es müssen daher die sämmtlichen drei Balken der betrachteten Wagenconstruction derart gebaut sein, dass die an jedem derselben befindlichen Schneiden in je einer horizontalen Ebene liegen. Diese Annahme, welche bei gewöhnlichen gleicharmigen Balkenwagen nur die constante von der Belastung unabhängige Empfindlichkeit bedingt, ist hier ausserdem zur Herstellung der Richtigkeit und Unveränderlichkeit der Gewichtsangaben, mithin zur Brauchbarkeit der Wage unerlässlich.

Es sollen nunmehr einige Beziehungen zwischen den Hebellängen der drei Balken gesucht werden. Aus den Gleichungen (12) und (28), desgleichen aus den Ausdrücken (11) und (31) wird gefunden:

$$\frac{\lambda_2'}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1'}{\lambda_1}, \quad (32$$

wenn $LL_1 = ll_1$ gesetzt wird. Dieser Ausdruck (32) lehrt, dass die beiden Leitbalken unter der obigen Annahme in einem beliebigen, jedoch für beide gleichen Verhältnisse getheilt sein können. Die obige Relation lässt sich auch in der Form

$$\lambda_1 \lambda_2' = \lambda_2 \lambda_1'$$

darstellen, in welcher sie zeigt, dass unter den bereits mehrfach definirten Bedingungen über Parallelführung stets das Product der beiden äusseren Arme der Leithebel gleich sein muss dem Producte der inneren Arme dieser Balken.

Nach der eben gemachten Voraussetzung muss

$$\frac{L}{l} = \frac{l_1}{L_1} \quad (33$$

unter allen Umständen stattfinden. Wird nun z. B. $L = L_1$ angenommen, so ist $l = l_1$ noch nicht die unmittelbare Folge; wenn aber

der Haupthebel ACB vollkommen symmetrisch gebaut sein soll, so muss wegen $L = L_1$ und $l = l_1$ auch sein:

$$L = L_1 = l = l_1. \tag{34}$$

In diesem Falle müssen wegen der Relationen (11) und (12) die Nebenbalken gleicharmig sein, d. h. dem symmetrisch in Beziehung auf die Anordnung der Schneiden gebauten Hauptbalken einer Pfanzeder'schen 16schneidigen Tafelwage entsprechen nur vollkommen gleicharmige Leitbalken, wenn die Wage den im Vorstehenden namhaft gemachten Anforderungen entsprechen soll. Es ist jedoch, wie leicht einzusehen, keineswegs nothwendig, dass die Leitbalken einander congruent seien, dass also $\lambda_1 = \lambda_1' = \lambda_2 = \lambda_2'$ sei; sie müssen eben nur jeder für sich gleicharmig sein, und, wie früher gefunden, müssen die Schneiden derselben in je einer horizontalen Ebene liegen.

Nach diesen Erörterungen soll, an die Gleichung (6) anknüpfend, die Empfindlichkeit einer Pfanzeder'schen Tafelwage mit 16 Schneiden unter Berücksichtigung der gewonnenen Bedingungen hinsichtlich ihrer Richtigkeit sowie der Parallelführung der Schalenträger und Mitnehmer entwickelt werden.

Es wurde gefunden, dass

$$c = c_1 = c_2 = 0$$

sein müsse, soll eine Parallelführung stattfinden; aus den Relationen (17) und (18) ergibt sich für sehr kleine Winkel α und β_2, bei welchen die Functionen sin und tg vertauscht werden dürfen:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\lambda_2}{l}, \tag{35}$$

und analog kann gefunden werden:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta_1} = \frac{\lambda_1'}{l_1}. \tag{36}$$

Es ist hier zu bemerken, dass, wie bereits erwähnt, die absolut genaue Parallelführung nur bei der Verwendung von absolut gleichen Hebeln erzielt werden kann; die vorstehenden Untersuchungen beziehen sich nur auf die Eruirung der Bedingungen für die Parallelführung unter der Annahme sehr kleiner Werthe der Ausschlagwinkel α, β_1 und β_2.

Die Relationen (19), (20), (23) und (24) werden unter der Annahme $c = c_2 = 0$ für sehr kleine Werthe von α und β_2 identisch Null und eignen sich daher nicht zur Bestimmung des Verhältnisses

von α und β_2. Es kann nämlich z. B. die Gleichung (19) auch in der Form

$$D_k = l(1 - \cos\alpha) + c\sin\alpha \tag{19}$$

geschrieben werden; für $c = 0$ und $\cos\alpha$ nahe der positiven Einheit ergibt sich sofort der Nachweis der vorstehenden Bemerkung. Die Richtigkeit der der Gleichung (25) ähnlichen Relation wird hiedurch nicht alterirt, da dieselbe unter diesen Verhältnissen identisch den Werth $\frac{0}{0}$ erhält, was übrigens auf die Ergebnisse der Untersuchung keinen Einfluss hat, da dieselben vollkommen gleichlautend aus Gleichung (25) erhalten wurden.

Die Gleichung (6) lautet nun unter Rücksichtnahme auf die gefundenen Bedingungen und auf die Relationen (35) und (36):

$$Pl - S_1\left(\sigma_1 + s_1\frac{l_1}{\lambda_1'}\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{L}{\lambda_1} = Ql_1 + S_2\left(\sigma_2 + s_2\frac{l}{\lambda_2}\operatorname{tg}\alpha\right)\frac{L_1}{\lambda_2'} + \\ + S(\sigma + s\operatorname{tg}\alpha), \tag{37}$$

woraus sich unmittelbar ergibt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{Pl - Ql_1 - \frac{L}{\lambda_1}\sigma_1 S_1 - \frac{L_1}{\lambda_2'}\sigma_2 S_2 - S\sigma}{\frac{Ll_1}{\lambda_1\lambda'_1}s_1 S_1 + \frac{lL_1}{\lambda_2\lambda_2'}s_2 S_2 + sS}. \tag{38}$$

Diese Formel zeigt zunächst, dass die Grösse des Ausschlagwinkels α mit der Abnahme der Werthe von s, s_1 und s_2 zunimmt. Die sämmtlichen drei genannten Grössen dürfen jedoch nie gleichzeitig Null werden, da sonst die drei Balken sich im labilen Gleichgewichte befinden würden, eine correcte Wägung mithin unmöglich wäre. Die Empfindlichkeit der Wage ist nach Gleichung (38) unabhängig von der Belastung.

Für die gewöhnlich in der Praxis vorkommende Constructionsart wird mit Rücksicht auf Gleichung (34) und die daraus gezogenen Schlüsse der Werthe von $\operatorname{tg}\alpha$ dargestellt durch:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{L(P-Q) - L\left(\frac{\sigma_1}{\lambda_1}S_1 + \frac{\sigma_2}{\lambda_2}S_2\right) - \sigma S}{L^2\left(\frac{s_1 S_1}{\lambda_1^2} + \frac{s_2 S_2}{\lambda_2^2}\right) + sS}. \tag{39}$$

Wird nun die Bedingung gestellt, dass für $P = Q$ der Werth von $\operatorname{tg}\alpha$ Null sei, so muss stattfinden, nachdem der Nenner in Gleichung (39) nicht unendlich gross werden kann und darf, wenn die Wage brauchbar sein soll:

$$\frac{\sigma}{L}S + \frac{\sigma_1}{\lambda_1}S_1 + \frac{\sigma_2}{\lambda_2}S_2 = 0. \tag{40}$$

Da die Längen der Hebelarme und die Gewichte der Wagebalken nie Null oder negativ werden können, so folgt, dass entweder einer der Werthe σ, σ_1, σ_2 einen passenden negativen Werth erhalten, der Schwerpunkt des betreffenden Balkens mithin links von dessen Drehungsachse (Fig. 2) liegen muss, oder dass alle drei Werthe gleichzeitig verschwinden müssen. In der Praxis wird stets die letztere Annahme stattfinden, da nachgewiesen wurde, dass ein symmetrisch gebauter Hauptbalken die Gleicharmigkeit der Leitbalken bedingt und mithin bei einiger Rücksicht auf symmetrischen Bau der Leitbalken die Bedingung

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = 0 \tag{41}$$

sich von selbst erfüllt. Uebrigens ist diese Annahme am leichtesten erfüllbar, und dürfte somit wohl jede Pfanzeder'sche Wage nach diesen Grundsätzen construirt sein.

Die Gleichung (39) wird mit Rücksicht auf Gleichung (40) dem correspondirenden Ausdrucke für eine gleicharmige Balkenwage

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{L(P-Q)}{sS},$$

deren Armlänge und Distanz s des Schwerpunktes von der Balkenachse den entsprechenden Dimensionen des Hauptbalkens der Pfanzeder-Wage gleichkommt und für welche ebenfalls $c = 0$ ist, sehr ähnlich. Die Uebereinstimmung wird eine vollständige, wenn die Schwerpunkte der Leitbalken in der durch die drei Schneiden eines jeden derselben gelegten Horizontalebene enthalten sind oder wegen Gleichung (41) in die scharfen Kanten der Drehschneiden fallen; die Leithebel befinden sich also im indifferenten Gleichgewichte und es ist

$$s_1 = s_2 = 0. \tag{42}$$

Die Empfindlichkeit der Pfanzeder'schen Tafelwage wird dann gleich der Empfindlichkeit ihres isolirt gedachten Hauptbalkens.

Die Bedingung, dass für gleiche Gewichte auf den Wageschalen der Werth von $\operatorname{tg} \alpha$ in Gleichung (39) verschwinde, lässt sich übrigens auch dadurch erfüllen, dass die beiden Schalenträger verschiedene Schwere besitzen. Nennt man die Gewichte der letzteren beziehungsweise T_1 und T_2, so wird die Differenz nach Gleichung (39) gegeben durch:

$$T_1 - T_2 = \frac{\sigma_1}{\lambda_1} S_1 + \frac{\sigma_2}{\lambda_2} S_2 + \frac{\sigma}{L} S, \tag{43}$$

von welcher Formel in der Praxis wohl nie Gebrauch gemacht wird.

Hiemit sind die Elementareigenschaften der 16schneidigen Pfanzeder'schen Tafelwage in allgemeinen Umrissen dargestellt und die Bedingungen für die Brauchbarkeit einer solchen Wage erörtert worden. Es soll nunmehr dasselbe hinsichtlich der Systeme von Pfanzeder-Wagen mit 12 und mit 14 Schneiden geschehen.

2. Die Wage mit 12 und 14 Schneiden.

Die Construction derartiger Tafelwagen unterscheidet sich, wie bereits eingangs erwähnt ist, von dem soeben betrachteten Wagensystem dadurch, dass die Leitbalken mittelst der Mitnehmer nicht mit dem Hauptbalken der Wage, sondern mit den Schalenträgern T_1 und T_2 in Verbindung stehen, wie dies auch aus der folgenden Fig. 3 ent-

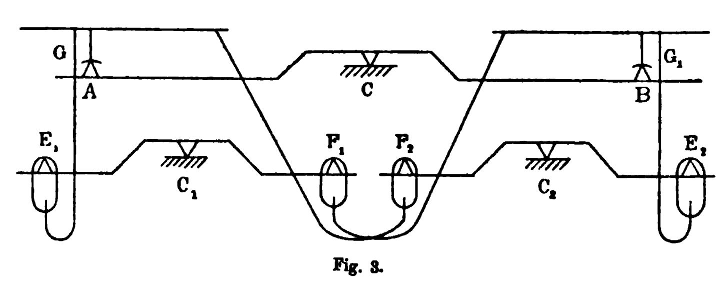


Fig. 3.

nommen werden kann. Die Anordnung und die Länge der übrigen Schneiden an den verschiedenen Balken ist bei einer 14schneidigen Wage dieselbe wie bei der 16schneidigen Tafelwage; die Wage mit 12 Schneiden besitzt statt der langen Drehachsen C_1 und C_2 der Leitbalken nur ganz kurze Schneiden, und sind auch die Mitnehmer etwas anders construirt als dies in Fig. 3 schematisch angedeutet ist. Diese Differenz ist übrigens für die anzustellende theoretische Betrachtung ganz ohne Belang.

Die Belastungen P und Q bzw. deren Componenten p_1 und q_1 wirken ganz ebenso wie bei einer 16schneidigen Wage; eine Aenderung tritt nur hinsichtlich der Kräfte x und y, der Functionen von p_2 und q_2 ein, nachdem die Leitbalken nicht mehr mit dem Hauptbalken in unmittelbarer Verbindung stehen. Diese Theilkräfte üben ihre Wirkung mittelst der Mitnehmer auf den Schalenträger, also auf ein starres System aus, und wird dieselbe also auf die in A und B (Fig. 3) befindlichen Doppelschneiden übertragen. Die Punkte G und G_1 in Fig. 1 und 2 fallen also schon in Folge der Construction mit den Punkten A und B zusammen, und wird hiedurch die Justirung der Wage wesentlich vereinfacht.

In den für die Wage mit 16 Schneiden aufgestellten Formeln ist nun zu setzen:

$$\left.\begin{array}{l} L = l \\ L_1 = l_1, \end{array}\right\} \qquad (44$$

mit welchen Werthen die Relation (33) unter allen Umständen erfüllt ist. Selbstverständlich bleiben alle an die genannte Gleichung geknüpften Folgerungen vollkommen aufrecht, und desgleichen wird auch die Bestimmung der Empfindlichkeit zu demselben Ausdrucke (39) führen. Es ist somit theoretisch, abgesehen von den Reibungsverhältnissen, welche mit der Anzahl der Schneiden wachsen und demgemäss die Empfindlichzeit verringern, die letztere für gleich gebaute Pfanzeder'sche Wagen mit 12, 14 oder 16 Schneiden, welche dieselben Constanten besitzen, vollkommen gleich.

II. Die Tafelwage nach Beranger.

Die Tafelwage von Beranger ist eine verbesserte Construction einer seit längerer Zeit bekannten Art von oberschaligen Wagen; der theoretisch nebensächliche Unterschied liegt hauptsächlich in der Anordnung des Schalenträgers, welcher bei der älteren Ausführung, den „Lyoner Wagen", sich unterhalb des Balkensystems befindet und mit verticalen Stäben als Auflager für die Schalen versehen ist. Die Ausführung der Gehänge, welche bei den neueren Wagen bedeutend exacter ist, kommt hier ebenfalls nicht weiter in Betracht.

Diese im öffentlichen Verkehre nach dem Gesetze anwendbare Tafelwage, deren Schema in Fig. 4 dargestellt ist, besteht aus dem Hauptbalken ACB, welcher bei A und B je zwei in gleichem Ab-

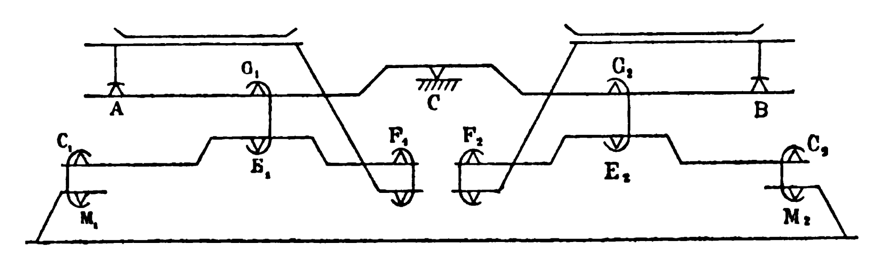


Fig. 4.

stande von C befindliche, der Mittelschneide C parallele und zur Längenachse des Balkens senkrecht stehende Schneiden besitzt, auf welchen die Schalenträger T_1 und T_2 mit Lagerpfannen ruhen. Der

Hauptbalken besteht zumeist aus zwei mit einander fest verbundenen Balken, welche sich in einiger Entfernung von einander befinden. Die beiden Leitbalken $C_1 E_1 F_1$ und $C_2 E_2 F_2$ drehen sich in C_1 und C_2 um Schneiden, welche durch Cförmige Gehänge mit den an dem Gestelle der Wage befestigten Schneiden M_1 und M_2 in Verbindung stehen, so dass also eine geringe Verschiebung eines jeden Leitbalkens in der Richtung seiner Längenachse ermöglicht ist. Diese Führungsbalken sind mit dem Hauptbalken durch Gehänge $E_1 G_1$ und $E_2 G_2$ verbunden, und ist zu diesem Zwecke an jedem Arm des Hauptbalkens bei G_1 und G_2 je eine nach aufwärts gekehrte Schneide angebracht. Der Schalenträger ist mittelst eines an demselben befestigten und mit einer Schneide versehenen Fortsatzes mit der nach aufwärts gerichteten Endschneide des Leitbalkens durch ein ebenfalls Cförmiges Gehänge in Verbindung gesetzt; hiedurch ist der dritte für die Stabilität der Schale erforderliche Unterstützungspunkt gewonnen.

In den folgenden Entwickelungen wird angenommen, dass der Schwerpunkt des Hauptbalkens nicht genau unter dem Drehungspunkte C desselben sich befindet, wenn die Wage auf Null steht, sondern dass er um eine gewisse Länge rechts von der durch den Drehpunkt gezogenen Verticalen liege. Bei den Nebenbalken ist es wegen der Einarmigkeit derselben klar, dass der Schwerpunkt derselben nie in dem durch den Drehungspunkt derselben gezogenen Lothe enthalten sein kann. Bezüglich der bei A und B (Fig. 4) vorhandenen Doppelschneiden wird angenommen, dass dieselben je in einer und derselben senkrecht zur Balkenachse und parallel zur Mittelschneide gerichteten Geraden liegen, dass also die vier erwähnten Schneiden in einer und derselben durch die beiden Geraden fixirten Ebene sich befinden, in welcher auch die Schneiden G_1 und G_2 angenommen werden sollen. Es ist dies eine Specialisirung, welche zur Vereinfachung der Rechnung dient, ohne das Resultat zu beeinflussen, wie sich zeigen wird. Als Balkenachse wird auch hier die Schnittlinie der eben bestimmten Ebene mit einer den Schwerpunkt enthaltenden zur Balkenachse senkrechten Ebene angenommen.

Es werde nun vorausgesetzt, der Hauptbalken der Wage weiche um den Winkel α von der Nullstellung ab, befinde sich jedoch in Folge der Belastung auf den Schalen im Gleichgewichte; die beiden Leitbalken haben sich dann beziehungsweise um die Winkel β_1 und β_2 gedreht.

Man setze nun nach der Zeichnung:

$$
\begin{aligned}
AO &= L & BO &= L_1 \\
GO &= l & G_1 O &= l_1 \\
CO &= c & OL &= \sigma \\
E_1 O_1 &= \lambda_1 & E_2 O_2 &= \lambda_2 \\
F_1 O_1 &= \lambda_1' & F_2 O_2 &= \lambda_2' \\
O_1 L_1 &= \sigma_1 & O_2 L_2 &= \sigma_2 \\
L_1 S_1 &= s_1 & L_2 S_2 &= s_2 \\
C_1 O_1 &= c_1 & C_2 O_2 &= c_2.
\end{aligned}
$$

Es wird nun jede der beiden auf die Schalen wirkenden Kräfte P und Q in zwei Kräfte zerlegt, von welchen, wenn P betrachtet

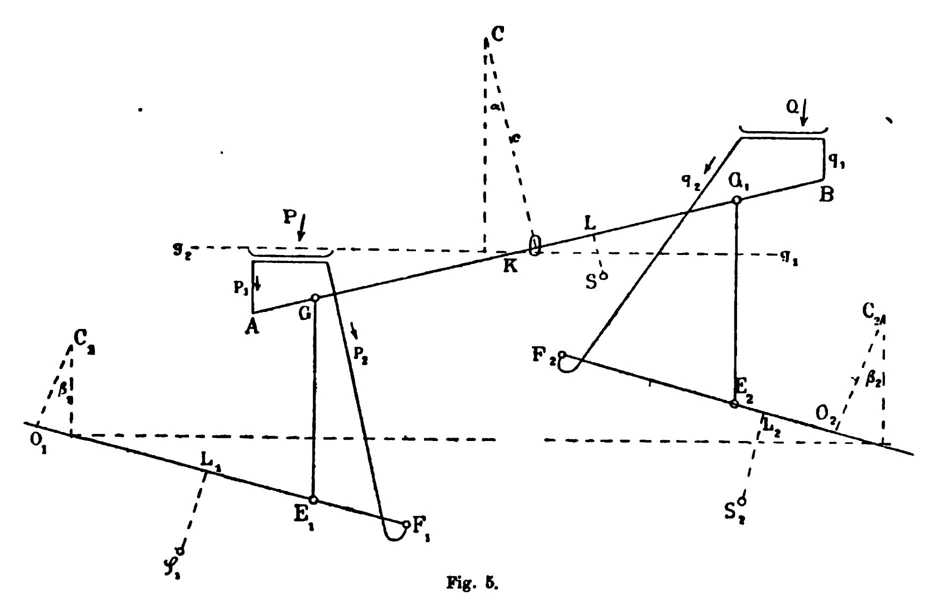


Fig. 5.

wird, die eine Componente p_1 in A angreift. Hiebei werden die bei A befindlichen doppelt vorhandenen Schneiden als eine Schneide betrachtet. Die andere Componente von P, nämlich p_2, wirkt mittelst des starren Fortsatzes des Schalenträgers an dem Punkte F_1 des Leitbalkens derselben Seite. Eben in Folge der Starrheit des Fortsatzes und seines festen Zusammenhanges mit dem Schalenträger werden die beiden Componenten von P sowohl als von Q einander parallel und in der Richtung der Schwere wirken. Es muss daher sein:

$$P = p_1 + p_2 \tag{1}$$
$$Q = q_1 + q_2. \tag{2}$$

Vermittelst der Leithebel wird die Wirkung von p_2 und q_2 wieder auf den Hauptbalken übertragen, und zwar greifen diese Kräfte sodann in G und G_1 an. Nennt man deren Stärke in diesen Punkten beziehungsweise x und y, so wird die Bedingung für das Gleichgewicht des Hauptbalkens die folgende sein:

$$p_1(L - c\,\mathrm{tg}\,\alpha) + x(l - c\,\mathrm{tg}\,\alpha) = q_1(L_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha) + y(l_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha) + \\ + S[\sigma + (c+s)\,\mathrm{tg}\,\alpha]. \qquad (3$$

Die Werthe von x und y können durch Betrachtung der Gleichgewichtslage der beiden Leitbalken als Function von p_2 und q_2 dargestellt werden. Es ist:

$$x = p_2 \frac{\lambda_1' - c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\lambda_1 - c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1} + S_1 \frac{\sigma_1 - (c_1 + s_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\lambda_1 - c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1} \qquad (4$$

$$y = q_2 \frac{\lambda_2' + c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\lambda_2 + c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2} + S_2 \frac{\sigma_2 + (c_2 + s_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\lambda_2 + c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}. \qquad (5$$

Die so gefundenen Werthe werden in dem Ausdrucke (3) substituirt, und es wird mit Rücksicht auf die Gleichung (1) und (2) die Bedingung für das Gleichgewicht lauten:

$$\left.\begin{array}{l} P(L - c\,\mathrm{tg}\,\alpha) + p_2\left[\frac{\lambda_1' - c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\lambda_1 - c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1}(l - c\,\mathrm{tg}\,\alpha) - (L - c\,\mathrm{tg}\,\alpha)\right] = \\ = Q(L_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha) + q_2\left[\frac{\lambda_2' + c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\lambda_2 + c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}(l_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha) - (L_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha) + \right] \\ + S[\sigma + (c+s)\,\mathrm{tg}\,\alpha] + S_2 \frac{\sigma_2 + (c_2 + s_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\lambda_2 + c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}(l_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha) - \\ - S_1 \frac{\sigma_1 - (c_1 + s_1)\log\beta_1}{\lambda_1 - c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1}(l - c\,\mathrm{tg}\,\alpha). \end{array}\right\} \qquad (6$$

Auf die gleiche Art wie bei der Pfanzeder'schen Wage ist auch in diesem Falle zu verfahren, um die von der Stellung des Gewichtes auf der Wagschale abhängigen Grössen p_2 und q_2 zu eliminiren, und müssen daher ebenfalls die Coëfficienten dieser Partialdrücke verschwinden. Man erhält:

$$\frac{\lambda_1' - c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\lambda_1 - c_1\,\mathrm{tg}\,\beta_1}(l - c\,\mathrm{tg}\,\alpha) = L - c\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad (7$$

$$\frac{\lambda_2' + c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\lambda_2 + c_2\,\mathrm{tg}\,\beta_2}(l_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha) = L_1 + c\,\mathrm{tg}\,\alpha \qquad (8$$

oder nach Ausführung der angedeuteten Operationen:

$$l\lambda_1' - L\lambda_1 - c_1(l - L)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 + c(\lambda_1 - \lambda_1')\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0 \qquad (9$$

$$l_1\lambda_2' - L_1\lambda_2 + c_2(l_1 - L_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2 - c(\lambda_2 - \lambda_2')\,\mathrm{tg}\,\alpha = 0. \qquad (10$$

Diese Ausdrücke müssen für alle Werthe von α und β erfüllt sein, wenn die Wage der gestellten Anforderung einer richtigen Gewichtsangabe ohne Rücksicht auf die Lage des zu wägenden Körpers entsprechen soll. Es muss also analog wie bei der Pfanzeder'schen Wage sein:

$$l\lambda_1' = L\lambda_1 \tag{11}$$

$$l_1\lambda_2' = L_1\lambda_2. \tag{12}$$

Ebenso müssen die beiden anderen Glieder in den Relationen (9) und (10) verschwinden.

Conform dem früher eingeschlagenen Wege lassen sich aus den Gleichungen (11) und (12) durch Subtraction von $L\lambda_1'$ bzw. $L_1\lambda_2'$ die folgenden Ausdrücke herstellen:

$$(l - L)\ \lambda_1' = L\ (\lambda_1 - \lambda_1') \tag{13}$$

$$(l_1 - L_1)\ \lambda_2' = L_1\ (\lambda_2 - \lambda_2'), \tag{14}$$

mit welchen unter Rücksicht auf die Relationen (11) und (12) die Bedingungen (9) und (10) sich in die folgenden verwandeln:

$$c_1 L \operatorname{tg} \beta_1 = c\lambda_1' \operatorname{tg} \alpha \tag{15}$$

$$c_2 L_1 \operatorname{tg} \beta_2 = c\lambda_2' \operatorname{tg} \alpha. \tag{16}$$

Schon jetzt liesse sich, wie auch bei der Pfanzeder'schen Wage, der Schluss ziehen, es müsse $c = c_1 = c_2 = 0$ sein, damit die obigen Gleichungen für alle Werthe von α und β gelten. Dieser Schluss ist jedoch aus dem Grunde anfechtbar, weil es ganz gut denkbar ist, dass das Verhältniss von $\operatorname{tg} \alpha$ und $\operatorname{tg} \beta_1$ bzw. $\operatorname{tg} \beta_2$ eine constante Grösse für die Wage ist, welche von dem Werthe der Distanzen c, c_1 und c_2 abhängt. Um nun den Beweis für die Richtigkeit der obigen Annahme zu führen, sollen die Bedingungen für eine Parallelführung der Schalen entwickelt werden. Um eine nahezu wörtliche Wiederholung des bei der Besprechung der Pfanzeder-Wage Gesagten zu vermeiden, soll das Erforderliche in möglichster Kürze resumirt werden.

Zur Parallelführung einer z. B. der linksseitigen Wagschale muss unbedingt die Bewegung der Punkte A und F_1, der Stützpunkte des entsprechenden Schalenträgers, im Raume nach Grösse und Richtung identisch sein; es müssen daher die Verschiebungen dieser Punkte in horizontaler und verticaler Richtung einander gleichen. Für den Punkt A ist, da die Linie CK den Winkel α halbirt:

$$D_v = \left(L - c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \sin \alpha \tag{17}$$

$$D_h = \left(L \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + c\right) \sin \alpha. \tag{18}$$

Analog wird für F_1:

$$D_v' = \left(\lambda_1' - c_1 \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}\right) \sin \beta_1 \tag{19}$$

$$D_h' = \left(\lambda_1' \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} + c_1\right) \sin \beta_1, \tag{20}$$

wobei D_v und D_v' die verticalen, D_h und D_h' aber die horizontalen Verschiebungen der Punkte A und F_1 bezeichnen.

Um jede Spannung im Mechanismus der Wage zu vermeiden, müssen auch die Gehänge E_1G und E_2G_1 während der Schwingungen parallel ihrer Anfangslage bleiben, und es müssen die Verschiebungen der Punkte E_1 und G, ferner E_2 und G_1 einander gleichen. Es sollen nun nur die beiden Schneiden E_1 und G betrachtet werden, und zwar sollen die Verschiebungen von E_1 mit Δ_v' und Δ_h', jene von G mit Δ_v und Δ_h bezeichnet werden.

$$\Delta_v = \left(l - c \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right) \sin \alpha \tag{21}$$

$$\Delta_h = \left(l \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + c\right) \sin \alpha \tag{22}$$

$$\Delta_v' = \left(\lambda_1 - c_1 \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}\right) \sin \beta_1 \tag{23}$$

$$\Delta_h' = \left(\lambda_1 \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} + c_1\right) \sin \beta_1. \tag{24}$$

Diese acht Gleichungen repräsentiren also die horizontale und verticale Abweichung eines jeden der vier in Betracht kommenden Punkte A, F_1, E_1 und G. Ganz ähnliche Relationen liessen sich für das Hebelsystem auf der rechten Seite der Wage ableiten, doch erscheint deren Aufstellung überflüssig, da wegen des vollkommen gleichen Baues dieser Ausdrücke sich die Resultate als Analogie derjenigen für die linke Seite der Wage geltenden darstellen lassen.

Aus den Gleichungen (17), (19), (21) und (23) erhält man durch passende Combination, da nach dem Gesagten $D_v = D_v'$, $D_h = D_h'$, $\Delta_v = \Delta_v'$, $\Delta_h = \Delta_h'$ sein muss, auf Grundlage der Relation $\frac{D_v}{D_v'} = \frac{\Delta_v}{\Delta_v'}$:

$$\frac{L - c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\lambda_1' - c_1 \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2}} = \frac{l - c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\lambda_1 - c_1 \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2}} \tag{25}$$

oder nach vollzogener Reduction:

$$L\lambda_1 - l\lambda_1' + (\lambda_1' - \lambda_1)\, c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - (L - l)\, c_1 \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2} = 0. \tag{26}$$

Durch passende Verbindung der noch übrigen vier Gleichungen für D_k, D_k', $\varDelta_k$ und $\varDelta_k'$ erhält man die analoge Bedingung:

$$(L\lambda_1 - l\lambda_1') \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2} + c_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(L - l) - c \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2}(\lambda_1' - \lambda_1) = 0. \tag{27}$$

Die Ausdrücke (26) und (27) stimmen selbstverständlich mit den für die Pfanzeder'sche Tafelwage gefundenen analogen Relationen der Form nach vollkommen überein; sie unterscheiden sich von den letzteren bloss dadurch, dass an die Stelle der Summen von Hebelarmen Differenzen getreten sind, was übrigens durch die Verschiedenheit in der Anordnung der Leitbalken gerechtfertigt erscheint. Die beiden letzterwähnten Gleichungen müssen ebenso wie jene mit (9) und (10) bezeichneten Ausdrücke für alle Werthe von α und β_1 identisch Null sein. Es müssen daher in Gleichung (26) die Glieder mit α und β_1 für sich der Nulle gleichgesetzt werden, und ebenso muss das von α und β_1 unabhängige Glied verschwinden. Es muss also sein:

$$L\lambda_1 - l\lambda_1' = 0, \tag{28}$$

welche Relation vollständig mit (11) übereinstimmt. Mit der früher entwickelten Bedingung (13) können nun die Gleichungen (26) und (27) mit Rücksicht auf die Relation (28) transformirt werden, und es entstehen den Beziehungen (15) und (16) analoge Ausdrücke, nämlich

$$\lambda_1' c \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = L c_1 \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2} \tag{29}$$

$$L c_1 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \lambda_1' c \operatorname{tg}\frac{\beta_1}{2}, \tag{30}$$

woraus sich $\alpha = \beta_1$ ergeben würde. Dies ist nun, wie in der früheren Ableitung über die Pfanzeder'sche Wage nachgewiesen wurde, im Allgemeinen nicht möglich, und es müssen daher, um die Gleichungen zu erfüllen, die Werthe c und c_1 und analogerweise auch c_2 sämmtlich Null werden; es müssen daher sämmtliche Schneiden des Hauptbalkens



der Beranger'schen Tafelwage in einer und derselben Ebene liegen, und gilt dieselbe Bedingung auch für jeden der beiden Nebenbalken.

Es erübrigt noch, das Verhältniss der einzelnen bei dieser Wage vorkommenden Hebellängen zu einander näher zu betrachten. Es wurde gefunden:

$$L\lambda_1 = l\lambda_1' \tag{11}$$

$$L_1\lambda_2 = l_1\lambda_2'. \tag{12}$$

Ist nun $L = L_1$, d. h. ist der Hauptbalken der Wage gleicharmig, so folgt daraus noch nicht, dass zu einander correspondirende Hebelarme einander gleichen müssen. Wird aber der Hauptbalken vollkommen symmetrisch in Beziehung auf die Anordnung der Schneiden vorausgesetzt, so folgt mit Nothwendigkeit, dass

$$\frac{l}{L} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1'} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2'} \tag{31}$$

sein müsse, dass also der Hauptbalken und die beiden Leitbalken im selben Verhältnisse getheilt sein müssen, wodurch aber noch nicht die Gleichheit von λ_1 und λ_2 sowie von λ_1' und λ_2' bedingt erscheint, wenn dieselbe auch stets in der Praxis vorhanden sein wird.

Zur Bestimmung der Empfindlichkeit muss nun eine Beziehung zwischen α und β_1 sowie zwischen α und β_2 entwickelt werden. Unter der Voraussetzung $c = c_1 = 0$ ergibt sich aus den Relationen (17) und (19) unter der Annahme so kleiner Werthe von α und β_1, dass die Functionen sin und tg mit einander vertauscht werden können:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta_1} = \frac{\lambda_1'}{L}. \tag{32}$$

Auf ähnliche Weise wird die Gleichung zwischen α und β_2 erhalten:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{\lambda_2'}{L_1}. \tag{33}$$

Es wird somit die aufzustellende Formel für den Ausschlagwinkel einer Tafelwage nach Beranger bei einem kleinen Uebergewicht auf der einen Seite nur für kleine Werthe von α und β Geltung haben. Hinsichtlich der Verwerthung der Gleichungen für die horizontale Ausweichung der früher besprochenen vier Punkte zur Bestimmung des Verhältnisses von α und β_1 verweise ich auf die bei Besprechung der Pfanzeder'schen Wage gegebene Darstellung, welche vollinhaltlich Geltung hat.

Aus Gleichung (6) wird nach Elimination von β_1 und β_2 und Berücksichtigung von $c = c_1 = c_2 = 0$ der Werth von $\operatorname{tg}\alpha$ gefunden:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{PL - QL_1 - S\sigma - S_2\frac{\sigma_2 l_1}{\lambda_2} + S_1\frac{\sigma_1}{\lambda_1}l}{Ss + S_2\frac{L_1 l_1}{\lambda_2\lambda_2'}s_2 + S_1\frac{Ll}{\lambda_1\lambda_1'}s_1}. \tag{34}$$

Wird nun der specielle Fall $L = L_1$ und $l = l_1$ vorausgesetzt, welcher bei allen im Verkehre vorkommenden Wagen eintritt, so geht die Gleichung (34) über in:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{L(P-Q) - S\sigma + l\left(\frac{S_1\sigma_1}{\lambda_1} - \frac{S_2\sigma_2}{\lambda_2}\right)}{Ss + Ll\left(S_2\frac{s_2}{\lambda_2\lambda_2'} + S_1\frac{s_1}{\lambda_1\lambda_1'}\right)}. \tag{35}$$

Soll für gleiche Belastung auf beiden Seiten der Wage der Werth von α Null sein, so muss stattfinden, weil der Nenner in Gleichung (35) nicht unendlich gross werden kann und darf:

$$\frac{\sigma}{l}S - \frac{\sigma_1}{\lambda_1}S_1 + \frac{\sigma_2}{\lambda_2}S_2 = 0. \tag{36}$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn, was in der Praxis stets der Fall sein wird, stattfindet:

$$\sigma = 0$$
$$\lambda_1 = \lambda_2$$
$$S_1 = S_2.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit Gleichung (36) unmittelbar auch $\sigma_1 = \sigma_2$. Die beiden Leitbalken müssen also unter der Bedingung $\sigma = 0$ vollkommen einander gleichen.

Eine andere Möglichkeit, die Gleichung (36) zu erfüllen, besteht in den Annahmen:

$$\sigma = 0$$
$$S_1 = S_2$$
$$\sigma_1 = \lambda_1.$$
$$\sigma_2 = \lambda_2,$$

in welchem Falle die Schwerpunkte der Leitbalken während der Ruhelage der Wage in den durch die Schneiden E_1 und E_2 gezogenen Verticalen liegen müssen. Wird nun ein Leithebel z. B. $C_1E_1F_1$ isolirt betrachtet, so erscheint er im Gleichgewichte, sobald der Punkt E_1 unterstützt wird. Diese Annahme gestattet eine sehr einfache und sichere Justirung der isolirten Leitbalken.

Als nächste Consequenz dieser Voraussetzungen ist wohl die weitere Annahme zu betrachten, dass der eben berücksichtigte Leitbalken in Bezug auf E_1 als Drehungsmittelpunkt gleicharmig sei, weil die Eigenschaft der Gleicharmigkeit praktisch am sichersten erzielt werden kann; es ist also dann:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1' &= 2\lambda_1 \\ \lambda_2' &= 2\lambda_2. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Hiemit erscheint der Bedingung (31) vollkommen genügt, und es folgt sofort:

$$L = 2l \tag{38}$$

als Relation für den Hauptbalken. Die Gleichung für den Ausschlagwinkel wird dann:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{L(P - Q)}{Ss + l^2\left(\frac{s_1}{\lambda_1^2} + \frac{s_2}{\lambda_2^2}\right) S_1}, \tag{39}$$

welcher Ausdruck mit dem analogen für die Pfanzeder'sche Wage vollkommen übereinstimmt, wenn dort $S_1 = S_2$ gesetzt wird. Wird in der letzten Gleichung $s_1 = s_2 = 0$ angenommen, so resultirt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{L(P - Q)}{Ss}, \tag{40}$$

d. h. die Empfindlichkeit der Wage ist, wie dies auch von der Pfanzeder'schen Construction gezeigt wurde, identisch mit der Empfindlichkeit des isolirt gedachten Hauptbalkens, wenn die beiden Leitbalken in Bezug auf die Drehungspunkte E_1 und E_2 sich im indifferenten Gleichgewichte befinden.

Ueber die innere Reibung in einem Gemische von Kohlensäure und Wasserstoff.

Von

Dr. J. Puluj,

Privatdocent und Assistent am physikalischen Cabinete der Wiener Universität.

II. Abhandlung.

In einer früheren Abhandlung[1]) wurden die Resultate dreier Beobachtungsreihen über die innere Reibung in Gemischen von Kohlensäure und Wasserstoff mitgetheilt und eine von denselben nach einer Formel berechnet, welche unter gewisser Annahme über die Masse und das Volumen der Molekularsphäre in einem Gasgemische sich aus dem bekannten Ausdrucke ergibt, welchen die kinetische Gastheorie unter Voraussetzung, dass Moleküle wie elastische Kugeln sich verhalten, für die Reibungsconstante eines gleichartigen Gases liefert.

Die Versuche lehrten, dass Gase von grösseren Molekulargewichten auf die Reibung des Gemisches einen grösseren Einfluss haben, dass schon wenige Hundertstel Kohlensäure genügen, um die Reibungsconstante des Wasserstoffes merklich zu vergrössern, dass dagegen in einem Gemische aus gleichen Mengen Kohlensäure und Wasserstoff die innere Reibung eben so gross bleibt wie in reiner Kohlensäure. Ist die Concentration des der Kohlensäure beigemengten Wasserstoffes nur gering, etwa 0,4 des Gemisches, so wird die Reibungsconstante etwas grösser als die des schwereren Gases. So erhielt ich in der ersten Beobachtungsreihe in einem Gemische von 0,618 Kohlensäure und 0,382 Wasserstoff für die Reibungsconstante $\eta = 0{,}000152$ gegen 0,000150 in reiner Kohlensäure. Ich glaubte den nur unbedeutend grösseren Werth der Constante einer möglicherweise fehlerhaft ge-

1) Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. Bd. 79. — Repertorium dieser Band S. 578 ff.



machten Bestimmung zuschreiben zu sollen, indessen ist dieses anfängliche unbedeutende Wachsen der Reibungsconstante mit der Concentration des Wasserstoffes in vollkommener Uebereinstimmung mit dem Resultate der Untersuchungen, welche Graham über die Transspirationscoëfficienten von Gemischen aus Kohlensäure und Wasserstoff, denen die Reibungsconstanten proportional sind, angestellt hat. Es ergab sich aus denselben, dass der Transspirationscoëfficient der Kohlensäure etwas grösser wird, wenn man derselben nur geringe Mengen Wasserstoff beimischt.

Herr J. Clerk Maxwell[1]) berechnete auch diese Graham-schen Versuche nach einer Formel, welche er in seiner neuen Gastheorie unter Annahme einer abstossenden Kraft zwischen den Molekülen, welche der fünften Potenz ihrer Entfernungen verkehrt proportional sein soll, für die Reibungsconstante eines Gemisches zweier Gase entwickelt hat, und fand eine gute Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung. Da aber eine Constante (k), welche Herr Maxwell seiner Rechnung zu Grunde gelegt hat, etwas hypothetischer Natur ist, so schien es mir wünschenswerth zu sein, einerseits jene Rechnungen mit einem Werthe von k zu wiederholen, der sich aus der Loschmidt'schen Diffusionsconstante für Kohlensäure — Wasserstoff berechnen lässt, andererseits meine eigenen Beobachtungen zu vervollständigen und nach der Maxwell'schen Formel zu berechnen, was den Gegenstand der vorliegenden Mittheilung bilden soll.

Die von Herrn Maxwell für die Reibungsconstante η eines Gemisches zweier Gase aufgestellte Formel ist:

$$\eta = \frac{p_0 T}{\varrho_0 T_0} \cdot \frac{E p_1^2 + F p_1 p_2 + G p_2^2}{3 A_2 k_1 s_1 E p_1^2 + H p_1 p_2 + 3 A_2 k_2 s_2 G p_2^2} . \qquad (1$$

Darin haben die einzelnen Grössen folgende Bedeutung: s_1, s_2 sind specifische Gewichte und $p_1 p_2$ Partialdrucke der einzelnen Gasbestandtheile des Gemisches, welches unter dem Drucke $p = p_1 + p_2$ steht. Die Grössen p_0 und ϱ_0 sind Druck und Dichte bei 0° C. oder bei absoluter Temperatur $T_0 = 273^0$ C. und haben bei der Temperatur T die Werthe p und ϱ.

---

1) On the dynamical theorie of gases. Philosophical Magazine (4) Vol. 35 p. 212. 1868.

Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned}
E &= \frac{k s_1}{s_1 + s_2}(2 s_2 A_1 + 3 s_1 A_2),\\
F &= 3 A_2 (k_1 s_1 + k_2 s_2) - (3 A_2 - 2 A_1) k \frac{2 s_1 s_2}{s_1 + s_2},\\
G &= \frac{k s_2}{s_1 + s_2}(2 s_1 A_1 + 3 s_2 A_2),\\
H &= 3 A_2 s_1 s_2 (3 k_1 k_2 A_2 + 2 k^2 A_1),\\
A_1 &= 2{,}6595,\\
A_2 &= 1{,}3682.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Constanten k_1 und k_2 berechnen sich aus den Reibungsconstanten η_1 und η_2 nach den Formeln:

$$k_1 = \frac{p}{3 \eta_1 A_2 \varrho_1}; \quad k_2 = \frac{p}{3 \eta_2 A_2 \varrho_2} \tag{3}$$

und die Grösse k aus der Diffusionsconstante D nach der Formel:

$$k = \frac{p_1 p_2}{\varrho_1 \varrho_2 A_1 D} \cdot \frac{1}{p}. \tag{4}$$

Mit Rücksicht auf die erste der Gleichungen (3) könnte die Formel (1) auch geschrieben werden:

$$\eta = 3 A_2 k_1 s_1 \eta_1 \frac{E p_1^2 + F p_1 p_2 + G p_2^2}{3 A_2 k_1 s_1 E p_1^2 + H p_1 p_2 + 3 A_2 k_2 s_2 G p_2^2}. \tag{5}$$

Da aber die Reibungsconstante, wie gleichzeitige Versuche von Prof. A. v. Obermeyer und von mir gelehrt haben, bei verschiedenen Gasen nicht in gleicher Weise von der Temperatur abhängt, so soll $\frac{p_0 T}{\varrho_0 T_0}$ durch das arithmetische Mittel der Ausdrücke $3 A_2 k_1 s_1 \eta_1$ und $3 A_2 k_2 s_2 \eta_2$ ersetzt werden, und man erhält auf diese Weise zur Berechnung von η die Formel:

$$\eta = \frac{3}{2} A_2 (k_1 s_1 \eta_1 + k_2 s_2 \eta_2) \frac{E p_1^2 + F p_1 p_2 + G p_2^2}{3 A_2 k_1 s_1 E p_1^2 + H p_1 p_2 + 3 A_2 k_2 s_2 G p_2^2}. \tag{6}$$

Es möge hier im Anschlusse auch meine Formel, welche in der erwähnten Abhandlung abgeleitet worden ist, folgen:

$$\eta = \frac{\eta_1 \sqrt{p_1 + \frac{m_2}{m_1} p_2}}{\left[p_1 + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2} \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\right)^{\frac{4}{3}} p_2\right]^{\frac{3}{2}}}, \tag{7}$$

worin m_1, m_2 die Molekulargewichte der einzelnen gemengten Gase vorstellen und die übrigen Grössen die schon bekannte Bedeutung haben.

In der hier folgenden numerischen Berechnung der dritten Beobachtungsreihe, welche nach der Maxwell'schen Formel ausgeführt wurde, lasse ich zur leichteren Orientirung den Gang der Rechnung soviel als nöthig hervortreten.

Kohlensäure: $s_1 = 0{,}0019778 \quad \eta_1 = 0{,}000150 \quad \frac{\text{gr}}{\text{cm} \times \text{Sec.}} \quad t = 19{,}7^\circ\text{C.}$
Wasserstoff: $s_2 = 0{,}00008958 \quad \eta_2 = 0{,}000091 \quad t = 20{,}3^\circ\text{C.}$

$$p = 13{,}596 \times 76 \times 980{,}9 = 1013560 \ \frac{\text{gr}}{\text{cm} \times \text{Sec.}^2}$$

$$k_1 = \frac{1013560\,(1 + 0{,}003701 \times 19{,}7)^{0{,}92}}{1{,}529 \times 0{,}001293 \times 3 \times 0{,}000150 \times 1{,}3682} = 88{,}838 \times 10^{10} \ \frac{\text{cm}^3}{\text{gr} \times \text{Sec.}}$$

$$k_2 = \frac{1013560\,(1 + 0{,}003665 \times 20{,}3)^{0{,}69}}{0{,}0693 \times 0{,}001293 \times 3 \times 0{,}000091 \times 1{,}3682} = 3182{,}073 \times 10^{10} \ \frac{\text{cm}^3}{\text{gr} \times \text{Sec.}}$$

Nach Prof. Loschmidt[1]) ist die Diffusionsconstante für Kohlensäure — Wasserstoff bei 0° C. und 760mm Druck:

$$D = 0{,}2001 \ \frac{\text{Meter}^2}{\text{Stunde}},$$

oder auf Centimeter und Secunde reducirt:

$$D = 0{,}5558 \ \frac{\text{cm}^2}{\text{Sec.}}.$$

Mittelst letzteren Werthes der Diffusionsconstante berechnet sich der Werth von k zu:

$$k = \frac{1013560}{0{,}001293^2 \times 0{,}0693 \times 1{,}529 \times 0{,}5558 \times 2{,}6595} = 387{,}073 \times 10^{10} \ \frac{\text{cm}^3}{\text{gr} \times \text{Sec.}}$$

und mittelst k, k_1, k_2 die Constanten:

$$E = 3{,}18258 \times 10^{10},$$
$$F = 1{,}97178 \times 10^{10},$$
$$G = 0{,}18261 \times 10^{10},$$
$$H = 1{,}423349 \times 10^{20}.$$

Schliesslich erhält man nach (5) zur Berechnung der Reibungsconstante die Formel:

$$\eta = \frac{34{,}4289\,p_1^2 + 21{,}3306\,p_1 p_2 + 1{,}97452\,p_2^2}{229526\,p_1^2 + 142335\,p_1 p_2 + 21365\,p_2^2}.$$

1) Sitzungsber. der Akad. d. Wissensch. Bd. 62 S. 477. 1870.

Aus den zusammengehörigen Werthen von p_1 und p_2 ergeben sich folgende Werthe von η, welche mit den beobachteten zusammengestellt sind.

Berechnet nach Formel (5):

$p_1\, CO_2$	$p_2\, H$	η beobachtet	η berechnet	B — R
1,000	0,000	0,000150	0,000150	0
456	544	150	146	+4
207	793	138	133	+5
094	906	121	118	+3
042	958	105	106	—1
019	981	98	99	—1
009	991	94	96	—2
004	996	92	94	—2
002	998	92	93	—1
000	1,000	91	93	—2

Berechnet nach Formel (6):

$p_1\, CO_2$	$p_2\, H$	η beobachtet	η berechnet	B — R
1,000	0,000	0,000150	0,000149	+1
456	544	150	145	+5
207	793	138	132	+6
094	906	121	117	+4
042	958	105	105	0
019	981	98	98	0
009	991	94	95	—1
004	996	92	93	—1
002	998	92	93	—1
000	1,000	91	92	—1

Die Differenz B — R ist nach (6) nur unbedeutend grösser geworden. Die Berechnung nach der von mir aufgestellten Formel (7) ergab folgende Werthe:

$p_1\, CO_2$	$p_2\, H$	η beobachtet	η berechnet	B — R
1,000	0,000	0,000150	0,000150	0
456	544	150	151	—1
207	793	138	143	—5
094	906	121	128	—7
042	958	105	113	—8
019	981	98	103	—5
009	991	94	97	—3
004	996	92	94	—2
002	998	92	91	0
000	1,000	91	91	0

Wie aus diesen Tabellen zu ersehen, ist keine der aufgestellten Formeln in genügender Uebereinstimmung mit der Beobachtung. Während meine Formel zu grosse Werthe der Reibungsconstante liefert, erhält man sie nach der Maxwell'schen Formel grösstentheils zu klein.

In der erwähnten Abhandlung berechnet Herr Maxwell auch die Transspirationscoëfficienten, welche Graham für Gemische aus Wasserstoff und Kohlensäure, sowie aus Wasserstoff und Luft bestimmt hat, indem er für k einen Werth annimmt, welcher den Beobachtungsresultaten um die Mitte der Beobachtungsreihe genügt. Die so für Wasserstoff — Kohlensäure berechneten Zahlen stimmen auch mit jener beobachteten Thatsache überein, dass eine geringe Beimischung des Wasserstoffes die Transspirationszeit der Kohlensäure etwas vergrössert, und dass in beiden Beobachtungsreihen, welche ich hier folgen lasse, die Transspirationszeit durch das schwerere Gas mehr beeinflusst wird.

Kohlensäure	Wasserstoff	Beobachtet	Berechnet	Luft	Wasserstoff	Beobachtet	Berechnet
100	0	0,7470	0,7272	100	0	0,9000	0,9010
90	10	7521	7361	95	5	8960	8996
75	25	7535	7468	90	10	8880	8983
50	50	7339	7652	75	25	8790	8946
25	75	6786	6822	50	50	8179	8488
10	90	5722	5678	25	75	7488	7438
5	95	5157	5089	10	90	5880	6028
2,5	97,5	4714	4750	5	95	5282	5300
0	100	4321	4375	0	100	4434	4375

Es sei schon hier bemerkt, dass das beobachtete und berechnete Maximum der Transspirationszeit 0,7535 und 0,7652 ziemlich weit aus einander liegen, das erstere ist bei ungefähr 25 % Wasserstoff, das letztere bei 50% Wasserstoff. Die Transspirationscoëfficienten sind auf den des Sauerstoffes bezogen. Der Berechnung der Transspirationscoëfficienten in Gemischen von Kohlensäure und Wasserstoff sind folgende Zahlen zu Grunde gelegt:

$$(CO_2)\ k_1 = 3{,}9 \times 10^{10},$$
$$(H)\ k_2 = 142{,}8 \times 10^{10},$$
$$(HCO_2)\ k = 12{,}5 \times 10^{10}.$$

Dabei sind Zoll, Grain und Secunde als Einheiten gewählt.

Reducirt man die von mir für k_1 und k_2 in Gramm, Centimeter und Secunde berechneten Zahlen auf die von Herrn Maxwell ge-

wählten Einheiten, so ergeben sich 12 mal kleinere Werthe, wie aus nachfolgender Zusammenstellung zu ersehen ist. Der Grund liegt darin, dass Herr Maxwell die Längendimension von

$$p = \text{Zahl} \times \frac{\text{Masse}}{\text{Länge} \times \text{Zeit}^2}$$

in Fuss und jene von

$$D = \text{Zahl} \times \frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}} \quad \text{und} \quad \eta = \text{Zahl} \times \frac{\text{Masse}}{\text{Länge} \times \text{Zeit}}$$

in Zoll angenommen hat[1]). Wird die Längendimension von p auch in Zoll ausgedrückt, so erhält man für p, k, k_1, k_2 12 mal kleinere Zahlen. Dieser Fehler hatte übrigens auf die Maxwell'sche Berechnung von t keinen Einfluss, weil in der Formel (5) sowohl Zähler als Nenner 12×12 mal grösser wird.

Die Berechnung von k aus der Loschmidt'schen Diffusionsconstante und von k_1, k_2 aus den hier angegebenen Reibungsconstanten ergibt in den Einheiten Zoll, Grain, Secunde die Werthe:

$$k = 1{,}5306 \times 10^{10} \frac{\text{Inch.}^3}{\text{Grain} \times \text{Sec.}} \quad \text{Maxwell } k = 12{,}5 \times 10^{10} = 12 \times 1{,}041 \times 10^{10}$$

$$k_1 = 0{,}35327 \times 10^{10} \frac{\text{Inch.}^3}{\text{Grain} \times \text{Sec.}} \quad \text{„} \quad k_1 = 3{,}9 \times 10^{10} = 12 \times 0{,}323 \times 10^{10}$$

$$k_2 = 12{,}65 \times 10^{10} \frac{\text{Inch.}^3}{\text{Grain} \times \text{Sec.}} \quad \text{„} \quad k_2 = 142{,}8 \times 10^{10} = 12 \times 11{,}9 \times 10^{10}$$

Aus den voranstehenden neu berechneten Zahlen ergibt sich zur Berechnung der Transspirationszeiten die Formel:

$$t = \frac{223945 p_1^2 + 130680 p_1 p_2 + 12858 p_2^2}{305917 p_1^2 + 190007 p_1 p_2 + 29149 p_2^2}. \tag{8}$$

---

1) Herr Maxwell berechnet aus den Graham'schen Versuchen für Luft — Kohlensäure $D = 0{,}0235 \frac{\text{Inch.}^2}{\text{Sec.}}$ bei 16 °C. und findet durch Versuche für Luft $\eta = 0{,}0936 \frac{\text{Grain}}{\text{Foot} \times \text{Sec.}}$, oder in Zoll ausgedrückt: $\eta = 0{,}0078 \frac{\text{Grain}}{\text{Inch.} \times \text{Sec.}}$ bei 16,7 °C. Nimmt man das Gewicht von 1 Cubikzoll Luft zu 0,32738 Grains, so ergibt sich mit dem Werthe $p = 477360000 \frac{\text{Grain}}{\text{Foot} \times \text{Sec.}^2}$ für Luft — Kohlensäure die Constante:

$$k = \frac{477360000}{0{,}32738^2 \times 1{,}529 \times 0{,}0235 \times 2{,}6595} \left(\frac{274{,}6 + 16{,}0}{274{,}6}\right)^2 = 5{,}2 \times 10^{10}$$

und für Luft:

$$k_1 = \frac{477360000}{0{,}32738 \times 3 \times 0{,}0078 \times 1{,}3682} \cdot \frac{274{,}6 + 16{,}7}{274{,}6} = 4{,}83 \times 10^{10}.$$

Die Maxwell'schen Werthe sind $k = 5{,}2 \times 10^{10}$; $k_1 = 4{,}81 \times 10^{10}$.

Die nach dieser und meiner Formel

$$t = \frac{0{,}747 \sqrt{p_1 + 0{,}045455\, p_2}}{(p_1 + 0{,}223763\, p_2)^{\frac{3}{4}}} \qquad (9$$

berechneten Werthe sind mit den beobachteten Zahlen in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

$p_1\ CO_2$	$p_2\ H$	Beobachtet	Nach Formel (8)	Nach Formel (9)
100	0	0,7470	0,7320	0,7470
90	10	7521	7289	7498
75	25	7535	7220	7566
50	50	7339	6999	7493
25	75	6786	6428	7124
10	90	5722	5578	6238
5	95	5157	5089	5561
2,5	97,5	4714	4779	5048
0	100	4321	4411	4321

Wie aus der voranstehenden Tabelle ersichtlich ist, zeigen die mit dem richtigen Werthe k nach der Maxwell'schen Formel (8) berechneten Transspirationscoëfficienten nicht diese Uebereinstimmung mit der Beobachtung, wie sie sich mittelst des von Herrn Maxwell jedenfalls zu klein angenommenen Werthes von k ergibt. Man vermisst hier das beobachtete anfängliche Grösserwerden der Transspirationscoëfficienten, während nach meiner Formel auch das berechnete Maximum derselben mit dem beobachteten (bei 25% Wasserstoff) zusammenfällt. Andererseits kann aber nicht übersehen werden, dass auch meine Formel keine vollkommene Uebereinstimmung mit der Beobachtung zeigt, namentlich wenn die Menge Wasserstoff grösser wird als die der Kohlensäure, in welchem Falle die berechneten Werthe der Transspirationscoëfficienten etwas zu gross ausfallen.

Um die mehrmals erwähnte, von Graham beobachtete Thatsache, dass bei geringen Mengen Wasserstoffes der Transspirationscoëfficient des Gemisches aus Kohlensäure und Wasserstoff, also auch ihre Reibungsconstante etwas grösser wird, mit aller Bestimmtheit zu constatiren, habe ich noch eine Beobachtungsreihe mit derartigen Gemischen ausgeführt, deren Resultate ich hier folgen lasse.

Es sei noch erwähnt, dass die vorhandene Menge Kohlensäure im Gemische mittelst Absorption durch Aetzkali bestimmt wurde.

In der nachfolgenden Zusammenstellung ist die Bedeutung der einzelnen Columnen ersichtlich.

Nr.	η	η Mittel	t	η reduc. auf 14,7°	p_1 CO_2	p_2 H
1	0,0001467					
2	1471	0,0001468	14,7°	0,0001468	1,0000	0,0000
3	1467					
4	1480					
5	1486	1482	15,7	1477	9003	0997
6	1481					
7	1499					
8	1496	1496	15,7	1491	8015	1985
9	1493					
10	1502					
11	1502	1502	15,5	1499	7225	2775
12	1502					
13	1483					
14	1484	1484	16,6	1475	4346	5654
15	1486					
16	1410					
17	1409	1408	16,7	1399	2641	7359
18	1406					
19	1325					
20	1317	1319	17,4	1307	1608	8392
21	1316					
22	1216					
23	1217	1217	15,2	1215	0984	9016
24	1219					
25	1110					
26	1105	1113	15,6	1111	0642	9358
27	1124					
28	1034					
29	1028	1033	15,2	1031	0388	9612
30	1036					
31	986					
32	998	991	14,6	991	0240	9760
33	989					
34	956					
35	958	958	14,7	958	0168	9832
36	961					
37	891					
38	893	893	14,6	893	0,0000	1,0000
39	894					

Zur Berechnung dieser Versuchsreihe erhält man nach **Maxwell**:

$$k = 387{,}073 \times 10^{10}, \qquad E = 3{,}18258 \times 10^{10},$$
$$k_1 = 89{,}333 \times 10^{10}, \qquad F = 1{,}98202 \times 10^{10},$$
$$k_2 = 3198{,}993 \times 10^{10}, \qquad G = 0{,}18261 \times 10^{10},$$
$$H = 1{,}432556 \times 10^{10}.$$

$$\eta = \frac{33{,}88221 p_1^2 + 21{,}1009 p_1 p_2 + 1{,}944057 p_2^2}{230805 p_1^2 + 143256 p_1 p_2 + 21479 p_2^2} \qquad \text{(I}$$

oder nach der von mir aufgestellten Formel:

$$\eta = \frac{0{,}0001468 \sqrt{p_1 + 0{,}045455 p_2}}{(p_1 + 0{,}207489 p_2)^{\frac{3}{2}}}. \qquad \text{(II}$$

In der folgenden Tabelle sind die nach beiden Formeln berechneten Werthe mit den beobachteten zusammengestellt.

p_1	p_2	η beobachtet	η berechnet I	B — R	η beobachtet	η berech. II	B — R
1,0000	0,0000	0,000147	0,000147	0	0,000147	0,000147	0
9003	0997	148	147	+1	148	148	0
8015	1985	149	147	+2	149	148	+1
7225	2775	150	146	+4	150	149	+1
4346	5654	148	143	+5	148	148	0
2641	7359	140	135	+5	140	144	—4
1608	8392	131	126	+5	131	136	—5
0984	9016	122	117	+5	122	126	—4
0642	9358	111	110	+1	111	118	—7
0388	9612	103	103	0	103	110	—7
0240	9760	99	99	0	99	101	—2
0168	9832	96	97	—1	96	100	—4
0000	1,0000	89	91	—2	89	89	0

Wie aus dieser Zusammenstellung zu ersehen ist, liefert die Maxwell'sche Formel im Allgemeinen zu kleine Werthe der Reibungsconstante, während dieselben nach meiner Formel zu gross ausfallen, namentlich wenn die Concentration des Wasserstoffes grösser als 0,9 des Gemisches geworden ist. Ebenso wie in den früheren Rechnungen nimmt die Reibungsconstante nach der Maxwell'schen Formel bei zunehmender Concentration des Wasserstoffes fortwährnnd ab, während dieselbe nach meiner Formel in Uebereinstimmung mit der Beobachtung anfänglich grösser wird, bei 0,3 Wasserstoff das Maximum erreicht, bei 0,6 Wasserstoff dem Werthe in reiner Kohlensäure gleich wird und bei weiter zunehmender Concentration des Wasserstoffes immerfort abnimmt.

Es wäre von Interesse zu untersuchen, ob auch andere Gasgemische dieses Wachsen der Reibungsconstante bei geringer Concentration des leichteren Gases zeigen. Nach den von Graham gemachten Versuchen über die Transspirationscoëfficienten in Gemischen aus Luft und Wasserstoff zu schliessen, müsste es nicht immer der Fall sein.

Ueber die Bestimmung der Brechungsverhältnisse fester Körper mittelst des Refractometers.

Von
Professor **Abbe.**

(Aus den Sitzungsberichten der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Diese Mittheilung betrifft eine neuerdings bewirkte Verbesserung der von mir vor mehreren Jahren beschriebenen Refractometer[1]), durch welche letztere auch zur optischen Untersuchung fester Körper geeignet werden.

Bei der ursprünglichen Einrichtung dieser Instrumente wird die Totalreflexion, welche eine dünne Schicht einer durchsichtigen Substanz, zwischen zwei Flintglasprismen eingeschlossen, in durchfallendem Lichte zeigt, zur Ermittelung des Brechungsexponenten und der Farbenzerstreuung jener Substanz benutzt. Die Vortheile, welche diese Methode, gegenüber dem Wollaston'schen Verfahren, sowohl in Hinsicht auf die Leichtigkeit wie in Hinsicht auf die Genauigkeit der Beobachtungen darbietet, zur Geltung zu bringen, war die maassgebende Richtschnur bei der Construction der Refractometer, und da jene Methode der Regel nach auf flüssige Substanzen beschränkt ist, so lag es damals nahe, eine mögliche Anwendung derselben Apparate auf feste Körper, welche eine andere Beobachtungsweise nöthig gemacht hätte, ausser Betracht zu lassen.

Inzwischen hat Herr F. Kohlrausch[2]) auf die grosse Bedeutung hingewiesen, welche der Methode der Totalreflexion namentlich für die Untersuchungen der Krystalloptik zukommt, weil sie die genaue optische Bestimmung von Substanzen ermöglicht, welche keiner anderen Beobachtungsmethode zugänglich sind, und weil sie zugleich für die Ermit-

1) Neue Apparate zur Bestimmung des Brechungs- und Zerstreuungsvermögens fester und flüssiger Körper. Jena 1874.

2) Ueber die Ermittelung von Lichtbrechungsverhältnissen durch Totalreflexion. Annalen der Physik und Chemie N. F. Bd. 4 S. 1.

telung der optischen Constanten doppelt-brechender Körper ausnehmend günstige Bedingungen herbeiführt. Herr Kohlrausch hat gleichzeitig einen zweckmässigen Apparat construirt — Totalreflectometer von ihm benannt —, welcher die experimentelle Handhabung der Methode der Totalreflexion an festen Körpern in ähnlicher Weise vereinfacht, wie es durch die Refractometer in Bezug auf Flüssigkeiten geschehen ist. Sein Apparat gründet sich auf die Beobachtung des Grenzwinkels der totalen Reflexion an einer polirten planen Fläche des zu untersuchenden Körpers in Schwefelkohlenstoff.

Das Interesse, welches die Beobachtung der Totalreflexion an festen Substanzen durch jene verdienstliche Arbeit erlangt hat, hat es mir nahe gelegt, die Verwendbarkeit meines Refractometers für derartige Beobachtungen ins Auge zu fassen, um einerseits dessen Gebiet der Anwendung zu erweitern, andererseits aber auch um die optische Bestimmung fester Körper, namentlich für krystallographische Zwecke, noch in grösserem Umfang zu ermöglichen, als der Kohlrausch'sche Apparat dies gestattet.

Die Versuche, welche ich im Laufe des letzten Winters für diesen Zweck ausgeführt habe, ergaben nun das Resultat, dass für die Beobachtung der Totalreflexion im reflectirten Licht die ursprüngliche Wollaston'sche Methode des Ankittens der zu untersuchenden Substanz an die Fläche eines Glasprismas mit Hilfe eines Flüssigkeitstropfens im Wesentlichen ganz dieselben Bedingungen darbietet wie das von Kohlrausch angewandte Verfahren des Eintauchens in eine Flüssigkeit. In beiden Fällen bleibt die Beobachtung im Nachtheil gegenüber der Beobachtung der totalen Reflexion im durchfallenden Licht, weil es sich nicht, wie bei letzterer, um die Grenze zwischen einem vollkommen verdunkelten und einem hell bleibenden Feld, sondern nur um die Grenze zwischen Feldern von etwas verschiedener Helligkeit handelt. Ein genügend vollkommenes Glasprisma vorausgesetzt, macht es aber bei sonst gleicher Beschaffenheit des zu untersuchenden Körpers für die Schärfe der Wahrnehmung keinen sichtbaren Unterschied, ob die reflectirten Strahlen in der angrenzenden Flüssigkeit bleiben und durch eine Planplatte in den Luftraum übertreten, oder ob sie in einen prismatischen Glaskörper gelangen und von diesem aus beobachtet werden. Ein Unterschied besteht allein darin, dass im letzteren Falle andere Einrichtungen getroffen werden müssen, um die numerische Bestimmung des Grenzwinkels

und der sonst zur Berechnung erforderlichen Data genügend sicher zu stellen. Diejenigen Einrichtungen aber, welche bei Beobachtung durchfallender Strahlen dieses zu leisten geeignet sind, müssen natürlich in ganz derselben Weise auch bei Benutzung reflectirten Lichtes Anwendung finden können.

Darauf hin ist, um das grössere in der oben citirten Abhandlung unter Fig. 7 abgebildete Refractometer zur Beobachtung fester Körper anwendbar zu machen, keine andere Veränderung nöthig gewesen als eine geringe Modification in der Fassung des auf der Alhidade sitzenden Flintglasprismas. Man braucht nur die Rückwand der Metallfassung an geeigneter Stelle zu durchbrechen, um ein Fenster für den Eintritt reflectirbarer Strahlen zu gewinnen, die dieser Rückwand anliegende, vorher unbenutzt bleibende, Prismenfläche zu poliren und auf diese eine halbkugelige Glaslinse oder ein kleines Prisma aufzukitten, damit Strahlen in geringer Neigung gegen die freiliegende Prismenfläche eintreten können.

Mit dieser auch an den älteren Instrumenten leicht nachträglich anzubringenden Veränderung, welche die Beobachtung von Flüssigkeiten in durchfallendem Licht natürlich gar nicht beeinträchtigt, kann jeder durchsichtige oder undurchsichtige feste Körper, ein Krystall, eine Platte u. A., wenn er eine genügend ebene und leidlich polirte Fläche darbietet, ohne weiteres untersucht werden, indem man auf die freie Fläche des Flintglasprismas einen Tropfen einer geeigneten stark brechenden Flüssigkeit bringt und das betreffende Stück mit der polirten Fläche aufdrückt. Kleine Objecte haften hiebei, namentlich wenn man nur wenig Flüssigkeit anwendet, durch Adhäsion fest genug, um in jeder Stellung des Prismas die richtige Lage zu behalten; grössere und schwerere Stücke kann man mittelst einer an der Prismenfassung angebrachten Klemmfeder genügend fixiren.

Alle übrigen Operationen, Einstellung, Ablesung etc., bleiben nun ganz dieselben wie bei der Untersuchung von Flüssigkeiten; namentlich kann auch die Dispersion an festen Körpern mit Hilfe der Compensatorprismen in ganz gleicher Art bestimmt werden.

Die Einstellung des Compensators auf eine farblose Grenzlinie ist allerdings im reflectirten Licht wegen des fehlenden Contrastes zwischen Hell und Dunkel etwas unsicherer und die Dispersionsangabe deshalb etwas ungenauer als bei Beobachtung durchfallender Strahlen; im Uebrigen besteht kein Unterschied in Bezug auf die Genauigkeit der Messung. Die Grenzlinie der Totalreflexion erscheint zwar sehr

viel zarter, aber nicht weniger scharf markirt wie im durchfallenden Licht; nur das erste Auffinden derselben macht deshalb öfters einige Mühe, zumal wenn der Compensator nicht schon annähernd auf farblose Grenze eingestellt ist. Eine eigentliche Schwierigkeit tritt dabei aber nach meinen Erfahrungen niemals ein, auch wenn man mit gewöhnlichem weissen Licht und ohne alle künstlichen Vorkehrungen beobachtet. Es genügt, bei Tage das Instrument in die Nähe eines Fensters mit freiem Himmel zu stellen und eventuell noch einen Spiegel vor dem Apparat auf den Tisch zu legen, um Strahlen bis zur horizontalen Richtung zu erhalten, Abends aber dicht vor dem Milchglasschirm einer hell brennenden Lampe zu beobachten. Zur Erleichterung des Auffindens der Reflexionsgrenze und zur Unterstützung der genauen Einstellung kann man noch einen kleinen Schirm aus dunklem Papier mit spaltförmigem Ausschnitt zu Hilfe nehmen, den man in freier Hand vor der Oeffnung in der Rückwand der Prismenfassung hin und her bewegt, um den Lichteinfall möglichst günstig zu erhalten.

Bei genügend durchsichtigen Objecten lässt sich übrigens meistens auch an durchfallenden Strahlen die Totalreflexion beobachten und auf diese Weise eine sehr erleichterte Untersuchung sowie eine genauere Bestimmung der Dispersion herbeiführen. Irgend eine, vielleicht ganz schmale und unregelmässige Facette oder Bruchfläche, welche an die zu untersuchende Planfläche anstösst (bei Platten z. B. eine schmale Seitenfläche), lässt, wenn sie dem einfallenden Licht zugekehrt wird, Strahlen genug durch den festen Körper eintreten, um nach Abblendung der von oben die Grenzfläche treffenden Strahlen ein genügend helles Sehfeld zu erhalten, in welchem die Grenze der Totalreflexion sehr markirt sichtbar wird, sobald die Drehung der Alhidade die betreffende Stellung des Prismas herbeiführt. Man wird in diesem Falle das Fenster in der Rückwand der Prismenfassung verdecken und wieder den Beleuchtungsspiegel am Fuss des Refractometers benutzen.

Für die optische Bestimmung doppelt-brechender Körper ist es wesentlich, dass die zu beobachtende Planfläche in ihrer eigenen Ebene gedreht werden könne, um successive verschiedene Richtungen innerhalb dieser in die Ebene der Reflexion zu führen. Beim Refractometer lässt sich dieses auf die einfachste Weise und ohne alle weiteren Vorrichtungen erreichen, indem man während des Durchsehens durch das Fernrohr das Object mit freier Hand — eventuell mittelst eines angekitteten Heftchens — auf seiner Auflagefläche dreht und dabei

der Verschiebung der Reflexionsgrenzen, oder einer derselben, mit der Alhidade folgt. Sofern es sich aber, wie bei genaueren Untersuchungen der Krystalloptik, um die Messung dieser Drehungen handelt, ist es leicht, mit der Prismenfassung eine besondere Vorrichtung zu verbinden, welche gestattet, jene um eine unveränderliche Achse auszuführen und die durchlaufenen Winkel an einem kleinen Theilkreise abzulesen. Für solche Zwecke wird man natürlich auch das Ocular des Beobachtungsrohrs mit einem Nicol'schen Prisma und mit Theilkreis versehen, um zugleich die Polarisationsrichtung der Strahlen bei jeder Stellung des Objectes bestimmen zu können.

Dass die Verbindung des Präparates mit der Fläche des Flintglasprismas durch eine flüssige Schicht zu keiner Fehlerquelle Veranlassung gibt, kann durch einfache Versuche festgestellt werden. Alle hier in Betracht kommenden Flüssigkeiten breiten sich stets in einer so dünnen und gleichförmigen Schicht zwischen den auf einander gedrückten Planflächen aus, dass wiederholtes Anlegen unter verschiedener Manipulation nicht die geringste Differenz in den Einstellungen herbeiführt. Im Uebrigen hängt die Genauigkeit der Beobachtung bei der dem Refractometer gegebenen Einrichtung nur noch ab von der Zuverlässigkeit der empirischen Theilung, welche aus der Einstellung der Alhidade direct den Brechungsindex ableitet. In diesem Punkte ist natürlich bei den hier betrachteten Apparaten der Beobachter in höherem Grade von der Sorgfalt des Verfertigers abhängig, als bei einem Instrument, welches die zur Berechnung der Beobachtungen erforderlichen Einzeldata durch blosse Winkelmessung ergibt.

Nun liesse sich auch für die Beobachtung der Totalreflexion an einem prismatischen Glaskörper ohne alle Schwierigkeit Einrichtung treffen, um den Grenzwinkel der Reflexion in gewöhnlichem Winkelmaass zu erhalten und zugleich die Constanten des Prismas jederzeit bestimmen zu können; die unmittelbare Ablesung des Beobachtungsresultats unter Beseitigung jeder Rechnung muss aber als ein so grosser Vortheil für den praktischen Gebrauch der Methode angesehen werden, dass es sicher nicht angezeigt wäre, in Rücksicht auf die hier ins Auge gefassten Zwecke die bisherige Einrichtung des Messapparates zu verlassen. Auch bei wissenschaftlichen Untersuchungen wird hiezu um so weniger eine Veranlassung eintreten, als gerade die Bestimmung fester Körper jedem Beobachter ein höchst einfaches Mittel an die Hand gibt, die vom Verfertiger auf Grund einer berechneten

Tabelle ausgeführte Theilung seines Instruments auf ihre Richtigkeit zu prüfen und eventuell die Ablesungen zu corrigiren. Einige Mineralien von sehr constanter Beschaffenheit, wie Quarz und Kalkspath, und Probestückchen von spectrometrisch bestimmten Glasarten ermöglichen die directe Controle der Theilung an so vielen Punkten, dass etwaige Fehler mit Hilfe einer leicht zu entwerfenden Correctionstafel genügend eliminirt werden können.

Bei den Dimensionen, welche den getheilten Sector an dem Refractometer gegeben sind, hält die Genauigkeit der Ablesung, wenn eine Lupe benutzt wird, vollkommen Schritt mit der Genauigkeit der Einstellung. Es tritt deshalb kein Bedürfniss ein, zum Zweck möglichst scharfer Ermittelung der Differenz der Brechungsindices bei doppelt-brechenden Substanzen eine mikrometrische Ocularscala zu Hilfe zu nehmen, deren Gebrauch in diesem Falle, wegen der etwas complicirten Reduction, unbequem sein würde.

Um an einem Beispiel zu zeigen, wie weit bei sorgfältiger Ausführung der Theilung die Genauigkeit der directen, nicht corrigirten Ablesungen reicht, führe ich hier die Resultate an, welche das von mir benutzte, in der hiesigen Werkstatt von C. Zeiss angefertigte Refractometer an zwei senkrecht zur optischen Achse geschliffenen Plättchen von Quarz und Kalkspath ergeben hat, indem ich die Rudberg'schen Zahlen daneben setze. Es fand sich bei Beobachtung mit weissem Licht, unter Benutzung des Compensators, der Brechungsindex für D und die aus der Compensatorstellung für das Intervall von D bis F berechnete Dispersion:

		ω	Δn	ε	Δn
Bergkrystall	Refractometer	1,5440	0,0054	1,5530	0,0055
	Rudberg	1,5442	0,0055	1,5533	0,0057
Kalkspath .	Refractometer	1,6588	0,0097	1,4858	0,0043
	Rudberg	1,6585	0,0095	1,4864	0,0044

Der Index des Instruments ist bei diesen Beobachtungen nach einem Crownglas-Plättchen vom Index 1,5180 justirt worden. Die Differenz von einander nahe liegenden Brechungsexponenten, z. B. bei Substanzen von geringer Doppelbrechung, wird immer bis auf etwa zwei Einheiten der vierten Decimale richtig erhalten werden, wofern nur die Beschaffenheit der reflectirenden Fläche genügend scharfe Einstellungen zulässt. Denn in diesem Falle müssen sich nicht nur

die Fehler der Theilung, sondern, bei annähernd übereinstimmenden Dispersionen, auch die aus etwaiger Ablenkung der Compensatorprismen entspringenden Fehler so gut wie vollständig eliminiren.

Die wichtigste Frage für die hier betrachteten Anwendungen des Refractometers betrifft indess die Flüssigkeiten, welche zur optischen Verbindung der Objecte mit dem Flintglasprisma geeignet sind. Da die verbindende Schicht höheren Brechungsindex besitzen muss als der zu untersuchende feste Körper, wenn die Totalreflexion an dessen Oberfläche und nicht an der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Prisma eintreten soll, so hängt der Umfang der möglichen Anwendung des Refractometers wesentlich von den für diesen Zweck disponiblen Flüssigkeiten ab.

Für die Mehrzahl der bei optischen Untersuchungen vorkommenden Körper bietet sich nun in dem Cassia-Oel eine in jeder Hinsicht bequeme Substanz dar. Sie reicht bis zum Index 1,58. Merklich weiter, bis zu 1,62 bei mittlerer Temperatur, gelangt man mit reinem Zimmt-Aldehyd (C_9H_8O), der in seinen sonstigen Eigenschaften dem Cassia-Oel völlig gleichkommt und deshalb für solche Verwendung vorzüglich geeignet ist[1]). Schwefelkohlenstoff führt zu demselben Punkte, ist indess wegen seiner Flüchtigkeit hier etwas unbequem. Ueber diese Grenze hinaus wird aber die Auswahl sehr beschränkt. Bei einer Durchmusterung der Präparatensammlung des hiesigen Universitätslaboratoriums, welches Herr Professor Geuther zu gestatten so freundlich war, haben sich zwar mehrere Substanzen gefunden, deren Brechungsindex denjenigen des Schwefelkohlenstoffs zum Theil bedeutend übertrifft[2]); mit einer einzigen Ausnahme sind aber alle wegen ihrer sonstigen Eigenschaften (Zersetzbarkeit, belästigende Dämpfe etc.) wenigstens für eine regelmässige Verwendung so gut wie unbrauchbar. Bis jetzt kenne ich nur ein Präparat, Arsen-Bromür ($AsBr_3$), dessen Anwendung keinerlei Hinderniss finden wird. Es ist bei Temperaturen über 20° eine fast farblose Flüssigkeit von öliger Consistenz, nicht flüchtig, chemisch ziemlich indifferent wie es scheint,

1) Ich verdanke die Kenntniss dieses für mehrere optische Zwecke ausgezeichnet brauchbaren Materials freundlicher Mittheilung des Hrn. Prof. A. Weinhold in Chemnitz.

2) Bei einer Temperatur von ca 20° ergab das Refractometer:

Schwefel-Chlorür ($Cl\,S$)	1,654
Selenyl-Chlorür ($Se\,O\,Cl_2$)	1,653
Phenyl-Sulfid ($[C_6H_5]_2S$)	1,623
Phosphor-Bromür ($P\,Br_3$) über . .	1,68

so dass die meisten Stoffe, wenigstens bei kurz dauernder Berührung, davon nicht verletzt werden (Kalkspath verliert allerdings nach längerer Benetzung die Politur). Sein Brechungsexponent besitzt nach einer Bestimmung im Hohlprisma bei der Temperatur 24° den abnorm hohen Werth 1,781 (für Natronlicht), fast dem schwersten bis jetzt hergestellten Flintglase gleich, so dass also mit diesem Präparat die äusserste Grenze erreicht wird, welche der Mangel stärker brechender Glasarten der Anwendung des Refractometers auf alle Fälle setzt. Es hat nur den unerheblichen Uebelstand, dass es schon bei 20°C. krystallinisch erstarrt. Doch dürfte dies kaum eine nennenswerthe Erschwerung für den Gebrauch darstellen, selbst wenn es nicht — wie wahrscheinlich ist — gelingen sollte, durch Zusatz kleiner Mengen einer andern geeigneten Substanz den Gefrierpunkt auf eine geringere Temperatur zu bringen, ohne den Brechungsindex merklich zu erniedrigen. Man hätte dann nur beim Beobachten in einem Raume von niederer Temperatur das Instrument um ein Weniges erwärmt zu halten, — was keinerlei Nachtheil mit sich bringt.

Soweit also nicht etwa in einzelnen Fällen chemische Reactionen im Wege stehen, wird dieses leicht herzustellende Präparat überall da den Gebrauch des Refractometers ermöglichen, wo Cassia-Oel oder Zimmt-Aldehyd den Dienst versagen. Man wird zu ihm seine Zuflucht aber erst dann zu nehmen brauchen, wenn die Beobachtung mit den zuvor genannten Substanzen keine Reflexionsgrenze vor derjenigen Stellung der Alhidade ergibt, welche die Totalreflexion dieser Flüssigkeiten anzeigt. Uebrigens ist es wahrscheinlich, dass bei weiterer Nachforschung auch noch andere stark lichtbrechende Verbindungen sich finden werden, die das Arsen-Bromür geeigneten Falles ersetzen können[1]).

Zu den bis jetzt in der hiesigen optischen Werkstatt ausgeführten Refractometern ist ein Flintglas vom Brechungsindex pp. 1,72 angewandt worden; die Theilung des Sectors geht dabei bis zu 1,65 oder 1,66. Der Besitz einer Flüssigkeit von dem oben angegebenen hohen Brechungsvermögen lässt es angezeigt erscheinen, in Rücksicht auf möglichst umfassende Untersuchung fester Körper das stärkste Flintglas zu verwenden, welches zur Zeit zu haben ist. Demnächst werde

1) Herren, denen grösseres Material an chemischen Präparaten oder reichere Erfahrung zu Gebote steht, werden mich zu grossem Dank verpflichten, wenn sie mich auf solche Verbindungen aufmerksam machen wollen, die nach ihrer Zusammensetzung oder nach ihrem Aussehen ein die Lichtbrechung des Schwefelkohlenstoffs überschreitendes Brechungsvermögen vermuthen lassen.

ich denn ein jetzt in Arbeit befindliches Refractometer vorlegen, welches mit allen für krystall-optische Untersuchungen wünschenswerthen Apparaten versehen und in Bezug auf die mechanische Einrichtung diesem Zweck möglichst angepasst ist, dessen Prisma einen Index von nahezu 1,80 besitzt, so dass die Beobachtung mit ihm wenigstens bis zum Index 1,75 reichen wird. Mit dieser Modification wird das Refractometer eine genaue optische Bestimmung von Materialien ermöglichen, die bis heute noch niemals haben untersucht werden können, und es werden nur sehr wenige Objecte auf mineralogischem und chemischem Gebiet noch übrig bleiben, welche diese Beobachtungsmethode nicht erreicht.

Das Mitgetheilte wird zur Genüge zeigen, dass das Refractometer auch für die optische Bestimmung fester Körper vollständig geeignet ist, sobald nur Vorkehrung getroffen wird, um eben so leicht mit reflectirtem wie mit durchfallendem Licht beobachten zu können. Im Vergleich mit dem von Kohlrausch eingeschlagenen Weg wird aber die Anwendung des hier in Rede stehenden Apparates in mehreren Punkten wesentliche Vorzüge darbieten. — Die Annehmlichkeit, mit gewöhnlichem weissen Licht beobachten zu können, und der Vortheil, dabei zugleich eine ziemlich genaue Bestimmung der mittleren Dispersion zu erhalten, ist allerdings mittelst meines Compensatorapparates bei jeder Beobachtungsmethode erreichbar. Dagegen hat schon die Anwendung einer vorausberechneten Theilung zur directen Ablesung der Brechungsexponenten, welche dem praktischen Gebrauch eine so grosse Erleichterung gewährt, ein Prisma aus fester Substanz zur Voraussetzung, wegen der Veränderlichkeit der Brechungsexponenten aller Flüssigkeiten. Wichtiger ist wohl noch der Unterschied, den es für die leichte und rasche Ausführung aller mit der Beobachtung verbundenen Manipulationen macht, je nachdem das Präparat unter einer Flüssigkeit oder auf einer freiliegenden Glasfläche zu behandeln ist. Von einigem Belang ist ferner der Wegfall aller Temperaturcorrectionen beim Refractometer. Der Brechungsindex des Flintglases, wie überhaupt wohl aller festen Körper, wird von der Temperatur so wenig beeinflusst, dass die Veränderung im Spielraum der gewöhnlichen Temperaturschwankungen völlig unmerklich bleibt. Beim Gebrauch einer Flüssigkeit dagegen ist mit hohem Brechungsvermögen auch stets eine starke Temperaturvariation des die Grundlage der Messung bildenden Coëfficienten verbunden, so dass schon ziemlich

genaue Temperaturbestimmung erforderlich wird, wenn die von dieser Seite her möglichen Fehler die sonst erreichbare Genauigkeit nicht erheblich beeinträchtigen sollen. Endlich bleibt dem Refractometer noch der beträchtliche Vorsprung in der Ausdehnung der Messung nach der Seite des hohen Brechungsexponenten, der so lange bestehen wird, als sich nicht etwa — wozu nur eine geringe Aussicht sein dürfte — eine Flüssigkeit von extrem hohem Index findet, welche auch in grösseren Mengen so handlich und so inaggressiv wie der Schwefelkohlenstoff ist. Da beim Refractometer die betreffende Flüssigkeit nur in ganz minimalen Portionen zur Verwendung kommt und Verunreinigung, Zerstreuung u. dergl. bei einiger Vorsicht völlig zu vermeiden ist, so kann man hier unbedenklich Substanzen in Gebrauch nehmen, mit welchen man, wie z. B. mit Arsen-Bromür, aus naheliegenden Gründen in grösseren Quantitäten nicht wird häufig manipuliren dürfen.

In Betreff des Verfahrens bei der optischen Untersuchung krystallisirter Substanzen nach der Methode der Totalreflexion verweise ich auf die oben citirte Abhandlung von F. Kohlrausch[1]).

Was die Untersuchung flüssiger Stoffe anlangt, so wird man zwar, aus den oben erwähnten Gründen, der Regel nach bei solchen die Beobachtung der Totalreflexion im durchfallenden Licht vorziehen; jedoch kann auch hier die gelegentliche Benutzung reflectirter Strahlen gute Dienste leisten. Den Index der Alhidade wird man immer leichter und sicherer, statt nach dem Brechungsexponenten des Wassers, nach dem eines anderweitig bestimmten Glasplättchens oder nach dem Exponenten des ordentlichen Strahles eines Bergkrystallplättchens (1,5442) justiren, weil dabei die Berücksichtigung der Temperatur in Wegfall kommt. Ausserdem sind aber auch unter den flüssigen und halbfesten Stoffen, die man bis jetzt nach dem ursprünglichen Verfahren untersucht hat, viele, welche nur schwierig oder unvollkommen in eine genügend dünne und durchsichtige Schicht sich ausbreiten lassen. Solche Präparate — z. B. die festen Augenmedien, organische Gewebe etc. — wird man von nun an leichter und genauer beobachten können, indem man sie entweder direct oder unter Benutzung einer geeigneten Zwischenflüssigkeit auf die freiliegende Fläche des Prismas aufpresst und die Reflexionsgrenze mittelst auffallender Strahlen einstellt.

---

1) Vergl. auch W. Kohlrausch, die experimentelle Bestimmung von Lichtgeschwindigkeiten in Krystallen. Annalen der Physik und Chemie Bd. 6 S. 86.

Kleinere Mittheilungen.

Binoculares Mikroskop.

Von

H. Goltzsch.

Der Gedanke, das mikroskopische Bild zu einem stereoskopischen zu machen, hat zur Erfindung verschiedenartiger Doppelmikroskope geführt, deren Grundprincip anfangs die Vereinigung zweier selbständigen Mikroskope, später die Spaltung der aus nur einem Objectiv austretenden Lichtbündel bei Anwendung zweier Oculare war. Auch diese Spaltung ist in verschiedener Weise versucht worden; gegenwärtig ist als das beste Mittel dazu die totale Reflexion durch Glasprismen anerkannt. Jedoch sind derartige Instrumente, in Deutschland wenigstens, fast nur aus Büchern bekannt, besonders durch die ausführlichen Mittheilungen darüber in Harting's Werk. Nun findet sich weder in diesem noch in einer späteren Specialschrift über den Gegenstand von Dr. G. Fritzsch (Ueber das stereoskopische Sehen im Mikroskop etc. 1873) die geringste Andeutung hinsichtlich einer hier zu besprechenden, und demzufolge wohl als neu anzusehenden Form des binocularen Mikroskops, welche bei der denkbar grössten Einfachheit dennoch geeignet erscheint, eine Reihe theoretischer und praktischer Einwendungen zu beseitigen, welche gegen die bisher bekannt gewordenen derartigen Instrumente erhoben werden können. Ohne diese hier einzeln zu kritisiren, sei nur angeführt, dass bei der vorzuschlagenden neuen Einrichtung von vorn herein ausgeschlossen ist:

1) jede Schwierigkeit, die Bilder zu vereinigen, und jede Anstrengung zum Sehen;
2) jeder Unterschied in Grösse und Deutlichkeit, sowie in der Einstellung der Bilder;
3) jede Schwierigkeit, das Instrument den verschiedenen Augenweiten anzupassen;
4) jeder Einfluss, den die Dicke der Glasprismen nach Analogie des bekannten Einflusses der Deckglasdicke auf den Gang der Strahlen ausüben könnte;

und endlich findet an Stelle der bei keinem der bekannten Instrumente vermiedenen doppelten Spiegelung nur eine einmalige für jede Hälfte der Strahlen statt.

Alle diese Vortheile werden erreicht durch eine kleine Modification in der Art, wie die Bilder entworfen werden. Während beim zusammengesetzten und beim Bildmikroskop das Objectiv stets ein wenig ausserhalb der Brennweite des Objectivs stehen muss, während es beim einfachen oder der Lupe gewöhnlich innerhalb der Brennweite befindlich ist, wird es bei der in Rede stehenden Anordnung in den Brennpunkt selbst gebracht, so dass die von den verschiedenen Punkten des Objects ausgehenden Strahlenbündel zwar unter verschiedenen Winkeln gegen die Achse, aber ein jedes in sich selbst parallel das Objectiv verlassen, also für sich allein kein Bild, oder vielmehr ein solches in unendlicher Entfernung geben. Die zur Erzeugung eines reellen Bildes erforderliche Convergenz der Strahlenbündel wird vielmehr erst durch die Oculare bewirkt, welche demnach richtiger als Fernröhre aufzufassen sind, obwohl sie wie die gewöhnlichen Mikroskopoculare nur aus zwei einfachen planconvexen Crownglaslinsen mit einem ungefähren Brennweitenverhältniss 1 : 3 bestehen. Man sieht leicht, dass man bei Anwendung solcher Ocularfernröhre auf die parallel, gleichsam aus unendlicher Entfernung aus dem Objectiv austretenden Lichtbündel nicht mehr an eine bestimmte Länge des auf diese Art hergestellten Mikroskops gebunden ist, dass man dieselbe also beliebig ändern kann, ohne eine Veränderung der Grösse und Deutlichkeit des einmal eingestellten Bildes herbeizuführen, vorausgesetzt dass das als Ocular dienende Fernrohr so mittelst eines vorhandenen Auszuges eingestellt ist, dass man durch dasselbe entfernte Gegenstände deutlich sieht. Und eben so leicht erkennt man, wie durch dieses Verfahren der genaue Parallelismus der aus dem Objectiv austretenden Strahlenbündel, und damit die Stellung des Objects im Brennpunkt selbst controlirt und erwiesen wird.

Auf dieser Grundlage ist es nun möglich, schon durch eine einmalige Reflexion für jede Hälfte des Strahlenbündels eine solche Richtung zu gewinnen, dass ein jedes Auge eine der Hälften aufnehmen kann. Wie die ganze Anordnung zu diesem Zweck zu treffen ist, lehrt ein Blick auf die nebenstehende Figur, in welcher der Einfachheit halber der Verlauf des centralen Strahlenbündels allein dargestellt ist. Die ursprüngliche Achse des Mikroskops liegt hierbei horizontal quer vor dem Beobachter; zur Rechten befindet sich das Objectiv, der Tisch und der Beleuchtungsapparat; der Beobachter aber sieht von oben her in beliebig geneigter Richtung durch die beiden nach unten zu etwas convergirenden Röhren direct auf die horizontale Achse und mit jedem Auge in eins der beiden Reflexionsprismen, von denen das erste natürlich nur bis zur Achse eingeschoben

ist, um die Hälfte der Oeffnung für das zweite frei zu lassen. Beide befinden sich auf der Achse in einer solchen, durch einen Trieb abzuändernden Entfernung von einander, dass die mit ihnen fest verbundenen zugehörigen Ocularröhren in eine dem Augenabstand des jeweiligen Beobachters entsprechende Entfernung von einander gebracht werden können, ohne dass die Verschiedenheit und Abänderung der von den Lichtbündeln zurückgelegten Wegeslängen bis zum ersten Ocularglas, wegen ihres Parallelismus, irgend einen Einfluss auf das Bild ausüben könnte. Und dieser Parallelismus ist es zugleich, welcher jede störende Wirkung, nach Art der von der Dicke der Deckgläser ausgeübten, seitens der Prismen auf die durchgehenden Lichtbündel ausschliesst; denn derartige Einwirkungen können nur divergirende oder convergirende Lichtbündel hervorbringen.

Die Beobachtung durch ein so gebautes Instrument erfordert also nichts von der Behandlung des gewöhnlichen Mikroskops Abweichendes, als dass man zunächst die beiden Ocularfernröhre aus ihren Lagern oder Hülsen nimmt, für unendliche Entfernung einstellt und wieder an ihren Ort bringt. Dann stellt man mittelst des Triebes das linke Ocularrohr so, dass bei richtiger Beleuchtung die beiden in den Ocularen enthaltenen gleich grossen Blendenöffnungen bequem als eine einzige gesehen werden; wird dann ein Object eingeführt und deutlich eingestellt, so erscheint sofort unfehlbar das plastische Bild und kann nicht doppelt gesehen werden. Damit dies jedoch vollkommen geschehe, müssen die Prismen in ihrer Stellung so adjustirt

sein, dass die Bilder zugleich mit den Blendenöffnungen zu einem Ganzen verschmelzen und man den Eindruck gewinnt, als sähe man durch eine runde Oeffnung den dahinter befindlichen Gegenstand. Ist diese Stellung der Prismen einmal fixirt, so ändert keine der nothwendigen Einstellungen den Effect, ja man hat sogar, wenn man allein durch das linke Rohr sehend dieses verschiebt, den Eindruck, als sei das Bild in dem Rahmen der Blende ausgespannt. Die Figur zeigt, dass diejenige Hälfte der Oeffnung, welche für das zweite Prisma frei bleibt, dem Beobachter gegenüberliegt; andernfalls wäre das Bild ein pseudoskopisches. An Stelle der Prismen lassen sich auch Planspiegel von Glas verwenden, wo dann der erste die ganze Oeffnung deckt und dafür zur Hälfte von der Belegung befreit wird. Doppelbilder sind hierbei, wenn die Flächen parallel sind, nicht möglich, da die von beiden Flächen reflectirten Antheile desselben Lichtbündels als wiederum parallel dennoch in einen Focus vereinigt werden, ganz wie beim Spiegelsextanten. Die Genauigkeit der Planflächen muss jedoch sowohl bei Prismen als Spiegeln eine vollkommene sein; bei noch so geringer Wölbung der spiegelnden Flächen wäre kein deutliches Bild, und bei Ungenauigkeit der bloss brechenden Flächen keine gleichzeitige scharfe Einstellung der beiden Bilder zu erlangen. Das erste halbeingeschobene Prisma ist am besten regulär dreiseitig, weil bei einem rechtwinkligen die totale Reflexion in Frage kommen könnte und die Kante besser ausfällt; das andere kann ein rechtwinkliges sein; man macht es so gross, dass es nach Entfernung des anderen auch das volle Strahlenbündel aufnehmen und reflectiren kann; man hat dann ein monoculares Mikroskop. Denn die beiden secundären Achsen müssen in Bezug auf die ursprüngliche nichts sein als gebrochene Fortsetzungen derselben, d. h. die Achsen der Oculare müssen (und zwar mit Rücksicht auf die Brechung in den Prismen) die primäre Achse genau in den spiegelnden Flächen selbst schneiden; das ganze Instrument bleibt demnach centrirt, und die aus dem letzten Augenglas heraustretenden Lichtbündel sind in Bezug auf die Achse des Oculars ebenfalls halbe. Dass man an Stelle der beschriebenen Oculare auch wirkliche achromatische Fernröhre anwenden kann, versteht sich von selbst; ein weiteres Eingehen aber auf die Bilder selbst, die Objective und die Beleuchtung liegt, weil es alle derartigen Instrumente gleichmässig betrifft, nicht mehr im Zweck dieser Darstellung.

Bezugsquellen-Liste.

Wir empfehlen den verehrlichen Instituten zur Verfertigung von physikalischen Apparaten etc. die Einschaltung Ihrer werthen Firma unter dieser Rubrik. Preis pro Zeile und Jahr M. 5. —.

Hochachtungsvoll

München,
Glückstrasse Nr. 11.

Die Expedition des Repertorium für Experimental-Physik
R. Oldenbourg.

Bezeichnung der Firma	Fabrikate und Angabe der Specialität
***Albert**, Frankfurt a. M., Mainzerstrasse.	Physikalische Vorlesungsapparate.
***Anstalt**, optische, astro-physikal. Werkstätte, Würzburg (Eugen Hartmann).	Specialität: Optische Gläser, Präcisions-Instrumente für Physik.
Breithaupt, F. W., & Sohn, Cassel.	Astronomische u. geodätische Instrumente.
Cleff, C. & F., Remscheid-Hasten.	Elektrische u. speciell magnet-elektrische Apparate.
Edelmann, M. Th., München.	Physikalische, meteorologische, physiologische, medicin. etc. Instrumente und Apparate für elektrisches Licht.
Ertel, T., & Sohn, München, Louisenstrasse 12.	Astronomische, mathematische u. geodätische Instrumente.
Fein, C. & E., Stuttgart, Kasernenstr. 43 b.	Galvanische Batterien und elektrische Vorlesungsapparate.
Hasler, G., Telegr.-Werkstätte, Bern.	Meteorologische Registrir-Instrumente.
Heller, Mechan. Werkstätte, Nürnberg.	Physik. Apparate für Vorlesungszwecke.
Houdek, Dr. & **Hervert**, Prag, Karpfengasse.	Egger'sche elektro-magnetische Motoren.
Jung, R., Heidelberg, Hauptstrasse 15.	Capillarelektrometer und Elektrocapillarkraftmaschine nach Lippmann, Thomson'sches Elektrometer nach Kirchhoff, neue Construction, Wollastonschen Draht.
***Kappeller**, Heinr., jun., Wien V, Kettenbrückengasse 9.	Barometer, Thermometer, Psychrometer, Aräometer etc.
Kohl, Max, Chemnitz, Poststrasse 21	Physikalische Instrumente und Apparate neuester Constructionen. Preiscourant neu.
Merz, G. & S., München, Müllerstr. 11.	Optische und astronomische Instrumente.
Miller, F., Universit.-Mechan., Innsbruck.	Physikalische u. mathemat. Instrumente.
Oertling, Aug., Berlin, Oranienburgerstrasse 57 u. 58.	Chemische Waagen, Sextanten, mathematische Instrumente, Kreistheilungen.
Pauly-Stahel, G., Friedrichshafen a. B.	Fabrik elektr. Drähte.
Riefler, Clemens, Maria Rain u. München, Karlsplatz 29.	Fabrik mathemat. Instrumente, Reisszeuge.
Schmidt, Franz, & **Haensch**, Berlin S., Stallschreiberstrasse 4.	Spectral-Apparate, Polarisations-Apparate, Mikroskope.
Schneider, Emil, in Lichtenhain b. Oberweissbach i. Thüringen.	Thermometer, Barometer und alle physikalischen Glasinstrumente.
***Schuckert**, Sigmund, Nürnberg.	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht, Galvanoplastik u. Lehranstalten.
Steinheil, C. A., & Söhne, München, Landwehrstrasse 31.	Optische und astronomische Instrumente.
***Stöhrer**, E., jun., Leipzig.	Apparate für Projection physik. Versuche.
Stollnreuther, C., & Sohn, München.	Physikalische Instrumente.
Vogel, C. & J., Berlin, Ritterstrasse.	Ueberspomnene Drähte.
Weisser, J. G., Söhne, St. Georgen (bad. Schwarzwald).	Drehbänke für physikal. Laboratorien.
Wesselhöft, Mechaniker, Halle a. d. Saale.	Elektrische und akustische Apparate.

☞ *Bei Correspondenzen, Bestellungen etc. an die hier anzeigenden Firmen bitten wir das Repertorium für Experimentalphysik gefl. als Quelle zu nennen.*

* Ein ausführliches Inserat befindet sich im Inseratentheile.

Zeitschrift
für
Angewandte Elektricitätslehre

mit besonderer Berücksichtigung

der Telegraphie, des elektrischen Beleuchtungswesens, der Galvanoplastik und verwandter Zweige.

Herausgegeben von

Dr. Ph. Carl,

Professor der Physik an der königl. Kriegs-Akademie in München,
Herausgeber des „Repertorium für Experimental-Physik".

Druck und Verlag von Rudolph Oldenbourg in München.

I. Band. **1879.** Mit Tafel XXIII bis XXVII. **Nr. 10.**

Abonnements.

Erscheint monatlich wenigstens einmal. — 12 Nummern bilden einen Band. — Preis pro Band 20 Mark.

Das Abonnement kann stattfinden: bei der *Verlagshandlung R. Oldenbourg* selbst, München, Glückstrasse 11, sowie bei allen Buchhandlungen und Postämtern Deutschlands und des Auslandes.

Inserate.

Die ganze Octavseite 24 Mark. jede achtel Octavseite oder deren Bruchtheil 3 Mark. Bei Wiederholungen die Hälfte.

Inserate für 12 Nummern werden mit 10 Mark, solche für 6 Nummern mit 12 Mark für die Seite berechnet.

Beilagen bei vorheriger Einsendung eines Probe-Exemplars nach Uebereinkunft.

Inhalt.

REPERTORIUM

FÜR

EXPERIMENTAL-PHYSIK,

FÜR

PHYSIKALISCHE TECHNIK,

MATHEMATISCHE & ASTRONOMISCHE INSTRUMENTENKUNDE.

HERAUSGEGEBEN

VON

DR. PH. CARL,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KGL. KRIEGS-AKADEMIE IN MÜNCHEN.

FÜNFZEHNTER BAND.

Inhalt des 12. Heftes

(mit Tafel XXIV bis XXVI).

MÜNCHEN, 1879.

DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG.

Bei Correspondenzen, Bestellungen etc. an die hier anzeigenden Firmen bitten wir das Repertorium für Experimental-Physik gefl. als Quelle zu nennen.

J. WILH. ALBERT,

Mechanikus in **Frankfurt a. M.,** Mainzerstrasse.

Specialität: Physikalische Vorlesungsapparate.

Mein Verzeichniss physikalischer und optischer Instrumente übersende auf Verlangen franco und gratis. (13)

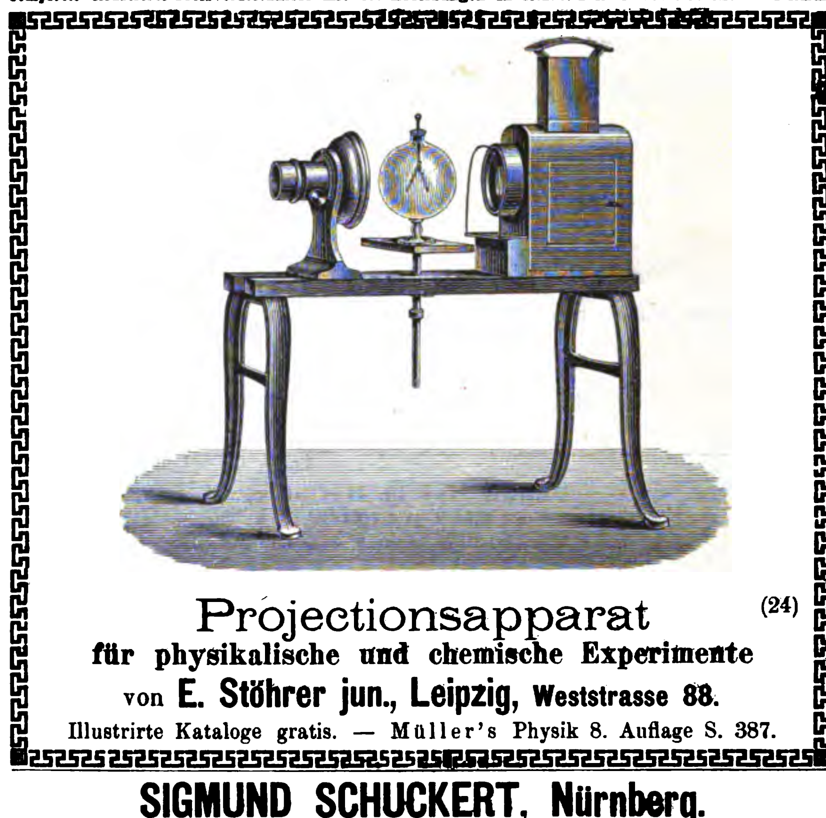
HEINRICH KAPPELLER jun.

Fabrikant physikalischer und meteorologischer Instrumente

WIEN, V. Bez., Kettenbrückengasse 9.

Thermometer, Barometer und Aräometer. Massanalytische Geräthe, Büretten, Pipetten etc. (7)

Complette illustrirte Preisverzeichnisse mit 237 Abbildungen in feinstem Holzschnitt 50 kr. = 1 Mark.



Projectionsapparat (24)

für physikalische und chemische Experimente

von **E. Stöhrer jun., Leipzig, Weststrasse 88.**

Illustrirte Kataloge gratis. — Müller's Physik 8. Auflage S. 387.

SIGMUND SCHUCKERT, Nürnberg.

Specialfabrik **dynamo-elektrischer Maschinen** für Hand- und Maschinenbetrieb, anerkannt vortheilhafte Construction für **Lehranstalten.**

Prospecte und Preisliste stehen zu Diensten. (10)

Skalenfernrohre für Spiegelablesung

in ihrer Construction die bisher gebräuchlichen Instrumente übertreffend, solid und elegant ausgeführt, mit Skalen von Glas oder Holz. Vorzügliche Optik. (20)

Fernrohre mit Objectivöffnung von	70	60	50	40	35	30	25	Millimeter.
Preis in Reichsmark	300	250	210	180	160	145	120	

Optische Anstalt, astro-physikal. Werkstätte „Würzburg".

Ueber Stephenson's System der homogenen Immersion bei Mikroskop-Objectiven.

Von

Professor **Abbe.**

(Aus den Sitzungsberichten der Jenaischen Gesellschaft für Medicin und Naturwissenschaft vom Herrn Verfasser mitgetheilt)

Der Erfinder der Immersionsmethode, Amici, an dessen Namen so viele bedeutsame Fortschritte in der Vervollkommnung des Mikroskops sich knüpfen, hat auch schon den Versuch gemacht, andere Flüssigkeiten als Wasser für die Immersion in Verwendung zu bringen. Amici hat u. A. das stark brechende Anis-Oel benutzt, muthmasslich von der Ansicht geleitet, dass der Vortheil, den die Ersetzung der Luftschicht durch ein stärker brechendes Medium herbeiführt, mit wachsendem Brechungsexponenten in um so höherem Grade zur Geltung kommen werde. In späterer Zeit ist von Anderen namentlich auch das Glycerin als Immersionsflüssigkeit mehrfach in Anwendung gebracht worden, wie neuerdings wieder von dem bekannten amerikanischen Optiker Spencer, der, nach verschiedenen Berichten zu schliessen, auf diesem Wege Objective von vorzüglicher Qualität hergestellt hat.

Die theoretische Analyse des Immersionsprincips zeigt nun, dass in der That mit stärker brechenden Substanzen in mehreren Rücksichten noch günstigere Bedingungen als mit Wasser erreicht werden können; sie ergibt aber zugleich, dass der zu erwartende Vortheil keineswegs an eine unbegrenzte Steigerung des Brechungsexponenten der Immersionsflüssigkeit gebunden ist, dass vielmehr in Bezug auf diesen ein Maximum existirt, mit dessen Ueberschreitung die Bedingungen im Allgemeinen wieder ungünstiger werden. Sofern Deckglas und Frontlinse der Objective aus Crownglas vorausgesetzt werden — was aus guten Gründen allgemein der Fall ist — wird dieses Maximum durch eine Immersionssubstanz vom Brechungsexponenten des Crown-

glases erreicht. Eine solche stellt eine optisch homogene Verbindung her zwischen dem Präparat und dem Objectiv, welche alle Brechung der Lichtstrahlen vor der ersten kugelförmigen Fläche des optischen Systems aufhebt. Nicht nur fällt in diesem Falle der Lichtverlust durch Reflexion hinweg, welcher an jeder Trennungsfläche von optisch verschiedenen Medien namentlich in den schief einfallenden Strahlen eintritt; es wird zugleich, was wichtiger ist, ein sehr erheblicher Betrag von sphärischer Aberration im Entstehen unterdrückt, der andernfalls in den oberen Gliedern des Objectivs wieder gehoben werden müsste und dabei unvermeidliche Rückstände übrig lassen würde. Von anderen Vortheilen ganz abgesehen verspricht also eine solche Methode der homogenen Immersion jedenfalls vollkommenere Aufhebung der sphärischen Aberration, also günstigere Verhältnisse für die sogenannte Definition der Objective als die Wasser-Immersion. Als ein praktisch nicht unerheblicher Nebengewinn dabei bietet sich aber noch dar die Beseitigung des Einflusses der Deckglasdicke und in Folge dessen das gänzliche Entbehrlichwerden der sonst erforderlichen Deckglascorrection. Denn sobald das Zwischenmedium in Refraction und Dispersion dem Deckglase gleichartig ist, wird es für die optische Wirkung gleichgiltig, ob eine dickere Schicht Glas und eine entsprechend dünnere Schicht der Flüssigkeit, oder umgekehrt, zwischen Object und Linsensystem eingeschaltet ist.

Die Idee, die verschiedenartigen Vortheile einer solchen besonderen Art von Immersion durch die Construction von Objectiven nach diesem System praktisch zur Geltung zu bringen, hat mir schon seit längerer Zeit nicht fern gelegen. Indess habe ich mir in Bezug auf den wissenschaftlichen Nutzen solcher Objective deshalb nicht besonders viel versprochen, weil ich ihren Gebrauch durch die Nothwendigkeit, ein Oel oder eine andere unbequeme Substanz als Immersionsflüssigkeit zu verwenden, auf ein allzukleines Gebiet eingeschränkt glaubte. Es schien mir, ausser etwa der Diatomeenbeobachtung, kaum ein anderes wissenschaftliches Arbeitsfeld als das petrographische Studium übrig zu sein, auf welchem die optischen Vorzüge solcher Immersionsobjecte würden zur Geltung kommen können.

Die schliessliche Ausführung des Planes in der hiesigen optischen Werkstatt des Herrn C. Zeiss ist indess in eine andere Richtung gelenkt worden durch einen Vorschlag des Herrn John Ware Stephenson in London, der von sich aus das Princip der homogenen

Immersion selbständig aufgefunden hatte[1]), unter seinen Vortheilen aber neben der Beseitigung der Deckglascorrection zugleich die mögliche Vergrösserung des Oeffnungswinkels und die daraus zu erwartende Steigerung des Unterscheidungsvermögens der Objective in den Vordergrund stellte. Dieser Gesichtspunkt des Herrn Stephenson, durch dessen Hervorkehrung das Unternehmen ein allgemeineres wissenschaftliches Interesse erlangte, ist denn bei der rechnerischen und technischen Ausführung von meiner und Herrn Zeiss' Seite in erster Linie verfolgt worden, und es ist gelungen, auf diesem Wege eine Reihe von Objectiven herzustellen, welche in mehreren Rücksichten den Objectiven der gewöhnlichen (Wasser-)Immersion sichtlich überlegen sind. Nachdem dieselben inzwischen von einer ziemlichen Anzahl von Mikroskopikern in Gebrauch genommen worden sind, hat sich denn auch herausgestellt, dass die ungewöhnliche Beschaffenheit der Immersionsflüssigkeit, obwohl sie natürlich die Anwendung solcher Objective immerhin sehr beschränken wird, doch kein unbedingtes Hinderniss für eine solche Anwendung auf sehr verschiedenen Gebieten des mikroskopischen Studiums darstellt, und dass im Besondern auch das Arbeitsfeld des Biologen mancherlei Aufgaben darbietet, denen gegenüber die neuen Linsen nützliche Dienste leisten können.

Nachdem vor ungefähr Jahresfrist die ersten Objective nach diesem System in der Brennweite von $\frac{1}{8}''$ nominell (genauer $2{,}6^{mm}$ Aequivalentbrennweite) construirt worden sind, die sämmtlich für den langen Tubus der englischen Mikroskope berechnet waren, sind inzwischen auch solche von $\frac{1}{12}''$ ($1{,}8^{mm}$) gemacht worden, welche schon mit der Tubuslänge der continentalen Stative ausgiebige Vergrösserungen liefern, und ganz kürzlich ist noch eine dritte Nummer, $\frac{1}{18}''$ nominell ($1{,}2^{mm}$ Brennweite), gelungen, welche gestattet, speciell für die histologische Beobachtung schon mit ganz schwachen Ocularen hohe Vergrösserung zu erhalten[2]).

Der Oeffnungswinkel dieser Objective, das zuletzt erwähnte stärkste nicht ausgeschlossen, ist innerhalb der ihnen eigenen Immersions-

---

1) J. W. Stephenson, On a large-angled immersion-objective without adjustement-collar etc. Journal of the R. Microscop. Society 1878 p. 51.

2) Das erste Exemplar des $\frac{1}{18}$, noch in provisorischer Fassung, wurde der Gesellschaft vom Vortragenden vorgelegt, und es wurde mit demselben u. A. die schon vor Jahren von Herrn Hartnack beschriebene, von Anderen später in Zweifel gezogene Felderzeichnung auf Surirella Gemma (in einander geschobene, in der Richtung der Achse der Schale verlängerte Sechsecke) demonstrirt.

flüssigkeit ca. 114°, wenn deren Brechungsindex abgerundet = 1,50 gesetzt wird. Dieses ist annähernd dieselbe angulare Grösse, welche sich auch bei den gewöhnlichen Immersionslinsen innerhalb der Wasserschicht und bei den Trockenobjectiven innerhalb des Luftraums noch ohne besondere Schwierigkeit erreichen lässt. Da indess das numerische Aequivalent des Oeffnungswinkels — das Maass, nach welchem sich die vom Objectiv aufgenommene Strahlenmenge bestimmt — einerseits dem Sinus des halben Oeffnungswinkels, andererseits dem Brechungsindex des betreffenden Mediums proportional ist, und da alle Functionen des Oeffnungswinkels, namentlich auch das Unterscheidungsvermögen des Mikroskopes, nach diesem numerischen Aequivalent sich richten, so ist der Theorie nach die Leistung der neuen Objective gegenüber den Immersionslinsen des gewöhnlichen Systems im Verhältniss von 1,50 : 2,33, und gegenüber den stärkeren Trockenlinsen im Verhältniss von 1,5 : 1,0 erhöht.

Das Product aus dem Sinus des halben Oeffnungswinkels mit dem Brechungsindex des zugehörigen Mediums — die numerische Apertur, nach meiner Bezeichnung — gewinnt bei diesen Objectiven die Ziffer 1,25—1,27. Im Verhältniss dieser Ziffer zur Einheit ist die von den Objectiven aufgenommene Strahlenmenge grösser als diejenige Strahlenmenge, welche in Luft eine volle Halbkugel ausfüllt und welche demnach einem idealen Trockenobjectiv von 180° Winkelöffnung zugänglich sein würde.

Dieser ungewöhnlich grossen Apertur entspricht nun in der That eine merkliche Steigerung des Unterscheidungsvermögens oder der sogenannten auflösenden Kraft. Sie macht sich beim Beobachten sogleich bemerklich durch die Leichtigkeit, mit welcher sehr enge Streifungen u. dergl. auf den feineren Testobjecten sichtbar werden; durch die Deutlichkeit, mit welcher die charakteristischen Felderzeichnungen auf den complicirteren Gebilden, wie Frustulia saxonica, Surirella Gemma u. a. hervortreten; endlich durch mancherlei ungewöhnliche Merkmale, welche an den Bildern von gröberen Structuren dieser Art, z. B. an Pl. angulatum, bei gewissen Beleuchtungsweisen zum Vorschein kommen. — Auch an histologischen Präparaten, welche sehr kleine Elemente in dichter Zusammendrängung — Granulationen u. dergl. — darbieten, zeigt sich in kritischen Fällen eine bestimmtere und deutlichere Auflösung.

Bei allen diesen Objecten, zumal bei solchen der letzten Classe,



kommt zugleich die entschieden vollkommenere Definition zur Geltung, welche die homogene Immersion ermöglicht, wofern die Feinheit der technischen Ausarbeitung der Objective Schritt hält mit der theoretisch gegebenen Verminderung der Aberrationsreste. Auch beim Gebrauch von verhältnissmässig starken Ocularen behalten die Bilder eine grosse Schärfe, so dass im regelmässigen Arbeiten höhere Vergrösserungen noch mit Nutzen verwendbar sind, als man mit anderen Objectiven von gleicher Brennweite zu benutzen pflegt. Desgleichen liess sich öfters an sehr zarten Objecten, wie feinen Cilien, direct eine weiter gehende Wahrnehmung als durch gute Immersionsobjecte der gewöhnlichen Art constatiren. Endlich darf als ein zwar indirectes aber besonders gewichtiges Zeugniss für die erreichte Höhe der Definition noch erwähnt werden der günstige Erfolg, den Herr Dr. Koch in Wollstein bei seinen Bakterien-Studien[1]) mit einer an solchen Objecten und bei solchen Oeffnungswinkeln ganz unerhörten Beleuchtungsweise, nämlich mit vollem, die ganze Objectivöffnung ausfüllendem Strahlenkegel, erzielt hat. Bei einer solchen Beleuchtung, wie sie nur mit Hilfe eines Condensors von grosser Apertur ausführbar ist, wird das Präparat in allen Richtungen gleichzeitig von einfallenden Strahlen durchsetzt. Dadurch wird einerseits die Abbildung solcher Theile, welche nur durch Unterschiede des Brechungsvermögens sich gegen einander abheben (Gewebestructuren u. dergl.), fast vollständig unterdrückt, und es bleiben im Bilde allein diejenigen Elemente sichtbar, die in Folge von Tinction absorbirend wirken; andererseits aber gewinnt zugleich die Beobachtung, obwohl die Beleuchtung dem Namen nach central bleibt, die wesentlichen Vortheile der schiefen Beleuchtung durch die Mitwirkung von Strahlen in grosser Neigung gegen die Achse des Mikroskops. Sehr kleine und dichtgedrängte Elemente, wie sie die Bakterienpräparate darbieten, müssen aus beiden Gründen allerdings einer weiter gehenden Auflösung als durch centrale Beleuchtung der gewöhnlichen Art zugänglich werden; wenn jedoch diese sinnreich combinirte Beobachtungsmethode den entsprechenden Erfolg zeigen soll, haben die definirenden Functionen des Objectivs eine äusserst empfindliche Probe zu bestehen, und zwar um so mehr, je grössere Oeffnungswinkel in Frage kommen[2]).

1) Aetiologie der Wundinfectionskrankheiten, Leipzig 1879.

2) Aeusserungen sachkundiger Mikroskopiker, welche die obigen Notizen bestätigen, siehe u. A.:

Was die zu benutzende Immersionsflüssigkeit anlangt, so ist deren Beschaffenheit in optischer Hinsicht natürlich gleichgiltig, wofern sie nur homogen und durchsichtig ist und dem Crownglas in Refraction und Dispersion gleichkommt oder wenigstens sehr nahe steht. Die Erfahrung hat indess gelehrt, dass diese Bedingung der homogenen Immersion eine viel geringere Auswahl übrig lässt, als zuvor erwartet werden durfte. — Ich habe gleich zu Anfang für den vorliegenden Zweck im Ganzen über hundert Flüssigkeiten der verschiedensten Art, ätherische und fette Oele und künstliche chemische Präparate, mit Hilfe des Refractometers auf Brechungsindex und Dispersion untersucht oder untersuchen lassen, und neuerdings ist diese Nachforschung noch weiter fortgesetzt worden, indem durch Herrn Dr. Töpel nach meiner Anleitung nahehin zweihundert chemische Verbindungen aus der Präparatensammlung des hiesigen Universitätslaboratoriums, welche Herr Professor Geuther für diesen Zweck zur Verfügung zu stellen die Güte hatte, in ihren optischen Constanten bestimmt wurden. Unter diesem grossen Material hat sich jedoch nicht eine einzige, ihren sonstigen Eigenschaften nach brauchbare Flüssigkeit gefunden, welche für sich allein oder in Mischung mit einer anderen den Brechungsindex des Crownglases (1,515—1,520 für Natronlicht) vollständig erreicht hätte ohne gleichzeitig die Dispersion des Crown mehr oder minder stark zu überschreiten; und nur wenige unter den untersuchten Substanzen erfüllen die Anforderungen insoweit annähernd, dass die Abweichung als praktisch unschädlich anzusehen ist. Die günstigste Flüssigkeit, die bis jetzt aufgefunden werden konnte, ist das Cedern-

W. H. Dallinger, The new oil-immersion object-glass constructed by Carl Zeiss of Jena. Nature Vol. 18 Nr. 446.

H. van Heurck, Notes de Micrographie. Bulletin de la Société belge de Microscopie Avril 1878.

A. Schulze, Zeiss's new oil-immersion-objective. English Mechanic Vol. 27 Nr. 683; Vol. 28 Nr. 708.

L. M. Willis, Oil-immersion-objectives. American Journal of Microscopy Vol. 3 Nr. 7.

Während der Drucklegung dieses Referates hat noch ein in diesen Dingen besonders competenter Gelehrter, Col. J. Woodward in Washington, sein Urtheil über die fraglichen Objective brieflich mitgetheilt. Herr Woodward hat im Besonderen Photogramme von Amphipleura pellucida in Balsam, mittelst des $\frac{1}{8}$ und des $\frac{1}{12}$ aufgenommen, hierher gesandt, welche nach seinem eigenen Ausspruch bekunden, dass das $\frac{1}{12}$ die besten zu seiner Verfügung stehenden englischen und amerikanischen Immersionslinsen, wie in der visuellen, so auch in der photographischen Leistung übertrifft.

holzöl (aus der Fabrik von Schimmel & Co., Leipzig und New York), ein fast farb- und geruchloses, wenig flüchtiges — leider etwas dünnflüssiges — ätherisches Oel, dessen Brechungsindex bei mittlerer Temperatur p. p. 1,51 erreicht, während die Dispersion diejenige des Crownglases nur in geringem Grade übertrifft. Für dieses Oel sind daher die Objective zunächst eingerichtet worden.

Einer weitgehenden Ausnutzung des Princips der homogenen Immersion kommt übrigens der Umstand sehr zu Statten, dass durch Vermischung eines der stärker brechbaren ätherischen Oele, wie Nelken-, Fenchel-, Anis-Oel u. a. m., mit bestimmten Mengen von Olivenöl sehr leicht Flüssigkeiten erhalten werden können, welche in der mittleren Lichtbrechung dem Cedernholzöl gleichkommen, dessen Dispersion aber nach Belieben in höherem oder geringerem Grade überschreiten. Einem umsichtigen Beobachter wird hiedurch eine Regulirung der chromatischen Correction der Objective von solcher Feinheit in die Hand gegeben, wie sie keine mechanische Correctionseinrichtung erreichen könnte, indem er je nach der Natur der beobachteten Objecte und je nach der Art der erforderlichen Beleuchtung solche Mischungen von abweichender Dispersion an Stelle des Cedernholzöles verwenden kann. Durch dieses einfache Mittel kann namentlich die chromatische Differenz der sphärischen Aberration — ein Correctionsdefect, den die heutige Optik bei Objectiven von grosser Apertur durchaus nicht zu bewältigen vermag — zum grössten Theil unschädlich gemacht werden. — Jener unvermeidliche Defect macht sich nämlich darin bemerklich, dass der centrale Theil und die peripherische Zone der Objective niemals gleichzeitig vollkommen achromatisch sind: ein Objectiv, welches mit schiefem Licht möglichst farbenfreie Bilder liefert, zeigt sich bei centraler Beleuchtung an empfindlichen Objecten in merklichem Grade chromatisch untercorrigirt, und umgekehrt — um so auffälliger, je grösser der Oeffnungswinkel. Nun bietet aber die Ersetzung einer parallelflächigen Schicht im Wege der Lichtstrahlen durch eine andere von gleicher Refraction aber verschiedener Dispersion ein einfaches Mittel dar, die chromatische Correction des Objectives zu verändern, ohne die sphärische Correction zu alteriren; und wenn — wie bei der Anfertigung dieser Linsen durchweg geschieht — die Farbenausgleichung so bewirkt wird, dass die Flüssigkeit von niedrigster Dispersion (das Cedernholzöl) die beste Achromasie für schiefes Licht herbeiführt, so wird die

Anwendung einer stärker zerstreuenden Mischung der erwähnten Art für centrale Beleuchtung den Farbendefect corrigiren, den die vorerwähnte Immersionsflüssigkeit für solche Beleuchtung übrig lassen würde.

Die Wirksamkeit dieser Methode wird allein durch den Umstand etwas beeinträchtigt, dass der Erfolg einer bestimmten Erhöhung der Dispersion natürlich von der Dicke der flüssigen Schicht abhängt. Bei Deckgläsern von verschiedener Dicke und ebenso bei Objectiven von verschiedener Brennweite und dementsprechend verschiedenem Arbeitsabstand gibt ein und dieselbe Mischung mehr oder minder ungleiche Wirkungen.

Da eine genaue Regulirung der Immersionsflüssigkeit als ein wesentliches Erforderniss erscheint, wenn die Leistungsfähigkeit der neuen Objective vollständig ausgenutzt werden soll, so ist es wichtig, ein einfaches Hilfsmittel zu haben, um Refraction und Dispersion der Flüssigkeiten in ihrem Verhältniss zu den entsprechenden Merkmalen des Crownglases jederzeit leicht controliren zu können, ohne dabei auf besondere Messapparate angewiesen zu sein. Herr Zeiss gibt zu diesem Zweck jedem solchen Objectiv eine kleine Glasflasche mit parallelen Seitenwänden bei, an deren nach innen verlängertem Glasstöpsel ein Crownglasprisma von ca. 60° brechendem Winkel angekittet ist.

Indem man die betreffende Flüssigkeit in diese Testflasche füllt, oder, bei Herstellung von Mischungen, selbige als Mischgefäss verwendet, und durch Flüssigkeit und Prisma hindurch die verticale Kante eines Fensterkreuzes oder dergl. anvisirt, kann man die Abweichung der Flüssigkeit vom Crownglas sowohl in Refraction wie in Dispersion direct beobachten. Die übrig bleibende Ablenkung der verticalen Kante durch das Prisma und die Breite des Farbensaumes ergeben beide Elemente auf einen Blick in völlig ausreichender Genauigkeit.

Für den praktischen Gebrauch der neuen Objective sind noch zwei Dinge besonders zu beachten.

Das erste ist die Abhängigkeit der Wirkung von der Tubuslänge. Die Beseitigung der Deckglascorrection bei diesen Objectiven, welche von allen Beobachtern als ein ausserordentlicher Gewinn für die leichte und sichere Handhabung der Linsen erklärt wird, beraubt auf der anderen Seite den Beobachter eines bequemen Mittels, den Einfluss verschiedenen Bildabstandes (verschiedener Tubuslänge) auf die Aberra-

tionen innerhalb gewisser Grenzen zu compensiren[1]). Die Zeiss'schen Objective für Oel-Immersion können daher nur mit derjenigen Tubuslänge benutzt werden, für welche sie bei der Anfertigung adjustirt wurden, und sie sind, namentlich die schwächere Nummer, in diesem Punkte in Folge des grossen Oeffnungswinkels so empfindlich, dass Abweichungen von wenigen Centimetern in der Länge des Tubus sichtbare Veränderungen im Correctionszustand herbeiführen. Ein Auszugrohr am Tubus des Mikroskops gewährt daher dem Beobachter ein sehr einfaches Hilfsmittel, die letzten feinen Abstufungen der Correction, wenn er will, nach eigenem Ermessen zu reguliren, sowie auch — so lange noch keine vollkommener entsprechende Immersionsflüssigkeit gefunden ist — den kleinen Defect in der Refraction des Cedernholzöles, der bei Anwendung sehr dicker oder sehr dünner Deckgläser merklich zu werden anfängt, zu compensiren. (Verlängerung des Tubus wirkt im Sinne der sphärischen Uebercorrection, Verkürzung im Sinne der Untercorrection; jene corrigirt daher eine Abweichung des Deckglases von der mittleren Stärke nach der Seite der geringeren, diese nach der Seite der grösseren Dicke.)

Die Verwendung der Objective zu photographischer Aufnahme der Bilder in beträchtlichem Bildabstand erfordert, wenn man nicht etwa mit einem gewöhnlichen schwachen Ocular photographiren will, eine Hilfslinse, welche das Bild in die verlangte Entfernung führt, ohne den Strahlengang im Objective selbst zu alteriren. Man kann zu diesem Zwecke dicht hinter dem letzteren eine Concavlinse von angemessener Brennweite anbringen, so wie ein kurzsichtiges Auge eine Concavbrille benutzt, um die Ebene des deutlichen Sehens in grössere Entfernung zu rücken; man kann aber auch eine Concavlinse von entsprechend kürzerer Brennweite in grösserem Abstand vom

---

1) Die Ersparniss der Correctionsfassung bei der Anfertigung solcher Objective ist zwar an sich ganz unerheblich, gegenüber den sonstigen Anforderungen, welche dabei an die technische Kunst gestellt werden. Ein wesentlicher Gewinn entspringt aber aus der Vereinfachung der mechanischen Construction insofern, als es kaum möglich sein würde, in einer Linsenfassung mit beweglichen Theilen die Centrirung der Linsen in derjenigen Vollkommenheit herzustellen und auf die Dauer zu gewährleisten, welche eine feste Fassung möglich macht und welche hier, wegen der Empfindlichkeit der grossen Apertur gegen die geringsten Centrirungsfehler, als unerlässliche Bedingung erscheint. In Hinblick auf diesen Umstand würde es höchst unzweckmässig sein, der oben erwähnten Nebenrücksichten wegen solche Objective mit Correctionsfassungen zu versehen.

Objectiv einschalten, um gleichzeitig eine mässige (2—3 fache) Vergrösserung des Bildes und damit eine Verkürzung des erforderlichen Abstandes der Platte herbeizuführen. Die Stellung der Hilfslinse muss natürlich in diesem Falle — nach Rechnung — so regulirt werden, dass die aus dem Objectiv austretenden Strahlenkegel nach derselben Ebene wie beim gewöhnlichen Beobachten convergiren.

Ein zweiter Punkt, der beim Gebrauch solcher Objective — und überhaupt aller Objective, deren numerische Apertur den Werth 1,0 erheblich überschreitet — nicht ausser Acht bleiben darf, betrifft die Ansprüche, welche an den Beleuchtungsapparat gestellt werden müssen, um im Falle der schiefen Beleuchtung den ganzen Oeffnungswinkel wirklich ausnutzen zu können. — Bei einer numerischen Apertur von 1,25 muss ein einfallender Strahl, um die äusserste Randzone des Objectivs erreichen zu können, das Präparat treffen unter einem Neigungswinkel gegen die Achse des Mikroskops, der für Crownglas oder ein Medium von gleicher Refraction berechnet ca. 56° beträgt. Strahlen von solcher Neigung können natürlich dem Objectiv niemals vom Luftraum aus durch eine ebene zur Achse senkrechte Grenzfläche, wie die untere Fläche des Objectträgers, zugeführt werden. Ein an dieser Fläche unter streifender Incidenz eintretender Strahl würde nach dem Eintritt in das Glas nicht stärker als p. p. 42° gegen die Achse geneigt sein, und beim Gebrauch des gewöhnlichen Beleuchtungsspiegels würde man selbst diese Schiefe noch lange nicht erreichen, ganz abgesehen von dem grossen Lichtverlust durch Reflexion, welcher dabei die Wirkung stark beeinträchtigt. Um also den maximalen Grad schiefer Beleuchtung zu erreichen, den ein Objectiv von so grosser Apertur — natürlich nur bei nicht in Luft liegenden Präparaten — zulässt, und das Unterscheidungsvermögen des Objectivs zur vollen Entwickelung zu bringen, ist in jedem Falle ein Beleuchtungsapparat erforderlich, der seinerseits einen Strahlenkegel von mindestens gleicher Apertur liefert und der zugleich eine continuirliche Verbindung mit der unteren Seite des Objectträgers (durch eine Flüssigkeit) zulässt. Ein diesen Bedingungen genügender „Immersions“-Condensor ist u. a. der vor Jahren von mir beschriebene Beleuchtungsapparat (M. Schultze's Archiv f. mikrosk. Anatomie Bd. 9 S. 496), dessen Linsensystem, dem Oeffnungswinkel der älteren Zeiss'schen Immersionsobjective entsprechend, für seinen oberen Brennpunkt eine numerische Apertur über 1,1 besitzt, bei dessen Einrichtung zugleich

auf die Verbindung der Frontlinse mit der Unterfläche des Objectträgers durch einen Wassertropfen Bedacht genommen ist[1]).

In Ermangelung eines derartigen Beleuchtungsapparates kann übrigens, sofern es sich nur um die Möglichkeit sehr schiefer Beleuchtung handelt, auch eine viel einfachere Vorrichtung ganz gute Dienste leisten. Man kitte mittelst eines Tropfens Glycerin oder Oel eine planconvexe, nahezu halbkugelige Linse von 6—9^{mm} Radius (wenn der Durchmesser des Tischloches diese Grösse erlaubt) an die Unterfläche des Objectträgers. Sie bleibt durch Adhäsion an diesem hängen und kann mittelst eines lose aufgesteckten Messingringchens, dessen äusserer Durchmesser der Tischöffnung entspricht, genügend centrirt erhalten werden, ohne die freie Verschiebung des Präparates auf dem Tisch des Mikroskops zu hindern. Der gewöhnliche Hohlspiegel, nur mässig weit aus der Achse entfernt, liefert jetzt Strahlenkegel von jedem gewünschten Grad der Schiefe.

Schliesslich mögen hier noch einige Notizen über die optische Zusammensetzung der in Rede stehenden Objective Platz finden.

Die auf Grund meiner Berechnung in der hiesigen Werkstatt ausgeführten Objective für homogene Immersion sind sämmtlich viergliedrige Systeme. Ich bin dabei auf einen von mir selbst schon vor Jahren versuchsweise in Anwendung gebrachten Constructionstypus zurückgegangen, der neuerdings von mehreren Optikern, namentlich den Herren Tolles und Spencer, mit gutem Erfolg benutzt worden ist. Es kommen dabei als unterste Glieder des Systems zwei einfache Crownglaslinsen, dicht über einander, zur Verwendung (duplex front), und nur die zwei übrigen Glieder sind zusammengesetzte, sogenannte achromatische (im vorliegenden Fall binäre) Linsen.

Diese Construction hat allerdings den Nachtheil, eine etwas beträchtlichere chromatische Differenz der Vergrösserung (d. h. bei vollkommener Achromasie in der Mitte des Sehfeldes stärkere Farbenräume nach dem Rande desselben) übrig zu lassen, als der Fall zu sein braucht, wenn der Frontlinse des Systems unmittelbar eine aus Flint und Crown zusammengesetzte Linse folgt; dieser Mangel ist aber

1) In Rücksicht auf die grössere Apertur der Objective für homogene Immersion habe ich für diesen Beleuchtungsapparat neuerdings auch noch ein Linsensystem construiren lassen, dessen Oeffnungswinkel in seinem numerischen Aequivalent die Ziffer 1,4 annähernd erreicht, welches demnach Strahlen liefert, die im Glas bis zu 72° gegen die Achse geneigt sind.



praktisch unerheblich gegenüber der Erleichterung, welche diese Anordnung für die Vergrösserung des Oeffnungswinkels herbeiführt. Die Form, in welcher ich diesen Typus zur Ausführung gebracht habe, ist indess wesentlich verschieden von derjenigen Construction, welche Herr Tolles durch detaillirte Mittheilung der Elemente zu allgemeiner Kenntniss gebracht hat (Journal of the R. Micr. Soc. July 1878 p. 143). Der Unterschied tritt auffällig hervor bei Vergleichung der Radien der Frontlinsen mit den Aequivalentbrennweiten der betreffenden Objective. — Das am citirten Orte beschriebene Objectiv $\frac{1}{6}''$ von Tolles hat fast genau 4^{mm} Brennweite und seine Frontlinse einen Radius von 0,73^{mm}. Das Zeiss'sche $\frac{1}{12}''$, von 1,8^{mm} — also über doppelt so kurzer — Brennweite, lässt dagegen der Frontlinse noch einen Radius von 0,9^{mm} und selbst bei dem $\frac{1}{18}$ (1,2^{mm} Brennweite) geht der kleinste Radius (0,6^{mm}) nur wenig unter den des erwähnten $\frac{1}{6}''$ herab, während ein gleich starkes Objectiv nach der Tolles'schen Formel den abnorm kleinen Radius 0,22^{mm} erfordern würde.

Für die vortheilhafte Anwendung der duplex-front-Construction zur Erlangung grosser Oeffnungswinkel dürfte das hier erreichte günstigere Verhältniss zwischen Radius der Frontlinse und Brennweite von entscheidender Bedeutung sein, vor allem deshalb, weil dadurch allein die Herstellung von Objectiven mit genügend kurzer Brennweite möglich wird, um das Unterscheidungsvermögen eines grossen Oeffnungswinkels ausnutzen zu können ohne allzustarke Inanspruchnahme von Tubus und Ocular zur Vergrösserung. Nach der Tolles'schen Construction wäre schon ein Objectiv wie das Zeiss'sche $\frac{1}{12}$, geschweige denn das $\frac{1}{18}$, mit einigermassen beträchtlichem Oeffnungswinkel so gut wie unausführbar, ganz abgesehen noch von der unerträglichen Beschränkung des Arbeitsabstandes bei so abnorm kleinen Linsen.

So lange es sich bloss um Beobachtung von Diatomeen und Testobjecten handelt, wird nun zwar auch ein Objectiv von 4^{mm} bei bester Ausführung, wenn es einen recht grossen Oeffnungswinkel besitzt, kaum etwas zu wünschen übrig lassen, zumal die kleine Frontlinse der Tolles'schen Construction relativ günstige Bedingungen für die Anwendung starker Oculare herbeiführt. Wenn aber die viel complicirteren Gebilde an den schwierigen Objecten des biologischen Studiums berücksichtigt werden, so kann nicht zweifelhaft sein, dass Linsensysteme mit bedeutend höherer Objectiv-Vergrösserung so lange noch ein wirkliches Bedürfniss bleiben werden, als der prak-

tischen Optik für Beseitigung der Aberrationen nicht ganz andere Hilfsmittel als heute zu Gebote stehen. Meiner Ansicht nach muss deshalb in Rücksicht auf die allgemeinen wissenschaftlichen Bedürfnisse einstweilen noch als Ziel festgehalten werden, Objective von genügend kurzer Brennweite herstellen zu können, welche dem regelmässigen Gebrauch keine allzugrossen Erschwernisse entgegenstellen — was denn auch in dieser speciellen Sache die maassgebende Richtschnur meiner Bestrebungen gewesen ist.

Ein entschieden ungünstiges Moment bei der von mir entwickelten Constructionsformel ist es übrigens, dass dieselbe an die technische Ausführung der Objective ungewöhnlich schwierige Anforderungen stellt — Anforderungen, wie sie auf dem Felde der Mikroskopverfertigung bis jetzt wohl schwerlich schon gestellt und erfüllt worden sind. Die sphärische Fläche der Frontlinse muss bei dieser Constructionsweise in extremem Umfang in Anspruch genommen werden und zwar mit Incidenzwinkeln, die für die Randstrahlen auf der Luftseite 45 Grad überschreiten. Der ausführende Optiker hat daher die Aufgabe, in den immerhin kleinen Maassen der Frontlinsen Kugelflächen herzustellen, welche fast in der Ausdehnung einer vollen Halbkugel den strengsten Anforderungen einer Präcisionsfläche genügen, und diese Frontlinsen alsdann so in Fassung zu bringen, dass sie unbeschadet der sicheren Fixirung bis fast an den Aequator heran für den Lichtdurchtritt frei bleiben. Die Schwierigkeit dieser Arbeiten und die sonstige, mit der Vergrösserung des Oeffnungswinkels rasch wachsende Empfindlichkeit eines Linsensystems gegen die kleinsten Fehler in der Form und der Centrirung der Linsen machen die Herstellung solcher Objective zu einem ausnehmend mühsamen und subtilen Geschäft. — Alle diese Erschwernisse der technischen Ausführung würden jedoch bedeutend vermindert werden, sobald man auf die Vergrösserung des Oeffnungswinkels Verzicht leisten und sich mit einer numerischen Apertur von 1,0 und 1,1, welche bei den bisherigen Immersionslinsen das Gewöhnliche ist, begnügen wollte.

Ich muss einstweilen dahingestellt sein lassen, ob das Stephenson'sche System der Immersion nicht auch unter einer derartigen Beschränkung noch nützliche Dienste leisten könnte. Natürlich würden dabei solche Vortheile der hier besprochenen Objective preisgegeben werden, welche in einem gesteigerten Auflösungsvermögen beruhen, da dieses wesentlich durch die Grösse der Apertur bedingt ist. Auf

dem Arbeitsfeld des Mikroskopikers gibt es aber sicher Objecte genug, denen gegenüber eine besondere Höhe des Auflösungsvermögens wahrscheinlich weniger ins Gewicht fällt als die möglichste Vollkommenheit der Definition, und der Vorzug der homogenen Immersion in diesem Punkte, ebenso wie der grosse äussere Vortheil, den der Wegfall des Deckglaseinflusses für das praktische Arbeiten mit sich bringt, würde auch bei beschränkterem Oeffnungswinkel kaum in minderem Grade zur Geltung kommen. — Vorausgesetzt also, dass die ungewöhnliche Immersionsflüssigkeit noch Spielraum übrig lässt für einen häufigeren Gebrauch solcher Linsen namentlich bei biologischen Studien, dürfte es nicht aussichtslos sein, das System der homogenen Immersion auch in weniger künstlichen Constructionen zu versuchen, denen nicht schon durch grosse Kostspieligkeit eine weitere Verbreitung versagt ist.

Uebrigens wird auch nach der entgegengesetzten Richtung hin die Tragweite der neuen Immersionsmethode mit den hier betrachteten Objectiven noch keineswegs erschöpft sein. — Nach dem Erfolg des ersten Schrittes ist nicht zweifelhaft, dass nach diesem System noch merklich grössere Aperturen, unter Beschränkung auf mässig kurze Brennweiten wenigstens, erreichbar sind, wofern man die steigenden Schwierigkeiten der rechnerischen und der technischen Ausführung nicht scheut, und da es ohne Zweifel von Interesse ist, das optische Vermögen des Mikroskops in Bezug auf Detailunterscheidung mit Aufgebot aller Mittel bis an die Grenze des Erreichbaren zu führen, selbst wenn die unvermeidliche Künstlichkeit solcher Constructionen eine öftere Anwendung derselben kaum erwarten lässt, so ist der betreffende Versuch in der hiesigen optischen Werkstatt auch schon in Angriff genommen worden. Ich hoffe demnächst Objective von 4—3 ^{mm} Brennweite vorlegen zu können, deren numerische Apertur auf den Werth 1,35 — einem Oeffnungswinkel von 128° in einem Medium vom Index 1,50 entsprechend — vergrössert ist. Dieser Betrag dürfte indess das Aeusserste sein, was sich noch erreichen lässt, so lange man nicht an den Präparaten Deckgläser aus Flintglas und zugleich eine Immersionsflüssigkeit von entsprechendem Brechungsindex in Anspruch nehmen will.

Nachtrag. Weiter fortgesetzte Nachforschung nach Substanzen, welche sich für die homogene Immersion eignen möchten, hat noch einige wässerige Flüssigkeiten (Salzlösungen) auffinden lassen, die

als Ersatz für die im Text genannten Oele benutzt werden können Wasserfreies Chlor-Zink (Destillat) lösst sich in Wasser so stark, dass bei gewöhnlicher Temperatur der Brechungsindex 1,55 erreicht werden kann. In der Testflasche mit Wasser verdünnt liefert es eine Flüssigkeit, welche in Refraction und Dispersion dem Cedernholzöl völlig gleichkömmt. Sie besitzt nicht die unbequeme Dünnflüssigkeit des letzteren und bietet ausserdem den Vortheil, Lack u. dergl. nicht anzugreifen. — Noch günstiger für diese Verwendung werden sich wahrscheinlich wässerige Lösungen von Natrium-Metawolframiat und von Lithium-Metawolframiat stellen; jedoch konnten diese wegen Mangel genügenden Materials noch nicht erschöpfend erprobt werden.

Es steht zu erwarten, dass sich unter Salzlösungen, die einer hohen Concentration fähig sind, auch noch solche finden werden, welche die höhere Dispersion der im Text erwähnten Oelmischungen darbieten.

Ueber eine einfache Modification des Fresnel-Arago'schen Interferenzversuches in polarisirtem Lichte.

Von

Dr. **F. Koláček,**

Professor in Brünn.

Bekanntlich hat Fresnel[1]) aus dem Umstande, dass sich mit dem durch einen Kalkspath erzeugten Doppelbilde einer Spalte Interferenzstreifen nicht hervorrufen lassen, geschlossen, dass senkrecht zu einander polarisirte Lichtstrahlen sich durch Interferenz nicht auslöschen können. Arago[1]) versah, um einen directen Beweis zu liefern, die zwei Spalten des Young'schen Interferenzapparates mit polarisirtem Licht, das durch Brechung in einem Glimmerplattensatz aus natürlichem Lichte erzeugt wurde. Stefan[2]) lässt einen der interferirenden Strahlen durch einen rechtsdrehenden, den anderen durch einen linksdrehenden Quarz einer Soleil'schen double plaque hindurchgehen. Die Interferenz wird nach dem Talbot'schen Verfahren dadurch herbeigeführt, dass der eine der interferirenden Strahlen eine dünne Platte durchsetzen muss.

Im Spectrum verschwinden die Talbot'schen Interferenzstreifen an jenen Stellen, wo die interferirenden Lichtstrahlen, die anfangs eine gemeinschaftliche Polarisationsebene besassen, nach dem Durchgange durch die Doppelplatte senkrechte Polarisationsebenen besitzen. Desgleichen lässt er die zwei Strahlen einer Doppelspalte durch die beiden Hälften der double plaque hindurchgehen und untersucht die daraus folgende Aenderung im Streifensysteme. Mach[3]) und Rosický wenden schliesslich das Princip der spectralen Auflösung bei der Untersuchung der Interferenzen an, die entstehen, wenn die Hälften

1) Fresnel, Œuvres complétes T. I.

2) Stefan, Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 66.

3) Mach und Rosický, Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. 72.

einer beugenden Spalte mit parallel zur Achse geschliffenen Quarzplatten bedeckt werden, so jedoch, dass die Achsen beider Quarze auf einander senkrecht stehen.

Im Folgenden will ich den Arago'schen Versuch in einer einfachen Weise modificiren, indem ich zwei Viertelundulationsglimmerplatten benütze, um die zwei Spalten des Young'schen Doppelspaltes mit beliebig polarisirtem Lichte versehen zu können. Es ist mir nicht bekannt, ob man diese einfache Modification vorher irgendwo beschrieben hat.

Aus einer $\frac{\lambda}{4}$ Platte schneide man zwei Streifen, die in der unzerschnittenen Platte zu einander senkrecht stehen, und bedecke damit die zwei Spalten. Bekanntermassen besitzt eine $\frac{\lambda}{4}$ Platte zwei zu einander senkrechte Richtungen Ox, Oy, längs welcher das senkrecht auffallende Licht schwingt, wenn es die Krystallplatte mit den Geschwindigkeiten v_x und v_y durchsetzt. Es stehen somit in beiden Spalten die x-Richtungen auf einander senkrecht. Betrachtet man nun die Beugungserscheinung in unpolarisirtem Lichte, so sind die inneren Young-schen Streifen etwas unbestimmt, da zwei Streifensysteme entstehen, die sich zum Theil überdecken. Das natürliche Licht theilt sich in jeder Spalte in ein Paar zu einander senkrecht und linear polarisirter Lichtstrahlen, von denen je zwei Lichtstrahlen gleiche Polarisationsebene besitzen. Die Streifensysteme erscheinen, das eine nach rechts, das andere nach links um ein Viertel einer Fransendistanz verschoben, und zwar von jener Lage aus gezählt, die das Streifensystem bei freien Spalten einnehmen würde. Mit einem Ocularnikol kann man bald das eine, bald das andere Streifensystem zum Verschwinden bringen.

Polarisirt man das Licht, ehe es auf die Spalten fällt, durch einen Nikol N, so tritt Aehnliches ein. Indess gibt es zwei Lagen des Nikols N, für welche nur ein scharfes Streifensystem entsteht, wenn nämlich der Hauptschnitt des Nikols mit den charakteristischen Richtungen Ox oder Oy der Spaltenglimmer parallel ist. Das auftretende Streifensystem ist, wie man sich mit einem Ocularnikol überzeugen kann, linear polarisirt. Schiebt man zwischen Nikol und Doppelspalt eine $\frac{\lambda}{4}$ Platte L derart ein, dass die Ox-Richtung derselben mit jenen der Spalten parallel oder senkrecht ist, so ist die eine

Spalte gewissermassen mit einer $\frac{\lambda}{2}$ Platte, die andere mit einer $\lambda = 0$ Platte bedeckt. Das von beiden Spalten ausgesendete Licht ist in beiden Spalten linear, in derselben Polarisationsebene polarisirt.

Die inneren Streifen bleiben nach wie vor scharf. Dreht man aber die $\frac{\lambda}{4}$ Platte L so, dass ihre Ox-Richtung mit jenen der Spaltenglimmer die Winkel $\pm 45^0$ einschliesst, so verschwinden die inneren Streifen. Nikol und die $\frac{\lambda}{4}$ Platte zusammen bewirken, dass circulares Licht auf die Spaltenglimmer fällt, welches hier in lineares Licht zurückverwandelt wird, und zwar ist die Polarisationsebene des Lichtes, welches aus einem Spalt herausdringt, senkrecht auf jener des Lichtes, das vom zweiten Spalt kommt. Davon kann man sich natürlich am Nörremberg'schen Polarisationsapparat leicht überzeugen; denn sind die Spaltenglimmer, die Platte L sowie die Schwingungsrichtung des Polariseurs in der angegebenen Weise orientirt, so zeigt sich bei Betrachtung der Spalten mit einem Ocularnikol bald die eine, bald die andere dunkel.

Im weissen Licht bleiben von den Young'schen Streifen in der Lage, wo sie vollkommen zu verschwinden haben, sehr leise Spuren zurück, was davon herrührt, dass die verwendeten Glimmer nicht für jede Farbe $\frac{\lambda}{4}$ Platten sind. Ich benützte deshalb homogenes Spectrumlicht.

Im grünen Licht waren die Streifen in der ersten Lage vollkommen scharf und verschwanden gänzlich in der zweiten Lage. Im rothen Licht blieben in der zweiten Lage leise Spuren der Streifen zurück. Die Versuche sind übrigens eben so gut subjectiv (mit Goniometer) als objectiv anstellbar.

Zum Schluss will ich noch eine kleine Berechnung anstellen.

Die Dicken der Platten seien Δ, und die Ox, Oy-Richtung des Spaltglimmers rechts soll fixe Coordinatenachsen vorstellen. Die Schwingungsrichtung des auffallenden polarisirten Lichtes schliesse mit Ox den Winkel ϱ, die Ox-Richtung der Platte L mit der x-Achse den Winkel $\chi - \varrho$ ein. Die Excursionscomponenten seien x, y, a die Amplitude. Nach dem Austritt aus der rechten Spalte ist

$$x = a \cos\chi \cos(\varrho - \chi) \sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\Delta}{v_x} - \frac{\Delta}{v_x}\right) - a \sin\chi \sin(\varrho - \chi) \sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\Delta}{v_y} - \frac{\Delta}{v_x}\right)$$

$$y = a \cos\chi \sin(\varrho - \chi) \sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\Delta}{v_x} - \frac{\Delta}{v_y}\right) + a \sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t - \frac{\Delta}{v_y} - \frac{\Delta}{v_y}\right) \cos(\varrho - \chi) \sin\chi.$$

Die Formeln für das vom linken Spalt kommende Licht sind, wenn man sie auf dasselbe Coordinatensystem bezieht:

$$x = a\cos\chi\cos(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{\Delta}{v_x}-\frac{\Delta}{v_y}\right)-a\sin\chi\sin(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{\Delta}{v_y}-\frac{\Delta}{v_y}\right)$$

$$y = a\cos\chi\sin(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{\Delta}{v_x}-\frac{\Delta}{v_x}\right)+a\sin\chi\cos(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}\left(t-\frac{\Delta}{v_y}-\frac{\Delta}{v_x}\right)$$

Bei passender Verlegung des Anfangspunktes der Zeitzählung ist $m = \Delta\left(\frac{1}{v_x}-\frac{1}{v_y}\right)$ gesetzt.

Rechts

$$x = a\cos\chi\cos(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}t \qquad -a\sin\chi\sin(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+m)$$

$$y = a\cos\chi\sin(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+m)+a\sin\chi\cos(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+2m);$$

Links

$$x = a\cos\chi\cos(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+m)-a\sin\chi\sin(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+2m)$$

$$y = a\cos\chi\sin(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}t \qquad +a\sin\chi\cos(\varrho-\chi)\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+m).$$

1. Fall. Nikol parallel mit Ox des rechten Spaltglimmers, also $\varrho=0$.

Rechts

$$x = \quad a\cos\chi\sin\frac{2\pi}{\tau}t \qquad +a\sin\chi\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+m)$$

$$y = -a\cos\chi\sin\chi\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+m)+a\sin\chi\cos\chi\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+2m);$$

Links

$$x = \quad a\cos\chi\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+m)+a\sin\chi\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+2m)$$

$$y = -a\cos\chi\sin\chi\sin\frac{2\pi}{\tau}t \quad +a\sin\chi\cos\chi\sin\frac{2\pi}{\tau}(t+m).$$

Die Platten seien Viertelundulationsplatten, somit

$$\frac{2\pi}{\tau}m = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Dann ist}$$

Rechts

$$x = \quad a\cos\chi\sin\frac{2\pi}{\tau}t \qquad +a\sin\chi\cos\frac{2\pi}{\tau}t$$

$$y = -a\cos\chi\sin\chi\cos\frac{2\pi}{\tau}t-a\sin\chi\cos\chi\sin\frac{2\pi}{\tau}t;$$

Links

$$x = a \cos\chi \cos\frac{2\pi}{\tau}t \qquad - a \sin\chi \sin\frac{2\pi}{\tau}t$$

$$y = - a \cos\chi \sin\chi \sin\frac{2\pi}{\tau}t + a \sin\chi \cos\chi \cos\frac{2\pi}{\tau}t.$$

A. Die Ox-Richtung des Spaltglimmers rechts und der eingeschobenen $\frac{\lambda}{4}$ Platte unter einander parallel $\chi = 0$, oder senkrecht $\chi = 90$. Dann ist

Rechts

$$\chi = 0 \qquad x = a \sin\frac{2\pi}{\tau}t \quad y = 0 \qquad x = a \cos\frac{2\pi}{\tau}t \quad y = 0;$$

$$\chi = 90 \qquad x = a \cos\frac{2\pi}{\tau}t \quad y = 0 \qquad x = - a \sin\frac{2\pi}{\tau}t \quad y = 0.$$

Das Licht ist an beiden Spalten linear (mit derselben Polarisationsebene) polarisirt.

B. Die Ox-Richtung des Spaltglimmers rechts schliesse mit jener der Platte L einen Winkel von 45^0 ein. Dann ist

Links

$$x = \frac{a}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{\tau}t - \sin\frac{2\pi}{\tau}t\right) \quad y = \frac{a}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{\tau}t - \sin\frac{2\pi}{\tau}t\right);$$

Rechts

$$x = \frac{a}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{\tau}t + \cos\frac{2\pi}{\tau}t\right) \quad y = - \frac{a}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{\tau}t + \sin\frac{2\pi}{\tau}t\right).$$

Die Richtungstangente der Schwingungen rechts ist -1, links 1. Das Product derselben um 1 vermehrt gibt Null. Somit ist das Licht in jeder Spalte linear polarisirt, die Polarisationsebenen sind aber in den zwei Spalten gegen einander senkrecht.

Für andere Winkelwerthe des χ als 0, 45 oder 90^0 ist das aus jeder Spalte tretende Licht elliptisch polarisirt. Die Bahnellipse im linken Spalt ist dieselbe wie im rechten Spalte. Dieselben sind jedoch gegen einander um 90^0 verdreht, die Lichter sind somit nach der Bezeichnung von Stokes senkrecht gegen einander elliptisch polarisirt.

Ueber das Kalibriren von Thermometern, insbesondere über die wahrscheinlichen Fehler der Kalibercorrectionen.

Von

Dr. **M. Thiesen.**

Herr W. J. Marek hat sich der dankenswerthen Mühe unterzogen, für gewisse einfache Fälle die Formeln aufzustellen, durch welche die strengen Werthe der Kalibercorrectionen eines Thermometers und ihrer wahrscheinlichen Fehler nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt sind[1]). Indessen ist der von Herrn Marek behandelte Fall schon früher und zwar ganz allgemein von Hansen gelöst worden[2]); auch sind die von Hansen gegebenen Formeln genügend bequem, um für eine grössere Zahl von Punkten die Kalibercorrectionen direct berechnen zu lassen, falls die erforderlichen Beobachtungen vorhanden sind, ohne dass, wie Herr Marek will, eine Theilung in verschiedene Gruppen und damit ein Verzichtleisten auf eine Anzahl möglicher Beobachtungen nöthig wäre. Ich selbst habe ähnliche Untersuchungen fallen lassen und auf die strenge Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate verzichtet, als ich in einer Erweiterung der Neumann'schen Methode[3]) das Mittel gefunden hatte, mittelst einer einfachen Rechnung das Problem auch in den in der Praxis nicht seltenen Fällen zu lösen, in welchen nicht alle gewünschten Beobachtungen erhalten werden können, entweder weil der im unteren Theil der Röhre verbliebene Quecksilberfaden daran hindert — ein Umstand, den F. E. Neumann wohl berücksichtigte — oder weil, wie es bei den von F. E. Neumann nicht benutzten Einschlussthermometern vorkommen kann, das Abtrennen aller gewünschten Fäden nicht

1) Dieses Repertorium Bd. 15 S. 300.

2) „Bestimmung der Theilungsfehler eines geradlinigen Maassstabes" in den Abh. der math.-phys. Classe der k. sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 10; erstes Verfahren S. 535—587.

3) Dieses Repertorium Bd. 15 S. 285.

gelingt. Gerade in dem von Hansen und Marek behandelten Falle gestaltet sich die Rechnung nach der von mir gegebenen Methode so überaus einfach, dass die Frage als wohl berechtigt erscheint, ob die strenge Methode einen genügend grossen Gewinn an Genauigkeit gewährt, um ihre Anwendung in diesem Falle als geboten erscheinen zu lassen. Ich will daher hier als Ergänzung meiner früheren Arbeit das Gewicht ermitteln, mit welchem durch meine Methode die Kaliberfehler bestimmt werden, und dasselbe mit dem Gewichte der durch die strenge Methode bestimmten Fehler vergleichen.

Unter Beibehaltung der von mir a. a. O. benutzten Bezeichnungen werden die Endgleichungen, wenn $\Delta_0 = 0$, $\Delta_n = 0$ angenommen wird und alle möglichen Beobachtungen vorhanden sind:

$$\begin{aligned} n\delta_1 = & \quad (2,1) + (3,1) + (4,1) + \cdots + (n,1) \\ & - (1,0) - (2,0) - (3,0) - \cdots - (n-1,0), \\ n\delta_2 = & - (2,1) + (3,2) + (4,2) + \cdots + (n,2) \\ & + (1,0) - (2,1) - (3,1) - \cdots - (n-1,1), \\ n\delta_3 = & - (3,1) - (3,2) + (4,3) + \cdots + (n,3) \\ & + (2,0) + (2,1) - (3,2) - \cdots - (n-1,2), \\ & \quad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \qquad \cdot \\ n\delta_n = & - (n,1) - (n,2) - (n,3) - \cdots - (n,n-1) \\ & + (n-1,0) + (n-1,1) + (n-1,2) + \cdots + (n-1,n-2). \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der ersten und letzten Gleichung stehen $2(n-1)$ unabhängig von einander beobachtete Fadenlängen (i,k); in den andern Gleichungen sind je zwei dieser Grössen einander gleich. Ist daher r der wahrscheinliche Fehler der Bestimmung einer dieser Grössen, so wird der w. F. der Bestimmung der Intervalle δ_1 und δ_n gleich

$$\frac{\sqrt{2(n-1)}}{n} r,$$

der w. F. der übrigen δ gleich

$$\frac{\sqrt{2n}}{n} r.$$

Aus den δ erhält man durch fortlaufende Addition

$$\begin{aligned} n\Delta_1 = & \quad (2,1) + (3,1) + (4,1) + \cdots + (n,1) \\ & - (1,0) - (2,0) - (3,0) - \cdots - (n-1,0), \\ n\Delta_2 = & \quad (n,1) + (3,2) + (4,2) + \cdots + (n,2) \\ & - (2,1) - (2,0) - (3,0) - \cdots - (n-1,0), \end{aligned}$$

$$n\Delta_3 = \quad (n,1) + (n,2) + (4,3) + \cdots + (n,3) \\ - (3,2) - (3,1) - (3,0) - \cdots - (n-1,0),$$

. . . .

$$n\Delta_{n-1} = \quad (n,1) + (n,2) + (n,3) + \cdots + (n, n-1) \\ - (n-1, n-2) - (n-1, n-3) - (n-1, n-4) - \cdots - (n-1,0).$$

Der w. F. eines jeden Δ wird hienach gleich

$$\frac{\sqrt{2(n-1)}}{n} r.$$

Sind also alle möglichen Beobachtungen vorhanden, so gibt meine Methode die Kaliberfehler aller Hauptpunkte mit demselben Gewichte.

Bei strenger Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ergeben sich natürlich kleinere w. F. der Kalibercorrectionen und zwar um so kleinere, je näher der zu bestimmende Punkt der Mitte der Scala liegt. Für die den Enden zunächst liegenden Punkte wird der w. F. gleich $\sqrt{\frac{2n-1}{n(n+1)}}\, r$, während er für den Punkt in der Mitte der Scala (also für gerade Werthe von n) gleich $\sqrt{\frac{3}{2(n+1)}}\, r$ wird. Der erste dieser Werthe unterscheidet sich zumal für grössere Werthe von n kaum von dem meiner Methode entsprechenden Werthe, im ungünstigsten Falle, für $n = 4$, ist das Verhältniss beider wie 1:1,035. Für die Mitte der Scala wird das Verhältniss allerdings ungünstiger, für grosse Werthe von n wie 1 : 1,155; doch dürften selbst derartige Unterschiede der w. F. selten eine Rolle spielen, zumal da der wesentlichere Nutzen der strengen Methode sich nicht auf alle Striche erstreckt. Ich glaube daher, dass man in allen Fällen bei der einfacheren Rechnung wird stehen bleiben können.

Im Falle zwar alle Fäden, aber wegen des im unteren Theil der Röhre verbliebenen Quecksilbers nicht alle Einstellungen erhalten werden konnten und daher aus dem Schema der $\delta_i - \delta_k$ ein Quadrat von m (mindestens $= 2$) Seiten herausfällt, ergeben ähnliche Betrachtungen als w. F. der Correction des i^{ten} Striches den Werth

$$\frac{\sqrt{2[(n-m-1)n^2 + (m+1)in - (n+1)i^2]}}{n(n-m)} r,$$

so lange i kleiner als m ist, während die Correctionen der übrigen Striche auch hier den w. F.

$$\frac{\sqrt{2(n-1)}}{n} r$$

haben.

Um mittelst der vorstehend gegebenen Formeln die w. F. bei einer vorliegenden Kalibrirung wirklich berechnen zu können, ist es nöthig, den Werth von r, dem w. F. der Bestimmung einer Fadenlänge, zu kennen. Man kann denselben aus der Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler der $\delta_i - \delta_k$, welche mit A bezeichnet werden möge (wenn nur die eine der einander entsprechenden Hälften des Schemas berücksichtigt wird), ableiten. Wären nämlich die Grössen $(i-1,\ k-1)-(i,k)$ direct beobachtet, so würden sich dieselben Grössen δ, wie sie jetzt gefunden werden, bei strenger Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate ergeben. Dividirt man also A durch die Zahl der Gleichungen weniger der Zahl der Unbekannten, d. h. durch $\frac{1}{2} n(n-1)-(n-1)$, oder allgemeiner durch $\frac{1}{2} n(n-1)$ $-\frac{1}{2} m(m-1)-(n-1)$, so erhält man das Quadrat des mittleren Fehlers einer der Grössen $(i-1, k-1)-(i,k)$ und also nach weiterer Division durch 2 das Quadrat des mittleren Fehlers einer der Grössen (i,k). Demnach ist

$$r = 0{,}67 \cdot \sqrt{\frac{A}{(n-1)(n-2) \div m(m-1)}}.$$

In dem a. a. O. angeführten ersten Beispiele (S. 289) ist

$$n = 10;\ m = 2;$$

ferner ergibt sich aus den daselbst angegebenen übrig bleibenden Fehlern in Einheiten von $0{,}01^0$

$$A = 757.$$

Hieraus folgt also

$$r = 0{,}022^0$$

als w. F. einer (doppelt beobachteten) Fadenlänge und $0{,}010^0$ als w. F. der Correction des 10^0 Striches, $0{,}009^0$ als w. F. der übrigen Punkte. Auf anderem Wege, nämlich aus der Uebereinstimmung der zweimaligen Einstellungen der Fadenlängen, hatte sich für das betreffende und zwei gleichartige Thermometer $r = 0{,}020^0$ ergeben.

Das bewusste Abweichen von der strengen Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate, das sich sonst meistens auf die Gruppenbildung beschränkt, dürfte in ähnlicher Weise, wie es hier geschehen ist, noch in manch anderen Fällen vortheilhaft sein. Nahe liegend ist die Anwendung auf die Bestimmung von Theilungsfehlern; die für

die Kalibrirung eines Thermometers gegebene Methode kann ohne weiteres auch zur Bestimmung der Theilungsfehler eines Stabes verwandt werden, indem hier nur Hilfsintervalle an Stelle der abgetrennten Quecksilberfäden treten. Bezieht sich doch die von mir als strenge Lösung des Problems der Kalibrirung, im Falle alle Beobachtungen vorhanden sind, angeführte Arbeit Hansen's formell gar nicht auf eine Kalibrirung, sondern auf die Bestimmung von Theilungsfehlern. Indessen ergeben sich für letztere Bestimmung noch weitere von Hansen unbeachtet gelassene, sehr wesentliche Vortheile gegenüber einer Kalibrirung daraus, dass die verschiedenen Hilfsintervalle mit einander in einem andern getheilten Stab vereinigt sein werden, und dass ausserdem dieser Stab aufbewahrt und bei neuen Bestimmungen benutzt werden kann; man wird hier demnach vortheilhaft etwas andere Methoden der Beobachtung und Rechnung anwenden. Ich gedenke meine Untersuchungen hierüber zu veröffentlichen, sobald ich im Besitze von entsprechenden Messungen sein werde.

Das absolute Maass für die Zähigkeit der Flüssigkeiten.

Von

A. v. Obermayer.

Es gibt zweierlei Methoden, die Zähigkeit von Flüssigkeiten in absolutem Maasse anzugeben. Nach der einen definirt man die Zähigkeit durch den Coëfficienten μ der inneren Reibung, es ist dies sozusagen die statische Methode; nach der anderen nimmt man den Quotienten $\frac{\mu}{\varrho}$, d. i. Reibungscoëfficient getheilt durch die Dichte, als Maass der Zähigkeit, es ist die dynamische Methode.

Auf diese beiden Methoden, die Zähigkeit zu definiren, wird man durch die allgemeinen Bewegungsgleichungen von Flüssigkeiten mit innerer Reibung geführt. Wird bei einem Problem Beharrungszustand vorausgesetzt, so bleibt in den allgemeinen Gleichungen bloss μ zurück, ϱ dagegen fällt heraus. Bei Problemen, wo kein Beharrungszustand vorausgesetzt wird, stösst man stets auf den Factor $\frac{\mu}{\varrho}$.

Da beim Strömen von Flüssigkeiten in Capillaren alsbald Beharrungszustand eintritt und dieses Problem auch gewöhnlich unter dieser Voraussetzung gerechnet wird, so liefern solche Versuche stets μ allein und nicht $\frac{\mu}{\varrho}$. Herr O. E. Meyer ist daher im Unrecht, wenn er in der Veröffentlichung[1]) der Rosenkranz'schen Versuche Stefan vorwirft, aus der Berechnung der Poiseuille'schen Strömungsversuche zwar $\frac{\mu}{\varrho}$ erhalten, dieses jedoch nur als μ angesetzt zu haben.

Der Coëfficient μ wurde zuerst von O. E. Meyer als der Druck auf die Fläche eines Quadratcentimeters in Grammen definirt[2]). Stefan hat hierauf gezeigt, dass man zur Abhängigkeit des Coëfficienten der

1) Wied. Ann. Bd. 2 S. 405.
2) Pogg. Ann. Bd. 113 S. 383.

inneren Reibung von den Einheiten des Gewichtes, der Länge und der Zeit, durch die Voraussetzung der Homogenität der Formeln gelangen könne[1]). Es ergeben sich so für μ die Dimensionen:

$$\frac{\text{Gewichtseinheit} \cdot \text{Zeiteinheit}}{\text{Quadrat der Längeneinheit.}}.$$

Der Reibungscoëfficient ist dann definirt als der Zug in mechanischen Krafteinheiten (Milligrammen), welcher per Flächeneinheit (Quadratmillimeter) von zwei Schichten auf einander ausgeübt wird, deren Geschwindigkeitsdifferenz gleich ihrem Abstande ist.

Man pflegt seither den Reibungscoëfficienten als den Zug in absoluten Krafteinheiten anzugeben. Die Dimensionen sind dann:

$$\frac{\text{Masse der Gewichtseinheit}}{\text{Längeneinheit} \cdot \text{Zeiteinheit}}.$$

Der in absoluten Krafteinheiten angegebene Reibungscoëfficient dividirt durch die Beschleunigung der Schwere gibt den, in mechanischen Krafteinheiten ausgedrückten Coëfficienten der inneren Reibung.

Die Zahlen, welche Herr O. E. Meyer in der Berechnung der Rosenkranz'schen Versuche erhält, sind also, sowie seine Reibungscoëfficienten der Gase, als Zug in absoluten Kafteinheiten und nicht, wie in jener Abhandlung behauptet wird, in Grammen d. i. mechanischen Krafteinheiten angegeben. Diese Verwechslung von absoluten und mechanischen Krafteinheiten verhindert auch Herrn O. E. Meyer bei mehreren Gelegenheiten den Reibungscoëfficienten richtig aus einem Maasse ins andere umzurechnen.

Bezeichnet man durch P den Zug, welchen zwei Flüssigkeitsschichten, die sich längs der Fläche F berühren, deren Geschwindigkeitsdifferenz $v' - v$, deren Abstand gleich d ist, auf einander ausüben, so ist die Definition des Coëfficienten der inneren Reibung:

$$\mu = \frac{P}{F\frac{v'-v}{d}}.$$

Nachdem nun $P = \frac{mv}{t}$ ist, d. h. die Kraft, durch die in der Zeit Eins erzeugte Bewegungsgrösse gemessen wird, so kann diese Definition auch geschrieben werden:

$$\mu = \frac{mv}{F \cdot t} \cdot \frac{1}{\frac{v'-v}{d}},$$

1) Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 46 S. 516.

d. h. der Coëfficient der inneren Reibung ist die von einer Flüssigkeitsschichte zu einer anderen in der Zeit Eins per Flächeneinheit übertragene Bewegungsgrösse, wenn die Geschwindigkeitsdifferenz der Schichten und ihr Abstand einander gleich, oder beide gleich Eins sind.

Diese Definition fällt vollkommen mit der von dem Wärmeleitungsvermögen k gegebenen Definition überein. Man bezeichnet ja als Wärmeleitungsvermögen einer Substanz die Wärmemenge, welche per Flächeneinheit in der Zeiteinheit durch eine Platte der Substanz von der Dicke Eins hindurchgeht, wenn zu beiden Seiten die Temperatursdifferenz Eins erhalten wird.

Die Gleichungen, welche für die Wärmeleitung aufgestellt wurden, und ihre Lösungen gelten somit auch für die Probleme der inneren Reibung.

So hat man für die Probleme der inneren Reibung in einer Platte:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}$$

und für jene der Wärmeleitung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{k}{\varrho g C} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}.$$

k Wärmeleitungsvermögen, C specifische Wärme, g Beschleunigung der Schwere.

Schliesslich hat man auch für die Diffusion von Salzen in Flüssigkeit:

$$\frac{du}{dt} = k \frac{d^2u}{dx^2},$$

worin k der Diffusionscoëfficient d. i. die Salzmenge ist, welche per Zeiteinheit und Flächeneinheit durch einen Querschnitt geht, wenn das Gefälle der Dichtigkeit Eins ist.

So wie man im Falle der Wärmeleitung den Factor $\frac{k}{\varrho g C}$ auch als Temperaturleitungsvermögen bezeichnen kann und derselbe über die Geschwindigkeit Aufschluss gibt, mit welcher die Temperatur in dem der Wärmeleitung unterworfenen Körper weiterschreitet, so gibt $\frac{\mu}{\varrho}$ die Geschwindigkeit an, mit der die Uebertragung der Geschwindigkeit der Flüssigkeit von Schichte zu Schichte zufolge der inneren Reibung stattfindet.

Ein Körper kann ein schlechter Wärmeleiter sein und doch die Temperatur in seinem Innern rasch verbreiten. In Luft, welche

zwischen zwei verschieden temperirten Wänden eingeschlossen ist, wird sehr bald die dem Beharrungszustande entsprechende Temperaturvertheilung eintreten, deswegen wird aber doch nur sehr wenig Wärme hindurchtreten. Es gehört hieher der bekannte Versuch, dass auf zwei gleich dicken Platten von Eisen und Wismuth[1]), die an ihrer oberen Seite mit Wachs überzogen sind und auf eine warme Unterlage gelegt werden, das Wachs zuerst auf dem Wismuth schmilzt, obgleich dieses der schlechtere Wärmeleiter ist.

Ebenso hat die Luft eine sehr geringe innere Reibung, kann also nur wenig Bewegungsgrösse durch innere Reibung übertragen. Nichtsdestoweniger werden Bewegungen, die irgendwo in der Luft erregt werden, durch die innere Reibung bei weitem rascher fortgepflanzt als z. B. im Wasser, dessen innere Reibung etwa sechzigmal grösser als jene der Luft ist.

Um für die innere Reibung die Bedeutung des $\frac{\mu}{\varrho}$ (Längeneinheit)^2 (Zeiteinheit)$^{-1}$ aufzuklären, habe ich folgendes, schon von Stokes[2]) behandelte Exempel gerechnet. Eine unendlich ausgedehnte Platte schwingt nach einer geraden Linie in einer Flüssigkeit wie ein einfaches Pendel hin und her. Es werden gesucht die Länge λ der Wellen, welche sich in dem Mittel zufolge innerer Reibung fortpflanzen, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c dieser Wellen.

Wenn τ die Schwingungsdauer der Platte und u_0 die Geschwindigkeit ist, mit welcher sie die Gleichgewichtslage passirt, so erhält man für die Geschwindigkeit u in Function der Zeit und der Abscisse:

$$u = u_0 e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\right)$$

und daraus die Wellenlänge λ, sowie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{\lambda}{\tau} = c$, da $a = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$:

$$\lambda = 2\pi\sqrt{\frac{\tau\mu}{\pi\varrho}}; \quad c = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{\pi\varrho\tau}}.$$

Für die Ausschläge der Theilchen aus der Gleichgewichtslage ergibt sich:

---

1) Tyndal, Heat a Mode of Motion 3. Ed. p. 218.

2) Cambridge Transaction Vol. 9 (1856) p. 20 Art. 17: Oscillatory plane.

$$y = \frac{u_0 \tau}{2\pi} e^{-x\sqrt{\frac{\pi\varrho}{\tau\mu}}} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - x\sqrt{\frac{\pi\varrho}{\tau\mu}}\right).$$

Setzt man $\tau = 25$ Sec., so erhält man für verschiedene Flüssigkeiten folgende Tabelle, eine Temperatur von 20° C. vorausgesetzt:

	Luft 760^{mm}	Luft 0,04^{mm}	Wasser	Glycerin
μ	0,000177	0,000177	0,01023	8,304
ϱ	0,001204	0,000000063	0,99827	1,252
$\frac{\mu}{\varrho}$	0,147	2810,00	0,0103	6,633
λ	6,80^{cm}	939,40^{cm}	1,79^{cm}	45,64^{cm}
c	0,27	37,58	0,072	1,83

Die Wellen, welche in die Flüssigkeit, durch innere Reibung vermittelt, hinausgeschickt werden, sterben sehr rasch ab. Der Factor $e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\pi}{\tau}}}$ bestimmt die Abnahme der Amplitude. Setzt man $x = \lambda$, $2\lambda, 3\lambda \ldots$, so geht dieser Factor über in $e^{-2\pi}$, $e^{-4\pi}$, $e^{-6\pi} \ldots$ oder $= 0{,}00187$, $0{,}00000349 \ldots$

Weil dem Wasser die geringste Wellenlänge unter den betrachteten Flüssigkeiten zukommt, so erlöschen die Wellen im Wasser auch in geringerer Entfernung von der schwingenden Scheibe als in anderen Flüssigkeiten.

Ueber den Distanzmesser von Paschwitz.

Von

Franz Lorber,

o. ö. Professor der prakt. Geometrie an der k. k. Bergakademie in Leoben.

(Hiezu Tafel XXIII.)

Obgleich der in Rede stehende Distanzmesser schon wiederholt beschrieben wurde, ist doch bis jetzt eine eingehende Untersuchung desselben nicht bekannt; ist auch das einfache Princip, auf welches sich derselbe stützt, die Absteckung eines constanten Winkels, schon öfters für Distanzmesser benutzt worden, so ist doch die daraus hervorgehende Einrichtung des Instrumentes sowie die zu erreichende Genauigkeit bei den verschiedenen Constructionen eine wesentlich andere.

Wie wichtig es für die Artillerie ist, die Entfernungen nach den zu beschiessenden Objecten mit entsprechender Genauigkeit zu kennen, braucht nicht besonders hervorgehoben zu werden; am leichtesten könnten diese Entfernungen mit solchen Instrumenten bestimmt werden, die bloss eine einzige Aufstellung verlangen, und hat man auch in der Construction derselben ganz erhebliche Fortschritte gemacht, wie die Distanzmesser von Rośkiewicz[1]) und Berdan[2]) beweisen.

Dass solche Instrumente alle übrigen zu verdrängen im Stande sind, wenn sie dieselbe oder grössere Genauigkeit gewähren, ist sicher; trotzdem wäre es aber nicht gerechtfertigt, bloss des Ideales wegen alle jene Distanzmesser, für welche eine Basis abgesteckt werden muss, von vorn herein zu verdammen.

Es ist nicht zweifelhaft, dass sich unter den letzteren auch solche finden werden, die bei einer nicht zu langen Basis — so, dass sie den Bedürfnissen der Artillerie noch zu entsprechen vermag — eine so einfache und wenig Zeit beanspruchende Verfahrungsweise bedingen,

---

1) Distanzmesser mit der Basis an dem Instrumente, von Prof. Dr. Schell. Sitzungsber. der k. Akad. der Wissensch., Wien 1877, und Repertorium Bd. 14 S. 455 ff.

2) Engineer 1877 und bayer. Industrie- und Gewerbeblatt 1877.



dass sie selbst von weniger geschulten Personen bedient werden können, und die dabei doch eine Genauigkeit gewähren, welche bei den Distanzmessern mit der Basis am Instrumente nicht leicht erreicht werden kann; da nun der am 3. Juli 1877 patentirte Telemeter von Paschwitz ein solches Instrument ist, welches überdies noch den Vortheil besitzt, dass es einmal richtig gestellt, in Folge der gegenseitigen Unveränderlichkeit seiner Bestandtheile — eine Beschädigung ausgenommen — in dem richtigen Zustande verbleibt, so ist die angestellte Untersuchung, deren Resultate im Nachstehenden vorgeführt werden sollen, hinlänglich begründet und gerechtfertigt.

Die Bestandtheile des Instrumentes (Taf. XXIII) sind:

1. Das Fernrohr F in Verbindung mit einem vor demselben angebrachten Winkelspiegel W, welcher die Hälfte des Objectives deckt und die Lichtstrahlen um einen Winkel, der nahe $= 90^0$ ist, ablenkt; an der Aussenseite des Fernrohres befinden sich zwei Ringe R, mit welchen es in die Lager L der Stative eingelegt und um seine Achse gedreht werden kann.

Im Spiegelgehäuse ist ein Diopter D angebracht, dessen Visirlinie mit der des Spiegels nahe zusammenfällt; hinter dem Objective ist eine Linse C eingeschaltet, welche den Zweck hat, die physischen Bilder der zwischen 800—1000^m entfernten Objecte und des in kleinerer Entfernung (25^m) befindlichen Zielschildchens in die Ebene des Fadenkreuzes zu bringen, wodurch der Auszug der Ocularröhre des Fernrohres entfällt und daher bloss eine Verschiebung der Ocularlinse des Huygens'schen Oculares nöthig ist; übrigens ist auch diese Verschiebung dadurch erschwert, dass über das Ocular eine mit einer Oeffnung versehene Hülse gesteckt ist, so dass also, vorausgesetzt dass das Fernrohr für normale Augen richtig gestellt ist, sich kurz- oder weitsichtige Beobachter der entsprechenden Brillen zu bedienen haben.

2. Zwei Dreifussstative I und II, welche die Lager L zum Einlegen des Fernrohres tragen. Dem Fernrohre kann eine Bewegung sowohl in horizontaler als auch in verticaler Richtung und zwar erstere auch fein durch eine Schraube und Gegenfeder ertheilt werden.

3. Der Messstab M; dieser ist entsprechend getheilt, auf seiner oberen Seite mit der Distanzscala, welche die Entfernungen zwischen 800—10000^m enthält, und seitlich mit einer groben Theilung zum unmittelbaren Ablesen mit dem Fernrohre aus 25^m Entfernung ver-

sehen und wird bei der Vornahme einer Messung in das Lager *L* des Stativs I mittelst der Messingschiene *s* eingelegt.

4. Die Compensationsvorrichtung; sie besteht aus dem mit einem Diopter versehenen Visirstabe *V* und der Messingschine *s*, welche an dem Messstabe *M* befestigt ist; *V* und *s* haben gleiche Eintheilung und im selben Sinne laufende Bezifferung, und hat der Visirstab überdies auch eine grobe Theilung, ähnlich wie der Messstab. Der Visirstab ist am Lager des Stativs II befestigt, während die Messingschiene *s* in zwei Schlitzen des Lagers von I verschiebbar ist und also so gestellt werden kann, dass ein einer Ablesung am Visirstabe entsprechender Theilstrich auf einen am Stativ I angebrachten Indexstrich *i* eingestellt werden kann.

Der Zweck dieser Vorrichtung wird aus dem Gebrauche und der Theorie des Instrumentes klar werden.

5. Das Zielschildchen *Z*; es ist auf dem Visirstabe *V* und dem Messstabe *M* verschiebbar, mit einem schmalen weissen Felde *f* behufs Einstellung mit dem Verticalfaden und mit einem Zeiger *z* zur Ablesung versehen.

Handelt es sich nun darum, mit einem justirten Instrumente eine Distanz zu messen, so ist auf folgende Weise zu verfahren (Taf. XXIII Fig. 5): Der Beobachter stellt in *A* das Stativ I auf, legt das Fernrohr in die Lager ein und visirt das Object *O* an und lässt sodann rechts vom Stativ I in der durch das Diopter *D* fixirten Richtung und in 25^m Entfernung das Stativ II vom Gehilfen aufstellen.

Zur Bestimmung des Abstandes der beiden Stative gibt Paschwitz dem Instrumente eine Schnur bei, welche zwischen zwei angebrachten Marken die Länge enthält und natürlich beim praktischen Gebrauche häufig abgeglichen werden muss; entschieden besser und die Genauigkeit vermehrend, dabei aber nicht zeitraubender ist die Benutzung eines 25^m langen Stahlbandes. Nun richtet der Gehilfe den am Stativ II angebrachten Visirstab *V* nach dem Object, hängt das Zielschildchen auf den Visirstab und verschiebt es so lange, bis der Verticalfaden des Fadenkreuzes das weisse Feld *f* halbirt, und liest den Stand des Zielschildchens mit Hilfe des Zeigers *z* auf der Scala des Visirstabes ab, z. B. 42,5.

Zur rohen Einstellung kann man sich zweckmässig der groben Theilung des Visirstabes bedienen. Dass das Fernrohr in seinen Lagern gedreht werden müsse, bis der Horizontalfaden auf den Visir-

stab sich projicirt, ist selbstverständlich — ebenso, dass man sich nach erfolgter Einstellung des Zielschildchens zu überzeugen hat, ob die Visur des Fernrohres noch das Object deckt; um hier schneller zum Ziele zu gelangen, ist es vorzuziehen, schon bei der Aufstellung des Stativs II das Fernrohr zu Hilfe zu nehmen.

Hierauf wechseln der Beobachter und der Gehilfe die Plätze. Der Gehilfe legt den Messstab so in das Lager des Stativs I ein, dass der Indexstrich i auf dieselbe Lesung wie am Visirstabe, also 42,5 zeigt; der Beobachter legt das Fernrohr in die Lager des Stativs II ein, visirt, nachdem das Fernrohr so gedreht wurde, dass der Horizontalfaden den Messstab trifft, denselben Punkt des Objectes an, auf welchen bei der ersten Visur eingestellt wurde; dann verschiebt der Gehilfe das auf den Messstab aufgehängte Zielschildchen, wobei wieder die grobe Theilung des Messstabes zur rohen Einstellung benutzt werden kann, so lange, bis der Verticalfaden des Fadenkreuzes das weisse Feld des Zielschildchens halbirt, und liest mit Hilfe des Zeigers z auf der Distanzscala S die Distanz (2495^{m}) ab.

Obgleich die Theorie des Instrumentes, auf der Absteckung eines constanten Winkels beruhend, sehr einfach ist, ist es doch nöthig, das auf die Anfertigung der Distanzscala bezügliche, sowie die Begründung der Verfahrungsweise auseinanderzusetzen.

Denkt man sich (Fig. 5) von A aus den constanten Winkel α abgesteckt und in der Richtung AB die horizontale Distanz $AB = b$ aufgetragen, dann aus dem Endpunkte B nach der Einstellung nach O wieder den Winkel α abgesteckt und den Schnittpunkt G auf einem in der Verticalebene AO zur Visirlinie AO parallel liegenden getheilten Stab, welcher in einer genau fixirten Lage, so dass irgend ein Punkt desselben (Markenpunkt) mit einem am Stativ I angebrachten Index coincidirt, sich befindet, markirt, so kann von einem Nullpunkte N aus der Abschnitt $NG = m$ abgelesen werden.

Aus der Figur ist $NG = AG + NA = a + c$ und aus den beiden Dreiecken ABO und GBA folgt:

$$a = b\,\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta} = m - c \tag{1}$$

und die schiefe Distanz $AO = D = b\,\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. (2

Da nun der constante Winkel α nicht von B aus, sondern etwa von B' aus, also nicht BG, sondern $B'G'$ abgesteckt wird, so muss

nothwendig der Stahl um das Stück $G'G = y$ verschoben werden, damit man den richtigen Abschnitt m erhält.

Um diese Verschiebung bewerkstelligen zu können, liest man den Abstand des Zeigers des Zielschildchens vom Anfangspunkte der Theilung am seitlich liegenden Visirstabe V ab; es sei diese Lesung $nE = x'$, wobei vorerst angenommen werden soll, dass der Nullpunkt der Theilung in der Richtung $B'G'$ liege.

Aus der Figur folgt: $$y = \frac{x}{\cos\varphi}.$$

Da nun für die kleinste mit dem Instrumente zu messende Distanz von 800^{m} φ nahe $= 1^{0}\,48'$ ist und $\cos 1^{0}\,48' = 0{,}9995$ so kann wohl ohne weitere Erwägung für alle Fälle $y = x$ gesetzt werden.

Weiters ist

$$x = nE + EE' = x' + d\sin(\alpha - \beta)$$
$$= x' + d\cos\beta,$$ da man genau genug $\alpha = 90^{0}$ setzen kann.

Die Verschiebung des Stabes kann nur um x' erfolgen, weil sich $d\cos\beta$, als von der Kenntniss von β abhängig, nicht ermitteln lässt; in Folge dessen ist der am Stabe abgelesene Abschnitt nicht $m = NG$, sondern $m - d\cos\beta$ oder hinreichend genau:

$$m - d\frac{b}{D}, \tag{3}$$

weil man zur Berechnung der Correction $d\cos\beta$ aus Gleichung (2)

$$D = b\,\mathrm{tg}\,\beta$$

und daraus
$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + D^2}} = \frac{b}{D}$$ setzen kann.

Nun darf aber nicht übersehen werden, dass der Stab nicht in der Verticalebene AO, sondern nur seitlich angebracht sein kann, und trifft die Visur den Stab in G'', so dass also dieser seitlichen Lage wegen der Abschnitt noch um ein Stück $G'g = d\cos\beta$ verkürzt ist; es ergibt daher schliesslich der mit Rücksicht auf die Beschaffenheit des Instrumentes abgelesene Stababschnitt:

$$M = \quad m - d\frac{b}{D} - d_1\frac{b}{D} \tag{4}$$

$$M = a + c - d\frac{b}{D} - d_1\frac{b}{D}. \tag{4'}$$

Für eine andere Entfernung D_1 werden die sich ändernden Werthe β_1, a_1, m_1, M_1 und zwar

$$M_1 = a_1 + c - d\,\frac{b}{D_1} - d_1\,\frac{b}{D_1} \tag{5}$$

$$a_1 = b\,\frac{\sin(\alpha - \beta_1)}{\sin\beta_1} \qquad D = b\,\frac{\sin\beta_1}{\sin(\alpha + \beta_1)}.$$

Um eine einfachere Beziehung zwischen Distanz und Messstabablesung aufstellen zu können, wird man die Unterschiede der Stababschnitte benutzen müssen; es wird

$$\begin{aligned} M - M_1 &= a - a_1 - db\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_1}\right) - d_1 b\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_1}\right) \\ &= a - a_1 - \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_1}\right)(db + d_1 b), \end{aligned} \tag{6}$$

oder da für die Ermittlung des 2. Gliedes der geringe Unterschied zwischen d und d_1 nicht maassgebend ist, also $d = d_1 = 33^{mm}$ gesetzt werden kann, auch

$$M - M_1 = J = (a - a_1) - 2\,db\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_1}\right) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} a - a_1 &= \frac{b\sin(\alpha - \beta)\sin\beta_1 - b\sin(\alpha - \beta_1)\sin\beta}{\sin\beta\sin\beta_1} \\ &= b\,\frac{\sin\alpha(\cos\beta\sin\beta_1 - \cos\beta_1\sin\beta)}{\sin\beta\sin\beta_1} \\ &= b\,\frac{\sin\alpha\sin(\beta_1 - \beta)}{\sin\beta\sin\beta_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_1 - D &= \frac{b\sin\beta_1\sin(\alpha + \beta) - b\sin\beta\sin(\alpha + \beta_1)}{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \beta_1)} \\ &= b\,\frac{\sin\alpha(\cos\beta\sin\beta_1 - \cos\beta_1\sin\beta)}{\sin(\alpha + \beta)\sin(a + \beta_1)} \\ &= b\,\frac{\sin\alpha\sin(\beta_1 - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \beta_1)} \end{aligned}$$

und $$\frac{a - a_1}{D_1 - D} = \frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \beta_1)}{\sin\beta\sin\beta_1} = \frac{b^2}{DD_1},$$

also schliesslich

$$a - a_1 = (D_1 - D)\,\frac{b^2}{DD_1} = b^2\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_1}\right)$$

und daher

$$M - M_1 = b^2\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_1}\right) - 2db\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{D_1}\right)(b^2 - 2db)$$

$$= \frac{b^2 - 2db}{D} - \frac{b^2 - 2db}{D_1}$$

$$M = M_1 + \frac{b^2 - 2db}{D} - \frac{b^2 - 2db}{D_1}. \tag{8}$$

Nimmt man als grösste zu messende Distanz $D_1 = 10000^{\text{m}}$ an und setzt den dieser entsprechenden Abschnitt $M_1 = 0$, so wird

$$M = \frac{b^2 - 2db}{D} - \frac{b^2 - 2db}{10000}$$

oder mit Rücksicht auf $b = 25^{\text{m}}$, $d = 33^{\text{mm}}$

$$M = \frac{623{,}35}{D} - 0{,}062335, \tag{8'}$$

wo M und D in Metern verstanden sind.

Die Distanz D selbst folgt hieraus $D = \frac{623{,}35}{M + 0{,}062335}$, wobei aber zu berücksichtigen kommt, dass der abgelesene Messstababschnitt nur dann der richtige ist, wenn für eine Distanz von 10000^{m} nach entsprechender Verschiebung der Stand des Zielschildchens am Messstabe 0 ist. Dies wird nur für eine bestimmte Lage des Messstabes der Fall sein, so dass es nöthig ist, jenen Theilstrich am Stabe (Markenpunkt) zu ermitteln, der beim Einlegen desselben mit dem Index zusammenfallen muss; dieser Punkt lässt sich nun sehr leicht mit Hilfe bekannter Entfernungen finden.

Es sei z. B. beim Abstecken des constanten Winkels am Visirstabe die Ablesung 30^{mm} gemacht und der Messstab so eingelegt worden, dass sein Nullpunkt mit dem Index coincidirt, so muss zunächst der Messstab um 30^{mm} nach vorne verschoben werden, und nun sei die Ablesung auf demselben (für die bekannte Distanz 2000^{m}) 259,82, während sie nach Gleichung (8') nur 249,34 sein sollte; also wäre nicht der Nullpunkt, sondern die Lesung 10,48 der Markenpunkt am Stabe.

Dass dieser Punkt nicht einmal, sondern wiederholt bei derselben Distanz oder bei verschiedenen bekannten Entfernungen ermittelt werden muss, ist selbstverständlich.

Um nun dem Uebelstande auszuweichen, dass der Markenpunkt mit keinem Theilstriche zusammenfällt, kann man diesen Punkt zum Nullpunkt einer zweiten, mit der Theilung des Visirstabes übereinstimmenden, im selben Sinne wie diese bezifferten Theilung machen, oder man kann, wie es bei dem Instrumente wirklich der Fall ist, einen zweiten so eingerichteten Stab (die Messingschiene) mit dem Messstabe verbinden.

Dadurch erreicht man also, dass man nur nöthig hat, den Messstab so einzulegen, dass der Index i jene Lesung an der Schiene gibt, die man am Visirstabe früher erhalten hat; ist nun der Messstab mit einer Theilung versehen, bei deren Theilstrichen die entsprechenden Entfernungen stehen, so können diese sofort abgelesen werden — wenn Messstab und Messingschiene in richtiger Weise mit einander verbunden sind.

Diese Theilung lässt sich aber, da in Gleichung (8) der constante Winkel nicht vorkommt, für alle Instrumente gleichmässig anfertigen, und zwar erhält man für

$D =$	$M =$
800^{m}	716,85^{mm}
1000	561,02
2000	249,34
3000	145,44
4000	93,50
5000	62,34
6000	41,56
7000	26,72
8000	15,58
9000	6,93
10000	0,00

Es ist daher, ausser den Berichtigungen des Fadenkreuzes, welche wie bei einem umlegbaren Nivellirfernrohre vorgenommen werden, nur nöthig, die richtige Verbindung des Messstabes mit der Messingschiene herzustellen, um das Instrument in Gebrauch nehmen zu können. Die Herstellung dieser Verbindung ist nach dem Früheren klar: es muss die Schiene so am Messstabe befestigt werden, dass der Index i dieselbe Lesung auf der Schiene gibt, die man am Visirstabe erhalten hat, wenn gleichzeitig auf der Distanzscala die bekannte Distanz abgelesen wird. Daraus geht aber auch hervor, dass die früher der leichteren Ableitung wegen gemachte Voraussetzung, der Nullpunkt

der Visirabtheilung soll in der Richtung $B'G'$ liegen, durchaus nicht erfüllt zu sein braucht.

Was die Fehlereinflüsse betrifft, so ist es zunächst ein Fehler in β, resp. a, der sich durch verschiedene Lesungen an der Distanzscala bei derselben Entfernung äussert. Dieser Fehler, der reine Distanzmessungsfehler, ist ein zufälliger, hervorgerufen durch Visur, Einstellungs- und Ablesefehler; bei dieser Betrachtung müssen natürlich grobe Fehler, etwa in der Theilung des Messstabes, ausgeschlossen bleiben.

Differenzirt man die Gleichung (2) nach D und β, so ergibt sich:

$$D = b\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$dD = b\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}d\beta$$

$$dD = b\frac{\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}db. \qquad (9$$

Die Gleichung (1) $a = b\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\beta}$ nach a und β differenzirt gibt:

$$da = -\frac{\sin\beta\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)\cos\beta}{\sin^2\beta}d\beta$$

$$da = -b\frac{\sin\alpha}{\sin^2\beta}d\beta. \qquad (10$$

Und
$$dD = -b\frac{\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+\beta)}\cdot\frac{\sin^2\beta}{b\sin\alpha}da;$$
$$= -\frac{\sin^2\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}\cdot da;$$

nachdem
$$\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{D}{b}, \text{ auch } dD = -\frac{D^2}{b^2}da, \qquad (11$$

oder aus (9), nachdem $\sin^2(\alpha+\beta) = \dfrac{b^2\sin^2\beta}{D^2}$ substituirt wurde, auch

$$dD = \frac{\sin\alpha}{b\sin^2\beta}D^2\cdot d\beta. \qquad (12$$

Aus (11) und (12) ist zu ersehen, dass der reine Distanzmessungsfehler im quadratischen Verhältnisse zur Distanz wächst, so dass also

$$f_1 = \mu D^2 \qquad (13$$

gesetzt werden kann, wobei $\mu = \pm\dfrac{da}{b^2}$

$$= \pm\frac{\sin\alpha}{b\sin^2\beta}d\beta \text{ ist.}$$

Ein zweiter Fehler wird durch den Fehler in der Basis b hervorgerufen;

aus $D = b \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$ folgt durch Differentiation nach D und b:

$$dD = \frac{\sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} db$$

$$= \frac{D}{b} db. \qquad (14$$

Aus (14) geht hervor, dass der Fehler wegen Basislänge für die Messungen derselben Länge ohne Aenderung der Aufstellung der Stative sich gleich bleibt und dass er in einfachem Verhältnisse der Distanz zunimmt, so dass

$$f_2 = \nu D, \qquad (15$$

wobei $\nu = \frac{M}{b}$ ist.

Dass beide Fehler mit Zunahme der Basis kleiner werden, ist selbstverständlich; mit Rücksicht auf die praktischen Bedürfnisse ist aber die Länge der Basis an eine Grenze gebunden, und dürfte diese mit 25^{cm} nicht zu hoch bemessen sein.

Um zur Kenntniss der beiden Fehler zu gelangen, habe ich unter meiner Leitung durch einige meiner Zuhörer 500 Messungen bekannter Längen vornehmen lassen und zwar in der Weise, dass jede Länge 10mal bestimmt wurde, so dass also im Ganzen 50 Längen (eigentlich nur 36, da einige wiederholt ermittelt wurden) nothwendig waren. Die horizontalen Projectionen der Distanzen sind durch eine sorgfältige, einer strengen Ausgleichung unterzogene Triangulirung bekannt und mit Hilfe der ermittelten Höhen- resp. Tiefenwinkel in die zur Vergleichung mit den Telemeterresultaten nöthigen schiefen Distanzen übergeführt worden.

Um aus den Ergebnissen der Untersuchung für die Praxis richtige Schlüsse zu ziehen, ist bei allen Witterungsverhältnissen (namentlich starken Winden) beobachtet, und ist die Messschnur übereinstimmend mit dem wahrscheinlichen praktischen Vorgange nur selten abgeglichen worden.

Die nachstehende Tabelle gibt eine Zusammenstellung der Messungsresultate und der berechneten Fehler; für die sub 1 bis incl. 10 angeführten Messungen kam zum Auftragen der Basis das Stahlband in Verwendung, während die Resultate 11 bis incl. 50 auf gewöhnliche Weise mit Benutzung der Schnur erhalten wurden.

	E trig. bestimmte Entfernung	D Mittel der 10 Messungen m. d. Distanzm.	$E-D=c$	$\pm m$	c^2	m^2
1	830,1	829,4	+ 0,7	2,0	0,49	4,05
2	1214,2	1214,3	− 0,1	4,6	0,01	20,78
3	1224,1	1220,1	+ 4,0	2,7	16,00	7,22
4	1528,7	1522,2	+ 6,5	6,2	42,25	38,89
5	2055,1	2032,1	+ 23,0	12,5	529,00	156,11
6	2547,9	2528,2	+ 19,7	11,8	188,09	139,33
7	4712,8	4704,0	+ 8,8	28,9	77,44	832,22
8	4870,1	4856	+ 14,1	17,9	198,81	321,11
9	7737,0	7709	+ 28,0	118,0	784,00	13928,89
10	7828,7	7839	− 10,3	86,9	106,09	7551,11
11	830,1	824,4	+ 5,7	2,1	32,49	4,49
12	853,3	851,2	+ 2,1	3,9	4,41	15,55
13	1200,6	1196,4	+ 4,2	6,9	17,64	47,16
14	1214,2	1206,1	+ 8,1	9,7	65,61	93,22
15	1224,1	1235,1	− 11,0	6,6	121,00	44,33
16	1327,6	1324,0	+ 3,6	4,6	12,96	21,11
17	1343,6	1342,9	+ 0,7	5,6	0,49	31,55
18	1387,1	1379,3	+ 7,8	3,3	60,84	11,12
19	1398,0	1396,9	+ 1,1	6,1	1,21	36,99
20	1414,6	1393,9	+ 21,2	8,9	449,44	80,89
21	1434,5	1427,6	+ 6,9	4,4	47,61	19,14
22	1448,7	1449,2	− 0,5	4,6	0,25	21,51
23	1483,5	1472,3	+ 11,2	5,7	125,44	32,90
24	1522,3	1514,8	+ 7,5	6,6	56,25	43,73
25	1528,7	1530,9	− 2,2	7,0	4,84	49,21
26	1844,5	1865,1	− 20,6	7,4	424,36	107,88
27	1933,6	1918,5	+ 15,1	7,7	228,01	59,38
28	2055,1	2050,7	+ 4,4	13,1	19,36	172,68
29	2081,9	2105,9	− 24,0	12,0	576,00	143,43
30	2081,9	2112,0	− 30,1	13,1	906,01	170,22
31	2162,0	2120,8	+ 41,2	10,5	1697,44	110,40
32	2202,7	2187,1	+ 15,6	7,4	243,36	55,21
33	2219,9	2198,0	+ 21,9	6,7	479,61	45,55
34	2230,8	2271,7	− 40,9	13,3	1672,81	177,57
35	2230,8	2278,0	− 47,2	10,7	2227,84	115,33
36	2306,3	2282,6	+ 23,7	10,4	571,21	108,04
37	2547,9	2543,6	+ 4,3	13,1	18,49	172,27
38	2973,2	2925,6	+ 47,6	21,0	2265,76	441,37
39	2976,1	2953,0	+ 23,1	24,6	533,61	608,88
40	3337,2	3311,5	+ 25,7	37,1	660,49	1380,27
41	3459,0	3431,0	+ 28,0	28,2	784,00	793,30
42	4240,2	4213,0	+ 27,2	26,7	739,84	711,11
43	4712,8	4661,0	+ 51,8	55,2	2683,24	3045,55

	E trig. bestimmte Entfernung	D Mittel der 10 Messungen m. d. Distanzm.	$E-D=c$	$\pm m$	c^2	m^2
44	4712,8	4678,0	+ 34,8	60,0	1211,04	3601,11
45	4870,1	4836,0	+ 39,1	28,9	1528,81	832,22
46	4870,1	4821,0	+ 49,1	34,4	2410,81	1182,22
47	7114,3	7206,0	— 91,7	153,5	8408,89	23561,11
48	7215,8	7245,0	— 29,2	97,0	852,64	9401,11
49	7737,0	7726,0	+ 11,0	71,4	121,00	5094,44
50	7828,7	7880,0	— 51,3	94,1	2631,19	8854,45

Da der Fehler wegen Basis bei jeder der 10 für eine Länge abgeführten Messungen derselbe ist und somit auch im arithmetischen Mittel vorkommt, so kann er gebildet werden aus $E-D=c$, wobei E die trigonometrisch bestimmte Distanz und D das Mittel der 10 Messungsresultate bedeutet.

Der mittlere zufällige Fehler einer Messung ist durch die Gleichung

$$m=\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

gegeben, wobei v die Abweichungen der einzelnen Resultate vom arithmetischen Mittel und n die Anzahl der in das Mittel vereinigten Messungen (10) bedeutet.

Um μ und ν zu ermitteln, hat man zu berücksichtigen, dass

$$[m^2]=\mu^2\,[D^4]$$

und

$$[c^2]=\nu^2\,[D^2]$$

ist, so dass

$$\mu^2=\frac{[m^2]}{[D^4]} \tag{16}$$

und

$$\nu^2=\frac{[c^2]}{[D^2]} \tag{17}$$

berechnet werden kann.

Zur Bestimmung von μ sind alle 50 Werthe für m^2 zu vereinigen, hinsichtlich ν müssen die Resultate 1 bis 10 und 11 bis 50 für sich behandelt werden.

Die Rechnung liefert für μ den Werth 0,000001874, und somit wird der mittlere Distanzmessungsfehler

$$f_1=0{,}000001874\,D^2, \tag{18}$$

was einem mittleren Fehler in β von $d\beta=9{,}7''$ und in a von $da=1{,}17^{\text{mm}}$

entspricht.

In Procenten ausgedrückt ergibt sich der reine Distanzmessungsfehler

$$p_1 = 0{,}0001874\,D. \qquad (18'$$

Tabelle der reinen Distanzmessungsfehler:

$D =$	$f_1 =$	$p_1 =$
1000	1,9	0,19%
2000	7,5	0,37
3000	16,9	0,56
4000	30,0	0,75
5000	46,8	0,94
6000	67,5	1,12
7000	91,8	1,31
8000	119,9	1,50
9000	151,8	1,69
10000	187,4	1,87

Die 100 Messungen, bei welchen die Basis mit dem Stahlbande aufgetragen wurde, liefern

$$\nu = 0{,}00326, \text{ also}$$

$$\left.\begin{aligned} f_2 &= 0{,}00326\,D \text{ (in Metern) oder} \\ \text{in Procenten } p_2 &= 0{,}326, \end{aligned}\right\} \qquad (19$$

was nach $db = \nu b$ einem mittleren Fehler in der Absteckung der Basis von 8,1 cm gleichkommt.

Aus den übrigen Resultaten 11 bis incl. 50 erhält man für ν den Werth 0,00877, damit einen mittleren Fehler in der Absteckung der Basis von 21,9 cm und

$$\left.\begin{aligned} f_2 &= 0{,}00877\,D \text{ (in Metern) oder} \\ \text{in Procenten } p_2 &= 0{,}877. \end{aligned}\right\} \qquad (19'$$

Aus (19) und (19') geht hervor, wie bedeutend der Einfluss der aufgetragenen Basis auf die Distanzmessung ist; die Fehler von 8,1 cm bzw. 21,9 cm sind wohl nicht reine Basismessungsfehler, in ihnen sind auch die Fehler in der Aufstellung des Stativs II und etwaige constante Fehlereinflüsse enthalten.

Namentlich ist es Gleichung (19'), welche entschieden fordert, dass die Messschnur verlassen werden soll; denn bei allen Entfernungen unter 4696 m ist der Einfluss des Fehlers der Basis grösser als der reine Distanzmessungsfehler, und solche Entfernungen sind es gerade, welche in der Artillerie eine Rolle spielen.



Für grössere Entfernungen tritt der Fehler wegen der Basis allmählich in den Hintergrund, was deutlich zu ersehen ist, wenn man den mittleren Gesammtfehler

$$F^m = \sqrt{\mu^2 D^4 + \nu^2 D^2} \text{ oder}$$

$$\text{in Procenten } P = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$$

für die Distanzen 1000 bis 10000^m rechnet.

Tabelle der mittleren Gesammtfehler,

a) wenn die Basis mit dem Stahlbande aufgetragen wird:

D	F	P
$D = 1000^m$	$F = 4^m$	$P = 0{,}4\%$
2000	10	0,5
3000	20	0,7
4000	33	0,8
5000	50	1,0
6000	71	1,2
7000	96	1,4
8000	125	1,6
9000	157	1,7
10000	193	1,9

b) wenn die Basis mit der Messschnur aufgetragen wird:

D	F	P
$D = 1000^m$	$F = 9^m$	$P = 0{,}9\%$
2000	19	1,0
3000	32	1,1
4000	47	1,2
5000	65	1,3
6000	86	1,4
7000	112	1,6
8000	141	1,8
9000	174	1,9
10000	209	2,1

Vergleicht man die Leistungsfähigkeit des beschriebenen Telemeters mit jener der vorhin genannten Distanzmesser mit der Basis am Instrumente, so ergibt sich Folgendes:

Der Distanzmesser von Roszkiewicz mit einer Basis von 1,5^m liefert die Distanzen mit einem mittleren Fehler von

$$0{,}000772\,D \text{ (in Procenten).}$$

Dieser Werth enthält bloss den reinen Distanzmessungsfehler und ist aus 60 bei reiner und ruhiger Atmosphäre angestellten Messungen abgeleitet worden.

Von dem Distanzmesser von Berdan, in zwei Constructionen ausgeführt mit 2^m und 4^m Basis, sind ausführlichere Untersuchungen über seine Genauigkeit nicht bekannt; nimmt man aber an, dass die Einrichtung desselben eben so vorzüglich ist wie jene des Distanzmessers von Roszkiewicz, so ergeben sich die mittleren Fehler:

bei einer Basis von 2^m $0{,}000515\,D$ (in Procenten)
" " " " 4^m $0{,}000258\,D$ " "

Erwägt man nun, dass der Telemeter Paschwitz den beiden genannten Distanzmessern, unter den bis jetzt angeführten die besten ihrer Art, an Genauigkeit nicht nachsteht, dass das Gewicht eines vollständigen Instrumentes circa 12^{kgr} beträgt, so wird es gewiss gerechtfertigt sein, zu behaupten, dass derselbe den an ihn gestellten Anforderungen vollständig entspricht und trotz des Umstandes, dass er eine Basisabsteckung fordert, mit Rücksicht auf seine einfache Handhabung und auf den geringen Zeitaufwand, den eine Messung beansprucht (circa $3^1/_2$ Min.), ein Instrument ist, dessen Einführung in die artilleristische Praxis vollberechtigt ist.

Ein Drehungs- und Trägheitsmomenten-Apparat.

Von

Alois Höfler,

suppl. Lehrer der Physik, Mathematik und Philosophie am Mariahilfer-Gymnasium in Wien.

Bekanntlich wird durch die Fundamentalformel der Dynamik: $\gamma = \frac{k}{m}$ die (lineare) Beschleunigung γ der Bewegung bestimmt, welche eine Masse m von Seiten der Kraft k erhält; und diese Formel hat ein Gegenstück an der für die Winkelbeschleunigung ξ, welche eine Masse m mit dem Abstande r von der Drehungsachse durch eine Kraft k mit dem Abstande a von derselben Achse erhält: sie lautet

$$\xi = \frac{ka}{mr^2}\ ^{1)}$$

Sowie nun in $\gamma = \frac{k}{m}$ die Grösse k im Zähler das der Beschleunigung Förderliche, dagegen m das dieselbe Hemmende, das Träge

---

1) Ist nämlich in nebenstehender Figur AX die Rotationsachse, so ergeben sich sofort die drei Gleichungen:

$\xi = \frac{\gamma}{r}$, wo ξ die Winkelbeschleunigung, d. i. die Beschleunigung eines Punktes im Abstande 1, γ die wirkliche Beschleunigung von m, also eines Punktes im Abstande r von AX bedeutet;

$\gamma = \frac{k'}{m}$, wo k' die Kraft ist, welche, im entgegengesetzten Sinne bei m selbst an dem Systeme wirkend $(-k')$, der Kraft k das Gleichgewicht hielte; sie ist somit ferner nach dem Hebelgesetze gegeben durch

$k' = \frac{ka}{r}$. — Aus diesen drei Gleichungen folgt durch Elimination von γ und k' der obige Werth von ξ.

A, X, r, a, k, m, $-k'$, $+k'$

Die allgemeine Formel $\xi = \frac{\Sigma ka}{\Sigma mr^2} = \frac{\Sigma D}{\Sigma T}$ ist dann gleichfalls in der bekannten Weise leicht zu entwickeln.

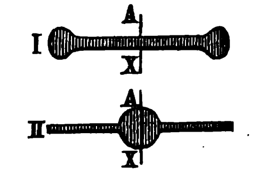
ist, so ist auch in $\xi = \frac{ka}{mr^2}$ das Product ka das der Winkelbeschleunigung des Systemes Förderliche, das „Drehungsmoment“ der bewegenden Kraft, dagegen das Product mr^2 wieder das entgegen der Drehung sich träge verhaltende, das „Trägheitsmoment“ der zu bewegenden Masse.

Bei der fundamentalen Wichtigkeit der beiden Formeln $\gamma = \frac{k}{m}$ und $\xi = \frac{ka}{mr^2}$ ist es nun unerlässlich, dass die Grössen, deren gegenseitige Abhängigkeit durch diese Formeln ausgedrückt ist, dem Lernenden anschaulich gemacht werden, was sich nur dadurch erreichen lässt, dass ihm möglichst einfache, typische Fälle der Giltigkeit jener Gesetze auch im wirklichen Versuche vorgeführt werden.

Zur Bestätigung (resp. zur experimentellen Ableitung) jener ersteren der beiden analogen Formeln, nämlich $\gamma = \frac{k}{m}$, dient nun die Atwood'sche Fallmaschine, welche darum mit Recht in keinem physikalischen Cabinete fehlt. — Für die zweite Formel, $\xi = \frac{ka}{mr^2}$, sind, soviel mir bekannt ist, Schulapparate weit weniger allgemein gebräuchlich, wiewohl die Begriffe des Drehungs- und namentlich des Trägheitsmomentes einer ausdrücklichen Veranschaulichung, falls sich der Lernende unter ihnen soll etwas vorstellen können[1]), noch viel mehr bedürfen als die ungleich einfacheren und einleuchtenderen Sätze, dass die grössere Kraft bei gleicher Masse grössere lineare Beschleunigung hervorrufe etc.

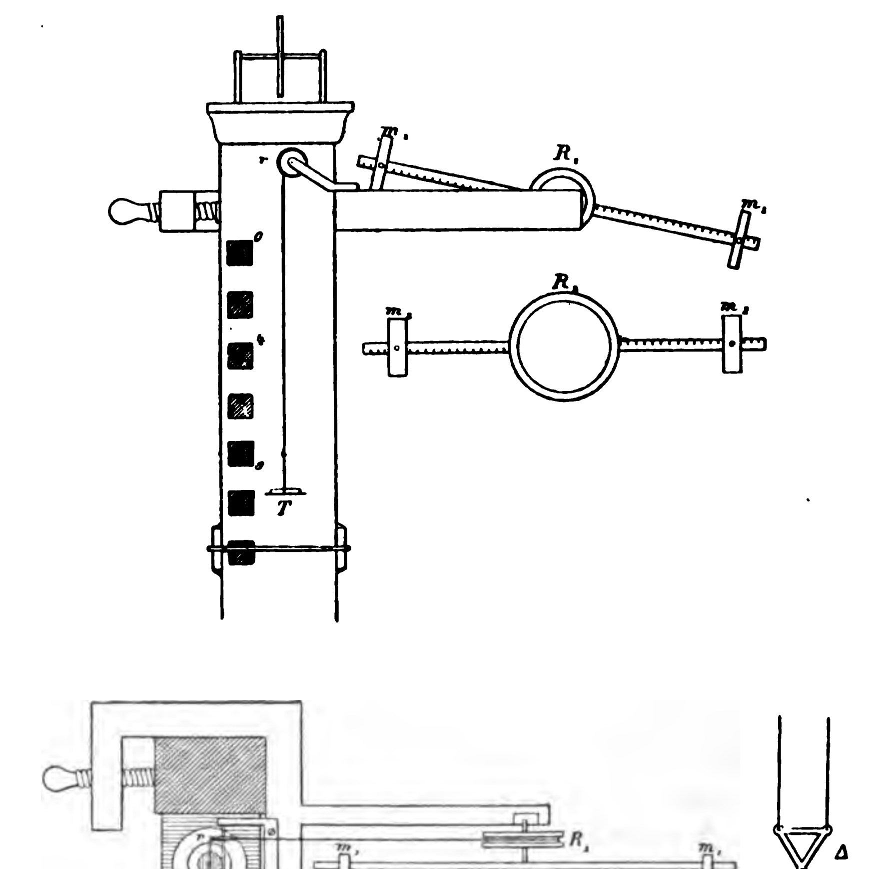
Diese Rücksichten mögen es rechtfertigen, dass ich im Folgenden einen sehr einfachen Apparat beschreibe, der ausschliesslich (von einer am Schlusse dieser Mittheilung zu erwähnenden Demonstration bezüglich der Erhaltung der Kraft abgesehen) die Bestätigung (resp.

1) Es ist mir in der That mehrere Male begegnet, dass Schüler, welche schon ganz wohl wussten, dass „das Trägheitsmoment $= \Sigma mr^2$ sei“, die Frage: „Wann lässt sich eine Masse von z. B. 100 Kilogramm leichter um die Achse AX drehen, wenn sie zu einer Stange von der Form I oder II verarbeitet ist?“ entweder gar nicht oder nur durch mühsames Nachdenken, dem offenbar die Unterstützung durch die lebendige Anschauung fehlte, zu beantworten wussten.



die experimentelle Ableitung) der zweiten Formel $\xi = \frac{ka}{mr^2}$ zum Zwecke hat und zwar so, dass dabei auch schon äusserlich die **Analogie** zwischen den Gesetzen der linearen und der Winkelbeschleunigung dem Schüler möglichst augenfällig gemacht wird.

Die in Rotation zu setzenden Körper (siehe die folgende Figur) sind



zwei sehr leichte hölzerne Stäbe von 7 Zoll Länge und mit Zolleintheilung, durch die je eine stählerne Achse geht; die eine dieser Achsen trägt ein Paar[1]) sehr leichte hölzerne Röhren R_1 R_1 mit 1 Zoll Halbmesser,

1) Es wurden zwei Rollen, nicht nur eine genommen, um einen einseitigen Druck auf die Zapfenlager zu vermeiden.

die andere Rollen $R_2 R_2$ mit 2 Zoll Halbmesser. Stab, Achse und Rollen stehen in fester Verbindung; sie bilden das Gestell für zwei an den Stäben verschiebbare und durch Schrauben festzsutellende Paare von Gewichten $m_1 m_1$ und $m_2 m_2$, von denen m_1 930 Gran und m_2 2×930 Gran wiegt. (Es ist also, wenn als Längeneinheit 1 Zoll, als Krafteinheit 1 Gran angenommen wird, $m_1 = \frac{5}{2}$ Masseneinheiten, da die Beschleunigung durch die Schwere $= 31 \times 12$ Zoll und somit $m_1 = \frac{p}{g} = \frac{930}{31 \times 12} = \frac{5}{2}$; ferner ist $m_2 = 5$.) Die Achsen laufen in Lagern, die in einer hölzernen Gabel angebracht sind, welche mittelst einer direct mit ihr verbundenen Schraubenzwinge an die Säule der Atwood'schen Fallmaschine angeschraubt werden kann. — Die Rotation wird bewirkt durch die einzige uns zur Verfügung stehende constante Kraft, die Schwere. Um die Rollen sind nämlich Fäden gewickelt, die über ein Paar kleiner Röllchen rr laufen, welche ersteren durch das aus dünnem, aber festem Drahte hergestellte Dreieck Δ an einander gehalten werden und den gleichfalls sehr leichten Träger T tragen, welcher, wie bei der Atwood'schen Fallmaschine, die Zuleggewichte aufzunehmen bestimmt ist.

Die mit diesem Apparate anzustellenden Versuche sind nun folgende:

Zuerst bedient man sich des Stabes, der die Rollen $R_1 R_1$ (Halbmesser $a = 1''$) trägt. — Da nun in der Mechanik unter Winkelgeschwindigkeit resp. Winkelbeschleunigung die lineare Geschwindigkeit resp. lineare Beschleunigung verstanden wird, welche ein Punkt mit dem Abstande 1 von der Drehungsachse besitzt, so wird die Geschwindigkeit, resp. Beschleunigung, mit der sich der Faden von den Rollen $R_1 R_1$ abwickelt, und somit auch die Geschwindigkeit resp. Beschleunigung des Trägers T unmittelbar die Winkelgeschwindigkeit resp. Beschleunigung unseres rotirenden Systemes angeben. — Man kann deshalb durch dieselbe Verwendung des durchbrochenen und des nicht durchbrochenen Tischchens der Fallmaschine, durch welche man in bekannter Weise die verschiedenen Sätze über constant beschleunigte progressive Bewegungen nachweist, auch nachweisen, dass die durch eine constante Kraft erzeugte Winkelbeschleunigung

constant sei, dass nach dem Aufhören der Kraft die Winkelgeschwindigkeit constant wird etc.

Um die drei Umstände, welche diese Constanz der Winkelbeschleunigung zu stören und die Wirkung der bewegenden Gewichte zu beeinflussen vermöchten, nämlich a) die Reibung der Achsen von R_1 R_1 und rr, b) das Trägheitsmoment der Röllchen r r und c) das Gewicht der sich successive abwickelnden Fäden möglichst unschädlich zu machen, wurden die Fäden (feine Seidenschnüre) so gewählt, dass sie, solange an dem Gestell keine Massen und an den Fäden kein Träger und auch keine anderen Gewichte angebracht sind, eine dem Gestelle und den Röllchen durch einen Anstoss ertheilte Rotation bei durchschnittlich gleichförmiger Rotationsgeschwindigkeit erhalten, wobei die Fäden über die Röllchen gelegt sind und durch ihr Gewicht eben die Reibung zu überwinden haben. — Ferner bemerken wir hier, dass, wenn bei noch immer leerem Gestell der Träger T an die Fäden gehängt wird, er durch sein Gewicht (29 Gran) dem Gestell und den Röllchen eine Winkelbeschleunigung $\xi = 2$ Zoll ertheilt, indem die 64 Zoll der Fallmaschine in 8 Secunden zurückgelegt werden. Diese Wahl des Verhältnisses zwischen dem Gewicht des leeren Trägers und dem Trägheitsmoment des leeren Gestelles schien mir am zweckmässigsten, um bei den sofort zu beschreibenden eigentlichen Versuchen den Einfluss der beiden genannten Grössen von der eigentlich festzustellenden Beziehung zwischen dem Drehungsmoment der Zuleggewichte und dem Trägheitsmoment der Massen m_1 m_1 und m_2 m_2 zu isoliren.

Um jetzt, nachdem bereits im Allgemeinen bewiesen ist, dass überhaupt die durch eine constante Kraft erzielte Winkelbeschleunigung ξ constant sei, die Art der Abhängigkeit des ξ von jeder der vier Grössen k, a, m, r zu demonstriren, geht man folgendermassen vor:

I. Zu beweisen, dass $\xi_1 : \xi_2 = k_1 : k_2$.

a) Bringt man auf dem Träger ein Gewicht von $k = 180$ Gran an und befestigt die Massen m_2 m_2 (zu je 1860 Gran, also zusammen 10 Masseneinheiten) in je einem Abstande $r = 3$ Zoll von der Drehungsachse, so zeigt der Versuch, dass der Träger sammt den Gewichten 8 Secunden zum Durchlaufen der 64 Zoll braucht: er ist nach der ersten Secunde bei 1″, nach der zweiten bei 4″ etc., nach der vierten

bei 16″ etc.; ξ ist also gleich 2 Zoll per Secunde[1]). — Nachdem, wie bemerkt, der unbelastete Träger dem unbelasteten Gestell auch ein $\xi = 2$ ertheilt, so muss das Gewicht von 180 Gran für sich den Massen 10 für sich auch rein die Winkelbeschleunigung $\xi = 2$ ertheilt haben $\left(\text{nach dem Satze } \frac{m}{n} = \frac{p}{q} = \frac{m+p}{n+q}\right)$. Wenn wir sagten, man befestigt die Massen $m_1 m_2$ im Abstande 3 Zoll von der Achse, so ist das, mit Rücksicht darauf, dass die Massen keine Punkte, sondern Parallelopipede von den Dimensionen 6, 8 und 31 Linien sind (über die Richtung der längsten Dimension siehe die Figur auf Seite 704), so zu verstehen, dass die der Achse abgekehrte Fläche von ihr 3 Zoll absteht; denn die Endtheile der parallelopipedischen Massen haben ja ohnedies einen grösseren Abstand als die mittleren, so dass also bei dieser Einstellung als durchschnittlicher Abstand jedes m von der Achse die genannten 3 Zoll angesehen werden können.

b) Aendert man nun das Gewicht k, indem man z. B. $k = 360$ Gran nimmt, so werden in 4 Secunden jetzt schon 32″ durchlaufen, während früher in derselben Zeit, wie gesagt, nur 16″ zurückgelegt wurden; ξ ist also jetzt $= 4$ Zoll per Secunde.

Durch Vergleichung der Versuche a) und b) ist die Relation $\xi_1 : \xi_2 = k_1 : k_2$ bewiesen. Bei $k = 90$ Gran würde ξ (näherungsweise) 1 Zoll, und so liesse sich die genannte Proportion auch noch sowohl durch grössere wie durch kleinere Zuleggewichte k bestätigen; indess sind jetzt, wo eben ξ nicht mehr $= 2$ Zoll ist, zweckmässige Gewichte k anzuwenden, die grösser sind als die ursprünglichen 180 Gran, da

1) Die beschriebenen Versuche wurden von mir wirklich angestellt und die oben angeführten Zahlen, übereinstimmend mit der Theorie, hiebei gefunden, was die Präcision des Apparates bestätigt; ich theile die bei den Versuchen vorkommenden Zahlen und die Reihenfolge und Auswahl der Versuche etwas ausführlicher mit, weil sie für die praktische Verwendung des Apparates keineswegs gleichgiltig sind; namentlich ist Rücksicht genommen 1) auf Einfachheit und Uebersichtlichkeit der zur Auswerthung von ξ jedesmal erforderlichen numerischen Rechnung, 2) dass die Rotationsgeschwindigkeit weder zu gross noch zu klein sei, damit der Apparat nicht Schaden leide und der Einfluss der Fehler möglichst gering werde, 3) auf die möglichste Zeitersparniss und einige andere kleine praktische Vortheile bei Anstellung der Versuche. — Was die Ableitung von ξ aus den an der Fallmaschine beobachteten Grössen, der Zeit und der Fallhöhe anbelangt, so geschieht sie selbstverständlich aus der kinematischen (nicht dynamischen) Formel: $s = \frac{\xi t^2}{2}$, so dass uns zur Bestimmung des Verhältnisses zweier ξ die Proportionen $\xi_1 : \xi_2 = s_1 : s_2$ oder $\xi_1 : \xi_2 = \frac{1}{t_1^2} : \frac{1}{t_2^2}$ zur Verfügung stehen.

ja jetzt das Gewicht des Trägers und das Trägheitsmoment des Gestelles sich nicht mehr rein compensiren, wobei aber der Fehler bei grösseren Gewichten unbedeutend ist, da T nur, wie gesagt, 29 Gran wiegt.

II. Zu beweisen, dass $\xi_1 : \xi_2 = \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2}$.

Es ist zweckmässig, gleich nach I. den Versuch zum Beweise dieser Relation vorzunehmen, da man dasselbe Gestell und dieselben Massen beibehalten kann und nur diese Massen jetzt in den Abstand $r = 6$ Zoll von der Drehungsachse zu bringen hat, während bei den früheren Versuchen I. a) und b) $r = 3$ Zoll gewesen war. — Wenn man nun wieder, wie bei I. a), als k 180 Gran nimmt, so zeigt der Versuch, dass jetzt die Winkelbeschleunigung viermal kleiner als bei I.a) wird, nämlich $\xi = \frac{1}{2}$ Zoll per Secunde, indem zum Durchlaufen der 64 Zoll nicht mehr 8, sondern 16 Secunden nothwendig sind. — Will man umgekehrt, dass trotz der Verdopplung von r (von 3″ auf 6″) die Winkelbeschleunigung und somit auch die zum Zurücklegen der 64 Zoll nöthige Zeit dieselbe (8 Sec.) bleiben soll, so hat man das Zulegegewicht k zu vervierfachen, d. i. gleich 180×4 Gran zu nehmen. — Bei dieser letzteren Art, die obige Proportion II. zu bestätigen, wird auch wieder der Fehler, der sonst durch das Gewicht des Trägers und das Trägheitsmoment des Gestelles und der Röllchen entsteht, wie beim Versuche I. a), vollkommen beseitigt.

Durch diese Versuche ist festgestellt, dass bei derselben Kraft, demselben Kraftarm und derselben Masse die Winkelbeschleunigung dem Quadrat der Massenabstände proportional ist, resp. dass die Winkelbeschleunigung bei weiter entfernten, sonst aber gleichen Massen erst dann wieder die alte wird, wenn die Kraft mit dem Quadrate des Abstandes grösser genommen wird. — Da dieses Gesetz, wie eingangs erwähnt, das paradoxeste der vier auf die Winkelbeschleunigung bezüglichen ist, so ist auf diesen Versuch (in seinen beiden genannten Formen) beim Unterrichte das meiste Gewicht zu legen; auch wurde ich eben durch den Wunsch, diese dem Anfänger am meisten unerwartete Eigenschaft der „Trägheitsmomente“ ad oculos zu demonstriren, überhaupt ursprünglich zur Construction meines Apparates veranlasst.

III. Zu beweisen, dass $\xi_1 : \xi_2 = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2}$.

Man vertauscht zum Behufe dieses Beweises einfach die bisher benutzten Massen m_2 (zusammen, wie gesagt, 10 Masseneinheiten) mit

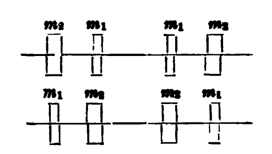
den Massen m_1 (zusammen 5 Masseneinheiten), unter Beibehaltung des Abstandes r von der Drehungsachse. Obige Proportion lässt sich dann wieder in doppelter Form bestätigen, entweder, indem man auch das Zulegegewicht k beibehält, wobei dann ξ doppelt so gross wird als früher, oder indem man durch Auflegen des halben k das frühere ξ erhält.

IV. Zu beweisen, dass $\xi_1 : \xi_2 = a_1 : a_2$.

Während bei den Versuchen I., II., III. die Rollen R_1 (Halbmesser $a = 1$ Zoll gleich der angenommenen Längeneinheit) verwendet worden waren, bedient man sich jetzt des Gestelles mit den Rollen R_2 ($a = 2$ Zoll). Man findet nunmehr, dass bei gleichgewähltem k, m, r die Winkelbeschleunigung ξ die doppelte wird. Jedoch ist zu bemerken, dass thatsächlich jetzt der Träger (den wir früher immer gewissermassen als Zeiger an der Scala der Fallräume verwendet hatten), nicht doppelt, sondern viermal so schnell als früher fällt, also auch der Faden sich viermal so schnell abwickelt. Dennoch ist die Winkelbeschleunigung nicht viermal, sondern nur zweimal so gross anzunehmen als bei den Rollen mit dem Radius $a = 1$, denn jetzt ist eben die Geschwindigkeit resp. Beschleunigung des Trägers nicht mehr das einfache, sondern das doppelte Maass der Winkelgeschwindigkeit resp. Winkelbeschleunigung des Systemes, weil sich ja der Faden nicht von einem Kreise mit dem Radius 1, sondern mit dem Radius 2 abwickelt. — Gerade die erwähnte Thatsache kann wieder lehrreich sein bezüglich des klaren Verständnisses der Definition, gemäss welcher eben die Begriffe der Winkelgeschwindigkeit resp. Winkelbeschleunigung von der Bewegung im Kreise mit dem Radius 1 hergenommen werden.

Ausser zu diesen Fundamentalversuchen I.—IV. lässt sich der Apparat auch verwenden, um durch Beispiele einfachster Art auf die Berechnung von Trägheitsmomenten verschiedener Körper — ein Capitel, welches von Anfängern häufig ziemlich schwer verstanden wird — vorzubereiten, sowie überhaupt zum Beweise des allgemeinen Satzes, dass das Trägheitsmoment einer Summe von Massen gleich ist der Summe der Trägheitsmomente. Derartige Beispiele wären: Das Trägheitsmoment zweier Massen zu berechnen, von denen die eine $m = 10$ einen Abstand $r = 3$, die andere $m = 5$ einen Abstand $r = 6$ von der Achse hat (hiebei springt unmittelbar der innere Zusammenhang der in Rede stehenden Theorie mit der des Hebels in die

Augen); oder: Wie verhalten sich die Trägheitsmomente zu einander, wenn einmal die beiden Massen m_1 je einen Abstand 3, die m_2 einen Abstand 6 haben, und ein anderes Mal die Stellungen vertauscht sind (siehe nebenstehende Figur) und dergl. m. — Die gewonnenen Resultate sind dann durch Prüfung der bei den verschiedenen Anordnungen der Massen resultirenden Winkelbeschleunigungen experimentell zu bestätigen.



Schliesslich erlaube ich mir noch eine von den bisher beschriebenen Verwendungen des Apparates ganz unabhängige mitzutheilen: sie betrifft die **Demonstration des Gesetzes der Erhaltung der Energie.** — Wickelt man die Fäden auf die Rolle ganz auf, so hat man durch das Heben des auf dem Träger befindlichen Gewichtes Arbeit geleistet, das Gewicht besitzt jetzt „Energie der Lage“. Ueberlässt man nun den Apparat ganz sich selbst, so beginnt folgendes Spiel: Das Gewicht fällt und die Massen an dem Gestell erhalten kinetische Energie (lebendige Kraft der Rotation). Haben sich die Fäden ganz abgewickelt, so dreht sich das System weiter, wickelt also die Fäden wieder auf und hebt somit das Gewicht, wobei die Rotationsgeschwindigkeit immer abnimmt, indem sich die kinetische Energie wieder in Energie der Lage (des Gewichtes) verwandelt, u. s. w. In Folge der Reibung, des Luftwiderstandes und weil sich ein Theil der lebendigen Kraft fortwährend in die Form von pendelnden Schwingungen der Fäden begibt, bleibt das Gewicht bei jedem späteren Heben um einige Zoll (im Anfang mehr, später weniger) hinter der früher erreichten Höhe zurück; gleichwohl dauert das Spiel ohne jede Kraftzufuhr von aussen bei dem von mir benutzten Exemplar des Apparates beiläufig eine Viertelstunde fort[1]). — Namentlich weil der

1) Bei diesem Versuche bediente ich mich des Gestelles mit den kleineren Rollen (Radius $a = 1$ Zoll); es waren hiebei die grösseren Massen ($m_2 m_2$) im grössten Abstande von der Drehungsachse angebracht, um dem Systeme das grösstmögliche Quantum lebendiger Kraft mitzutheilen.

Schliesslich fühle ich mich verpflichtet mitzutheilen, dass nachdem ich das erste Exemplar des Apparates in der oben beschriebenen Form bereits hatte anfertigen lassen, ich mit der Beschreibung von Schleiermacher's „Centrifugalapparat“ (Külp, Experim.-Physik 1. Bd. Vergleiche auch Repertorium Bd. 9 S. 387) bekannt wurde. Wiewohl dieser Apparat zunächst, wie auch sein Name besagt, einem anderen Zwecke dient als der von mir angegebene, so lässt er sich doch auch zur Demonstration derselben Gesetze benutzen, wie letzterer; und auch in der Benutzung der Fallmaschine als Scala der zurückgelegten Wege stimmen beide

Lehrer Gelegenheit hat die einzelnen Theile des Vorganges mit den Bemerkungen zu begleiten: „Jetzt (beim Fallen) verwandelt sich Energie der Lage in kinetische“ — „jetzt (beim Steigen) kinetische in Energie der Lage“ etc., und weil er ferner, wenn eben wieder einmal das Gewicht die grösste Höhe erreicht hat und das System für einen Augenblick zur Ruhe gelangt ist, ohne Arbeit zu leisten die Energie der Lage beliebig lang als solche („dynamische Energie“) erhalten kann: so eignet sich in der That diese Anwendung des Apparates sehr gut zu einer unmittelbar verständlichen und das Wesen der Sache treffenden Erläuterung der genannten wichtigen Lehren auch für solche Anfänger, welche abstracteren Erörterungen jener Begriffe zu folgen unfähig wären.

überein. Indess habe ich mir erlaubt dennoch die dem Apparate von mir gegebene Form hier mitzutheilen, weil Schleiermacher's Centrifugalapparat, als ursprünglich einem anderen Zwecke dienend, für die obigen uns hauptsächlich interessirenden Versuche überflüssig complicirt und ferner auch nicht zu genaueren quantitativen Bestimmungen geeignet ist, indem die zur Uebertragung der rotirenden Bewegung dienende Rolle nach der in Külp's Buch mitgetheilten Abbildung jedenfalls ein bedeutendes Trägheitsmoment haben müsste; bei der Wahl des Achsendurchmessers ist ferner auch nicht Rücksicht genommen auf die einfache Beziehung zwischen linearer und Winkelgeschwindigkeit, welche beim Halbmesser 1 stattfindet; weiters dürfte der auf die Achse in Folge der Benutzung nur eines Fadens ausgeübte einseitige Druck der Genauigkeit nachtheilig sein. — Ein rein praktischer Umstand aber, der mich zu obiger Mittheilung bewog, ist der beträchtliche Unterschied in den Herstellungskosten des weniger compendiösen Schleiermacher'schen und meines Apparates, welche sich bei letzterem sehr niedrig stellen; sie würden aber noch vermindert werden, wenn man die Uebertragung durch die Röllchen *rr* ganz weglässt, indem man die Gabel umgekehrt anbringt. Ich führe diese auch die Genauigkeit des Apparates wesentlich erhöhende Verbesserung hier anhangsweise an, weil ich auf sie erst nach dem Bekanntwerden mit Schleiermacher's Apparat verfiel.

Der Apparat wird unter meiner Aufsicht durch den Mechaniker Herrn Joseph Eiss, Wien, Stumpergasse 10, ausgeführt; bei Bestellungen wird die genaue Zeichnung des Querschnittes und Gesimses der bereits im Besitze des betreffenden physikal. Cabinets befindlichen Fallmaschine (wegen Anbringung der Schraubenzwinge), sowie die Angabe erbeten, ob als Einheiten der Fallmaschine Zoll und Gran, oder Centimeter und Gran gewünscht werden.

Kleinere Mittheilungen.

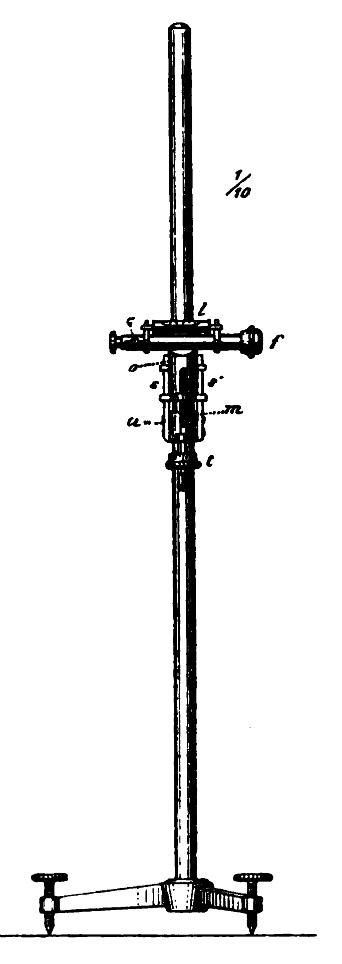
Ablesefernrohr zum Jolly-Pfaundler'schen Luftthermometer.

Von

F. Miller,

Universitätsmechaniker in Innsbruck.

In einem eisernen Dreifuss mit Stellschrauben ist eine senkrechte cylindrische Stange befestigt, auf der sich zwei Hülsen *o* und *u* verschieben. Die obere der beiden Hülsen trägt das astronomische Fernrohr von 12facher Vergrösserung, und auf diesem sitzt die Libelle.



Die nöthigen Justirschrauben für das Fernrohr sind in der Zeichnung verdeckt.

e ist ein kleiner Excenter und dient sowohl als Führung für das Zugrohr als auch hauptsächlich zur Senkrechtstellung des Fadenkreuzes. (Dieser Excenter wurde vom Oberingenieur A. Geppert angegeben, wird von mir bei allen kleineren Fernröhren verwendet und ist ebenso einfach als praktisch.)

Die untere Hülse ist mit der oberen durch zwei Schienen *s* und *s'* verbunden, und zwar sind selbe an *u* festgeschraubt und in *o* verschiebbar. Zweck derselben ist, die Mikrometerschraube *m* bei Drehung des Fernrohres um die Stange vor Seitendruck zu schützen. Die Mikrometerschraube ist mit einer in 100 Theile getheilten Trommel und diese mit einem Griffe zur rascheren Bewegung versehen.

Die Rectification wird in derselben Weise vorgenommen wie bei den Nivellirinstrumenten mit nicht umlegbaren Fernröhren.

Ueber eine neue Ablesevorrichtung.

Von

F. W. Breithaupt & Sohn.

Durch eine Aufgabe, welche uns Friedrich Krupp in Essen im Juli 1878 stellte: Kalibermesser mit einer Genauigkeitsangabe von $0{,}01^{mm}$ herzustellen, was wir mit den bekannten Trommelablesungs-Mikroskopen erreichen wollten, wurden wir durch den uns befreundeten Optiker Hensoldt, mit welchem wir wegen Anfertigung der Mikroskopobjective in Verbindung traten, auf eine neue Ablesevorrichtung aufmerksam gemacht. Die Verwendbarkeit dieser Hensoldtschen Ablesevorrichtung erschien uns nicht allein bei Längeneintheilungen die Trommelmikroskope oder Nonien mit Vortheil zu ersetzen, sondern eignet sich sehr gut zum Ablesen von Kreiseintheilungen, namentlich wenn eine Angabe von nur 10 bis 15 Secunden verlangt wird.

Die Ablesevorrichtung besteht aus zwei einfachen Mikroskopen, welche Glasmikrometer enthalten; jeder Mikrometer besteht aus 10 Strichen, welche genau gleich einem Kreistheile sind; man wird also bei einem Theilkreise, welcher von 20 zu 20 Minuten eingetheilt ist, mittelst dieser Mikrometer direct 2 Minuten ablesen und 0,2 Minuten schätzen. Diese Ablesung hat gegenüber der Nonienablesung den grossen Vorzug, frei von dem schwer zu vermeidenden Fehler der Parallaxe zu sein; und da ferner nur ein Limbustheil bei der Ablesung in Betracht kommt, so ist die Ablesung bzw. Schätzung viel schneller geschehen als bei Ablesung eines Nonius, der doch gewöhnlich aus mehr als 10 Strichen besteht und der verlangt, dass mittelst Bewegen der Lupe der Strich gesucht wird, welcher mit dem betreffenden Limbusstrich coïncidirt. Gegenüber der Ablesung mit Trommelmikroskopen (bei 5- und 6zölligen Kreisen) hat sie jedenfalls den Vortheil der grösseren Einfachheit, der erheblich billigeren Herstellungskosten, gestattet schnelleres Ablesen mit grosser Schonung der Augen und verlangt keine so sorgfältige Behandlung.

Die Eintheilung des Kreises von 20 zu 20 Minuten ist nicht bedingt, es könnte auch feinere oder weniger feine Eintheilung mit derselben Ablesevorrichtung verbunden werden; doch ist sie deshalb gewählt, weil dadurch ein Theil des Mikrometers = 2 Minuten ist und man deshalb die beiden Ablesungen an beiden Mikroskopen nur

zu addiren braucht, um die vollständige Ablesung in einfachen Minuten, Ganzen und Zehnteln, zu erhalten. Es ist dies bei zahlreichen Ablesungen ein nicht zu unterschätzender Nebenvortheil, z. B.

Grad	Minuten	Mikr. I Doppelminuten	Mikr. II	Resultat
296	30	4,7	5,1	296° 39,8′

Die Mikroskope sind viel kürzer als die bekannten Trommelmikroskope und nehmen deshalb erheblich weniger Raum in Anspruch, erfordern in Folge ihrer einfachen Form auch nicht die ängstliche Sorgfalt beim Transport des Theodoliten wie die Trommelmikroskope. Die Einstellung derselben um 180° gegen einander sowie für das Auge des Beobachters haben wir auf eine sehr einfache und bequeme Art eingerichtet; der getheilte Limbus ist bedeckt, und sind 2 Oeffnungen unter den Mikroskopen durch Glasplatten geschützt, wie wir das vor Jahren unter dem Namen der „Glasverdeckung“ eingeführt und welche Einrichtung so wesentlich zur Erhaltung des empfindlichsten Theiles der Instrumente beiträgt. Die Anordnung der Theilung und der Zahlen haben wir so getroffen, dass der Beobachter nicht allein die Gradzahlen von 0 bis 9, sondern auch die Zehnerzahlen im Mikroskop aufrecht liest, so dass also die ganze Ablesung mit einer einzigen Beobachtung an jedem Mikroskop erledigt ist.

Die ersten Geodäten Deutschlands, welche Theodolite mit dieser neuen Einrichtung gesehen, haben sich ganz übereinstimmend günstig darüber ausgesprochen. Wir erwähnen nur eine von Herrn Professor Dr. Helmert mit einem solchen Theodoliten ausgeführte Messung.

I. Beobachtung Helmert.

Messung des Winkels zwischen den 2 Verticalfäden im Fernrohr mit Ablesungen an verschiedenen Stellen des Theilkreises (mit Weglassung der Grade).

39,0′	— 36,9′	= 2,1′	Verb.: + 0,01
27,6	— 25,5	= 2,1	+ 0,01
2,8	— 0,65	= 2,15	— 0,04
14,35	— 12,35	= 2,0	+ 0,11
28,3	— 26,15	= 2,15	— 0,04
17,1	— 15,0	= 2,1	+ 0,01
42,5	— 40,4	= 2,1	+ 0,01
54,0	— 51,85	= 2,15	— 0,04
	Mittel	= 2,106	

Der mittlere Fehler also ist $\pm$ 0,05′, das ist $\pm$ 3,0″ für eine Winkelmessung.

Abgesehen vom Visurfehler ist also auch die Genauigkeit der Ablesung von einem Mikroskop hiedurch charakterisirt. Der mittlere Fehler der Ablesung eines Mikroskopes ist nämlich auch $\pm$ 3,0″ oder 0,025 Doppelminuten, d. h. $\frac{1}{40}$ des Intervalls im Mikrometer.

II. Beobachtung Klutmann und Peters.

Gegenstand ist der Winkel Lochner-Jacobi an 6 Theilkreisstellen.

An jeder 2 Messungen mit linken und rechten Fäden.

	Verb.:
40,95′	= — 0,02′
40,95	— 0,02
41,0	— 0,07
40,9	+ 0,03
40,85	+ 0,08
40,95	— 0,02
40,9	+ 0,03
40,85	+ 0,08
40,9	+ 0,03
40,95	— 0,02
41,0	— 0,07
41,0	— 0,07
40,933′	

Der mittlere Fehler ist = $\pm$ 0,054′ = $\pm$ 3,2″ für eine Winkelmessung oder eine Ablesung an einem Mikroskop.

Der maximale Fehler ist im ersten Falle 5″, im zweiten Falle auch 5″.

Herr Hensoldt hat uns die alleinige Anwendung dieser Ablesevorrichtung übertragen.

Ueber den Erfinder des negativen Oculars.

Von

J. A. C. Oudemans.

(Astronomische Nachrichten Nr. 2277.)

Bekanntlich wird die Erfindung des negativen Oculars von Einigen Christian Huygens, von Anderen Campani zugeschrieben. Indem ich in diesem Sommer einen kleinen Aufsatz über Fernröhre behufs einer neuen, von Herrn Marinelieutenant E. Simon van der Aa besorgten, Ausgabe von „Brouwer's Zeevaartkunde“ zusammenstellte, wobei ich auch, wo es vorkam, auf das Geschichtliche Rücksicht nahm,

wollte ich untersuchen, welcher von diesen beiden, Campani oder Huygens, eigentlich als der Urheber des negativen Oculars anzusehen ist. Es hat sich dabei ergeben, dass die verschiedenen Schriftsteller, indem sie versäumten, die Quellen selbst zu rathpflegen, unrichtige Vorstellungen von einander übernommen haben, so dass am Ende allerhand unwahre Legenden über das negative Ocular current geworden sind.

Christian Huygens hat sein Ocular in seiner Dioptrica beschrieben, welche erst nach seinem Tode von Fullenius und de Volder in den Opusculis posthumis, Lugd. Batav. 1703, herausgegeben ist; die 2. Edition ist von Amsterdam 1720.

Die Propositio LI dieses Werkes, worin das Doppelocular beschrieben wird, lautet so: „Quomodo, pro duabus convexis tria adhibendo amplior fiat telescopii prospectus, quo, ad sidera spectanda, utimur.“

Durch die duo convexa werden hier Objectiv und einfaches Ocular verstanden; wird nur ein Doppelocular in die Stelle gesetzt, so werden drei Gläser angewandt, und das Feld (telescopii prospectus) wird grösser.

Zu dieser Propositio gehört eine Figur, Tab. XVI Fig. 6, wo nur biconvexe Linsen gezeichnet sind, und nicht planconvexe, wie so oft behauptet wird, dass Chr. Huygens schon angewandt habe. Es heisst darüber wie folgt:

Sit ratio augmenti proposita ea quae P ad Q. Lens exterior L, focus ejus G. Et ut P ad Q, ita sit LG ad GK, cadente puncto K inter L et G. Et in K lens convexa statuatur, cujus foci distantia KV sit tripla ad KG, et divisa KV aequaliter in S statuatur ibi lens altera EF, cujus foci distantia SH fit $\frac{1}{2}\,SK$. Oculus vero sit in M, posita SM distantia 2|2 $\frac{1}{2}\,KG$. Erit factum quod quaeritur. (Das Zeichen 2|2 bedeutet =.)

Die hiezu gehörende Figur lässt sich nach dem Text leicht zeichnen. Nennt man

die Brennweite des Objectivs . . . . . F,
die Vergrösserung des Fernrohrs . . . . n,
die Brennweite der Collectivlinse . . . . f,
die Entfernung der beiden Ocularlinsen . d,
die Brennweite der Augenlinse . . . . f',
den Abstand des Ortes des Auges von der Augenlinse . . . . a,

so ist

$$f = 3\frac{F}{n} = 4f',$$

$$d = \frac{3}{2}\frac{F}{n} = 2f',$$

$$f' = \frac{3}{4}\frac{F}{n},$$

$$a = \frac{1}{2}\frac{F}{n},$$

die Brennweite des aequivalenten Oculars richtig

$$\frac{ff'}{f+f'-d} = \frac{F}{n}.$$

Von planconvexen Linsen ist in der Dioptrica von Huygens bei den Ocularen gar keine Rede, und eben so wenig von einem Ocular, wo das Verhältniss

$$f : d : f' = 3 : 2 : 1$$

ist.

Im Systema Saturnium, das im Jahre 1659 gedruckt worden ist, findet man über das Fernrohr, womit Huygens den Saturnsmond entdeckt hat, das Folgende:

„Sed antequam observationes exhibeamus, de telescopiis nostris pauca referre expediet, ... Primus quem adhibuimus duodenos pedes non excedebat[1]) duobis convexis vitris instructus, quorum id quod oculo vicinum erat, radios parallelos cogebat at trium paulo minus policum sive unicarum pedis Rhenolandici distantiam. Ea planetam novum et deteximus primum et per aliquot menses observavimus nec non formam eam Saturni quae a nemine adhuc precepta fuerat quamque postea describemus, licet non prorsus erroris expertem.“ (Planeta novus soll wohl der Satellit heissen, also sind beide noch mit einem Kepplerianischen Fernrohre von Huygens beobachtet.)

„Inde vero duplicata priori longitudine, simul duplo proprioribus sideribus facti sumus, multoque melius faciliusque phaenomena omnia adnotavimus. Et hi quidem tubi 23 pedum, e ferri bractea constructi sunt, habentque ab altera parte vitrum insertum, cujus latitudo ad quatuor pollices, sed in quo non major pateat circulus quam diametro duorum pollicum cum triente. Ab altera parte, quae nimirum oculo

1) Aus den Handschriften von Chr. Huygens hat Kaiser schon 1846 gefunden, dass die Brennweite des hier genannten Fernrohrs nicht grösser als 10 Fuss war.

admovetur, bina sunt vitra minora, $1\frac{1}{2}$ pollicem diametro aequantia, juncta invicem, quaeque hoc pacto aequipollent convexo colligenti radios parallelos ad intervallum unciarum 3 aut paulo etiam angustius. — .... Centuplem itaque fere rationem hanc in perspicillis nostris esse constat, cum Galileana non ultra trigecuplam processerint. ....“

Es erhellt hieraus, dass die Dioptrica im Jahre 1659 entweder schon geschrieben oder dass wenigstens der Verfasser schon damit beschäftigt war; die Beobachtungen, welche im Systema Saturnium beschrieben werden, fangen am 25. März 1655 an, und das 23füssige Fernrohr wurde am 19. Februar 1656 zuerst angewandt; dies kann also wahrscheinlich auch für das Datum gelten, wo Huygens zuerst sein Doppelocular benutzt hat.

Gehen wir nun zu Campani über. In seinem Biographischen Wörterbuche führt Poggendorf an:

Campani Giuseppi .... schrieb: Raggualgio di due nuove osservasioni, una celeste in ordine alla stella di Saturno, e terrestre l' altra in ordine a gl' instrumenti Roma 1664, 1665 .... Account of the improvement of optich glasses (Phil. Tr. 1665). —

In der hiesigen Bibliothek sind die italienischen Bücher überhaupt schlecht vertreten, und der Raggualgio etc. ist auch nicht da. Der genannte Jahrgang ist der erste der Phil. Transactions, und der Account, welcher laut des „Epistle dedicatory“ an die Royal Society von Oldenburg redigirt ist, ist der erste Artikel der ersten Nummer und trägt das Datum March 6, $166\frac{4}{5}$. Oldenburg hat seine Kenntniss von Campani's Leistungen nicht aus dem Original, sondern aus einem französischen Berichte bekommen und sagt darüber das Folgende:

„The first (sc. of the particulars) regardeth the excellency of the long Telescopes made by the said Campani, who pretends to have found a way to work great Optich Glasses with a Turne-tool, without any mould: And whereas hitherto it has been found by Experience, that small Glasses are in proportion better to see with, upon the Earth, then the great ones; that Author affirms, that his are equally good for the Earth, and for making Observations in the Heavens. Besides, he useth three Eye-Glasses for his great Telescopes, without finding any Iris or such Rainbow colors, as do usually appear in ordinary Glasses, and prove an impediment to Observations.“

Dies war nicht sehr geeignet die Frage zu lösen, denn von einem Ocular aus zwei Linsen kein Wort, wohl aber von einem aus drei Linsen.

Um doch über die Ansprüche des Campani Näheres zu vernehmen, gab ich mir die Freiheit, Prof. Schiaparelli zu bitten, wo möglich das ursprüngliche Werk von Campani nachzusehen. Hierauf erhielt ich die nachfolgende Antwort:

„Milan, le 9 Août 1879.

A l'égard du premier inventeur de l'oculaire dit négatif, j'ai dû différer ma réponse de quelques jours; n'ayant pu trouver dans les Bibliothèques de Milan aucun exemplaire „du Ragguaglio" de Campani, j'ai obtenu de me la faire arriver de Rome. Je trouve dans cet opuscule le trait suivant, qui me parait décider la question (p. 37):

In proposito di questi Cannocchiali di straordinaria lunghezza, mi pare di dover lodare il pensiero del Signor Christiano Hugenii (Sic) il quale nelle sue osservazioni di Saturno, stampate l'anno 1659 si servi (come ivi riferisce a carte 4) in luogo della semplice lente oculare tutta convessa, d' una lente composta di due vetri piano-convessi, a fin de sfuggire in questa maniera alcuni difetti, che nel vetro di straordinaria grossezza sono quasi inevitabili.

Voilà Campani lui-même qui déclare que l'oculaire employé par M. Huygens n'est pas de sa propre invention, mais qu'il en apprend la construction par le Systema Saturnium.

Quel était donc le but des trois verres dans les oculaires de Campani? C'était simplement d'en faire des oculaires terrestres. Je trouve dans le même livre cet autre passage (p. 23):

E questo ultimo cannocchiale palmi 55 lungo, di 4 vetri: ma con due arteficii che possono dirsi di mia invenzioni. Il primo è che etiandio con la mutazione di due altri oggettivi che ci ho fabbricati uno di palmi 52 e di 50 l'altro, senza variar la distanza dell' occhio dalla lente occulare, restano tutti e tre i cannocchiali Astronomici, togliendo solo le due lenti de mezzo." L' altro etc.

Le Ragguaglio contient encore d'important un très-beau dessin de Saturne.

Je vous prie monsieur, etc.

(Signé) J. V. Schiaparelli.



Woher nun Campani ableitete, dass Chr. Huygens planconvexe Linsen anwandte, leuchtet nicht ein. Aus Huygens' Schriften kann ich es nicht finden. Die Tafeln zeigen nur Oculare mit equiconvexen Gläsern, und es liegt auf der Hand, dass wenn Huygens die Verwechslung mit planconvexen Linsen beabsichtigte, er dies ohne Zweifel im Texte absichtlich erwähnt hätte.

Die Propositio LIV der Dioptrica hat die folgende Ueberschrift: Telescopii ex quatuor convexis compositi, constructionem explicare, quo res visae erectae spectantur et magna copia.

Die hier gemeinte Construction ist die folgende:

$$f = f' = f'' \qquad d = d' = 2f.$$

Weiter sagt Huygens: Haec egregia lentium compositio Romae, nescio a quo, primum fuit inventa, multum tamen adjuta annulo seu diaphragmate quod ad H loco medio inter lentes E et D (die 3^0 und 2^0 vom Objectiv ab gerechnet) vel ad B focum communem lentium A et C (Objectiv und erste Linse) inseritur; cujus usum non ante cognitum explicuimus in libro de causis phaenomenon Saturni.

Wo das Objectiv des 23füssigen Fernrohrs, welches Huygens vom 19. Februar 1656 an anwandte, geblieben ist, ist, mir wenigstens, unbekannt. Das Objectiv des 10füssigen, womit Huygens den Satelliten entdeckte und seine ersten Beobachtungen des Ringes anstellte, hat Prof. Harting im Jahre 1867 im hiesigen Physikalischen Cabinet aufgefunden[1]); Oculare waren aber nicht dabei. Ein anderes Objectiv von Chr. Huygens von 12 Fuss Brennweite ist im Jahre 1846 von Kaiser im Physikalischen Cabinet zu Leiden aufgefunden und in Nr. 592 der „Astron. Nachr.“ beschrieben worden. Es war dabei aber das Rohr aus Eisenblech und ein dreifaches Ocular, jedoch nicht genau von der oben angegebenen Construction, bewahrt geblieben[2]),

1) Prof. Harting hat diesen Fund in der holl. Zeitschrift „Album der Natur“ Jahrg. 1867 S. 274 bekannt gemacht. Der Durchmesser des Objectivs ist 5,7 cm, die Brennweite 3,17 m; es ist planconvex (aus einem Spiegel geschliffen) und hat eine Dicke von 3,2 mm. Nahe bei der Peripherie ist in kleiner Cursivschrift das Anagramm gravirt: Admovere oculis distantia sidera nostris, aber ohne die zugehörenden Buchstaben (vvvvvvv ccc rrr h n b q x), wie es Gravesande im Lebensberichte von Huygens vor den „Opera varia“ L. B. 1824 irrig mittheilte. Dies Anagramm war bekanntlich ein Räthsel, den Fachgenossen vorläufig angeboten, dessen Lösung durch Umsetzung der Buchstaben erhalten werden musste, und so lautete: Saturnus luna sua circumducitur sexdecim diebus horis quatuor.

2) Es war $f = f' = 0{,}105^m$, $f'' = 0{,}079^m$, $d = 0{,}212^m$, $d' = 0{,}182^m$, $a = 0{,}058^m$; Durchmesser 0,040, 0,040 und 0,038; Dicken 0,0040, 0,0048 und 0,058 m.



welches sich aber in ein Rohr mit zwei Gläsern und ein Rohr mit dem dritten Glase trennen lässt. Aus dem Umstand, dass Kaiser weder a. a. O., noch in seiner, dem damaligen k. niederländischen Institute angebotenen Abhandlung die Art der Gläser beschreibt, kann man wohl schliessen, dass sie biconvex sind, wie ich mich auch erinnere sie früher gesehen zu haben.

Ein echtes Hugenianisches Doppelocular ist auch in Leiden nicht aufgefunden.

Aus dem oben Mitgetheilten können, glaube ich, folgende Schlüsse abgeleitet werden:

1. Christian Huygens war der Erfinder des sogenannten negativen Doppeloculars.

2. Die Jahreszahl der Erfindung ist wahrscheinlich 1655, die erste Anwendung scheint am 19. Februar 1656 stattgefunden zu haben.

3. Das Verhältniss f, d, f' war bei Huygens 4, 2, 1, und nicht 3, 2, 1, wie allgemein behauptet wird.

4. Das Huygens'sche Ocular war also nicht achromatisch, denn hiefür sollte d sehr nahe $= \frac{1}{2}(f + f')$ sein, wie beim Verhältnisse 3, 2, 1 wohl stattfindet, bei 4, 2, 1 aber nicht.

5. So lange der Gegenbeweis nicht geliefert ist, muss man annehmen, dass Huygens für seine Oculare equiconvexe Linsen benutzt hat.

Wer also bei der Construction der negativen Oculare zuerst das Verhältniss 3, 2, 1, und wer zuerst die später gebräuchlichen planconvexen Linsen eingeführt hat, — welche Combination übrigens (soweit das dem Quadrat der halben Oeffnung proportionale Glied reicht) nach Airy's Analyse (Cambr. Phil. Tr. Vol. III Part II p. 20) nicht besser ist als jene von zwei biconvexen Linsen, — würde noch näher zu untersuchen sein.

6. Das Campani'sche Ocular ist das aus drei Linsen bestehende, terrestrische Ocular, an dessen Stelle jetzt schon das Dollond'sche, aus vier Linsen zusammengesetzte, getreten ist.

Beiträge zur Kenntniss der elastischen Nachwirkung. I.

Von

Prof. Dr. H. Streintz in Graz.

(Wiener Akademischer Anzeiger 1879 Nr. 18.)

Der Verfasser hat im Jahre 1874 die Eigenschaften der inneren Metallreibung untersucht und seine Resultate unter dem Titel „Ueber

die Dämpfung der Torsionsschwingungen von Drähten" in den Sitzungsberichten der kais. Akademie veröffentlicht. Als Maass der Dämpfung nahm derselbe das logarithmische Decrement der Schwingungen und stellte für dieses eine Reihe von Gesetzen auf. Seither ist dieser Gegenstand, der für die Kenntniss der elastischen Nachwirkung von Wichtigkeit ist, mehrfach untersucht worden, und sind hiedurch, wie in der vorliegenden Abhandlung erörtert wird, die aufgestellten Gesetze bestätigt worden.

Für die Untersuchung der inneren Reibung erschwerende Eigenschaft der Metalle ist, dass das logarithmische Decrement in Folge der Schwingungen stetig abnimmt, welche Eigenschaft der Verfasser als Accommodation bezeichnet hat. In der vorliegenden Abhandlung beschäftigt sich derselbe vorzugsweise mit den Eigenschaften und der Erklärung der Accommodation und findet dieselbe nicht nur im logarithmischen Decremente, sondern auch bei den statischen Erscheinungen der elastischen Nachwirkung an Metallstäben.

Die Resultate der Schwingungsbeobachtungen sind in Kürze folgende:

a) Das logarithmische Decrement von Torsionsschwingungen eines durch ein Gewicht gespannten Drahtes nimmt ab, sowohl wegen des Auseinanderrückens der Moleküle, indem der Draht, dem Zuge des Gewichtes nachgebend, sich ausdehnt, als auch zufolge einer Anpassung an die Schwingungsbewegung.

b) Die bereits eingetretene Accommodation wird durch jede Störung der molekularen Anordnung zum Theile wieder aufgehoben, gleichgiltig ob die molekulare Störung mit einer einseitigen äusseren Deformation verbunden ist, wie eine Verbiegung innerhalb der Elasticitätsgrenze, oder dass die Deformationen sich gegenseitig compensiren, wie die kleinen Transversalschwingungen bei einer Tonanregung, oder endlich, dass die äussere Gehaltsänderung nur secundärer Natur ist, wie bei einer Erwärmung.

c) Ein definitiver Zustand, bei welchem das logarithmische Decrement constant bleibt, kann eben so wenig erreicht werden, als die Länge eines durch ein Gewicht belasteten Drahtes unveränderlich ist.

Die Beobachtung der Nachwirkungsdeformationen an Stäben, welche tordirt waren, führte auf dieselben Thatsachen wie die jetzt und die im Jahre 1874 angestellten Schwingungsbeobachtungen. Wiederholte kleine Torsionen verkleinern die elastische Nachwirkung

von Stäben sehr bedeutend, grössere, bei welchen die Elasticitätsgrenze überschritten wird, vergrössern dieselbe. Die neuen Zustände können durch eine schwache Erwärmung sofort wieder zerstört werden.

Im Weiteren zeigt der Verfasser durch eine Reihe von Ueberlegungen, dass die aus den Beobachtungen vom Jahre 1874 sich ergebende Unabhängigkeit des logarithmischen Decrementes von der Länge des Drahtes auf zwei andere Gesetze zurückgeführt werden kann. Das eine derselben, auch aus den Beobachtungen vom Jahre 1874 entnommen, spricht die Unabhängigkeit des logarithmischen Decrementes vom Trägheitsmomente des angehängten Gewichtes aus, und kann als eines der am besten bewahrheiteten Gesetze betrachtet werden. Das andere handelt von der Proportionalität zwischen dem Abstande eines Querschnittes vom Aufhängepunkte und dessen Verdrehung. Dasselbe, früher stillschweigend allgemein als giltig betrachtet, wurde später von Prof. O. E. Meyer in Zweifel gezogen; hierauf folgende Versuche von Prof. Boltzmann sprachen jedoch zu Gunsten der alten Anschauung, und in neuerer Zeit hat auch Prof. O. E. Meyer sich dahin geäussert, dass wenn auch seine Beobachtungen kleine Abweichungen von jenem Gesetze zeigten, doch aus denselben nicht die Erscheinungen der elastischen Nachwirkung abzuleiten seien, mithin für letztere das Gesetz als giltig zu betrachten ist.

Als Anhang sind einige Tabellen über die Abhängigkeit des logarithmischen Decrementes von der Temperatur beigefügt, welche aus Beobachtungen von Prof. Pisati in Palermo abgeleitet wurden.

Ueber eine directe Messung der Inductionsarbeit und eine daraus abgeleitete Bestimmung des mechanischen Aequivalentes der Wärme.

Von

Prof. Dr. A. v. Waltenhofen in Prag.

(Wiener Akademischer Anzeiger 1879 Nr. 16.)

Der Verfasser hat Versuche gemacht, welche darauf abzielten, die zur Induction eines elektrischen Stromes von bestimmter Stärke in einem Schliessungskreise von gegebenem Widerstande erforderliche Arbeit direct mit Hilfe eines Feder-Dynamometers zu messen und mit der theoretisch berechneten zu vergleichen.

Als Inductionsapparat diente eine magnetoëlektrische Maschine für continuirlichen Strom, deren elektromotorische Kraft zuvor genau

ermittelt und der Tourenzahl proportional gefunden worden war. — Als Dynamometer wurde eine dynamometrische Kurbel neuester Construction verwendet, welche mit einem Schreibapparate zur Aufnahme der Arbeitsdiagramme versehen ist. Die Scala derselben wurde durch directe Belastung geprüft und richtig befunden. Die dynamometrische Kurbel wurde am Inductionsapparate an einer statt der gewöhnlichen Kurbel am Triebwerke angebrachten Welle festgeschraubt. — Zur Messung der inducirten Ströme war eine Tangentenboussole von genau ermitteltem Reductionsfactor in den Schliessungskreis eingeschaltet, dessen Widerstand möglichst genau gemessen wurde und mittelst eingeschalteter Scalen beliebig verändert werden konnte. — Zur Bemessung der Tourenzahl diente ein Secundenpendel mit lautem Schlage.

Es wurden fünf Versuche gemacht; bei dreien betrug die Drehungsgeschwindigkeit 1 Kurbelumdrehung in 1 Secunde (entsprechend 7 Umläufen des Inductors); bei den zwei anderen Versuchen kam 1 Kurbeltour bzw. auf je 2 und je 4 Secunden. Bei jedem Versuche wurden 65 Touren ausgeführt, und zwar einmal bei unterbrochenem und einmal bei geschlossenem Stromkreise. Die Differenz der in beiden Fällen vom Dynamometer verzeichneten Arbeiten war die zur Erzeugung des gleichzeitig an der Tangentenboussole gemessenen Stromes nach Maassgabe der aus der Tourenzahl berechneten elektromotorischen Kraft oder des bekannten Widerstandes aufgewendete Inductionsarbeit. Sie betrug nach den gut übereinstimmenden Ergebnissen der fünf Versuche (wobei die angewendeten Inductionsarbeiten zwischen den Grenzen von $^1/_3$ und 6 Meterkilo lagen) auf die elektromotorische Kraft eines Daniell'schen Elementes und auf den Widerstand einer Siemens'schen Einheit reducirt 0,13 Meterkilo per Secunde, ein Resultat, welches theoretischen Bestimmungen sehr nahe kommt.

Vergleicht man diesen Arbeitswerth mit der Anzahl der Calorien, welche den in einer Daniell'schen Kette bei gleichem Widerstande stattfindenden chemischen Processen entsprechen, so erhält man mit Benutzung der von W. Thomson und Jenkin dafür angegebenen Zahlen für das mechanische Aequivalent der Wärme die Zahl 428 oder, wenn man nur die grösseren Inductionsarbeiten in den vier ersten Versuchen der Rechnung zu Grunde legt, die Zahl 421, sehr nahe übereinstimmend mit dem allgemein angenommenen Joule'schen Aequivalente.

Bezugsquellen-Liste.

Wir empfehlen den verehrlichen Instituten zur Verfertigung von physikalischen Apparaten etc. die Einschaltung Ihrer werthen Firma unter dieser Rubrik. Preis pro Zeile und Jahr M. 5. —.

Hochachtungsvoll

München, Glückstrasse Nr. 11.

Die Expedition des Repertorium für Experimental-Physik
R. Oldenbourg.

Bezeichnung der Firma	Fabrikate und Angabe der Specialität
***Albert,** Frankfurt a. M., Mainzerstrasse.	Physikalische Vorlesungsapparate.
***Anstalt,** optische, astro-physikal. Werkstätte, Würzburg (Eugen Hartmann).	Specialität: Optische Gläser, Präcisions-Instrumente für Physik.
Breithaupt, F. W., & Sohn, Cassel.	Astronomische u. geodätische Instrumente.
Cleff, C. & F., Remscheid-Hasten.	Elektrische u. speciell magnet-elektrische Apparate.
Edelmann, M. Th., München.	Physikalische, meteorologische, physiologische, medicin. etc. Instrumente und Apparate für elektrisches Licht.
Ertel, T., & Sohn, München, Louisenstrasse 12.	Astronomische, mathematische u. geodätische Instrumente.
Fein, C. & E., Stuttgart, Kasernenstr. 43 b.	Galvanische Batterien, elektrische Apparate.
Hasler, G., Telegr.-Werkstätte, Bern.	Meteorologische Registrir-Instrumente.
Heller, Mechan. Werkstätte, Nürnberg.	Physik. Apparate für Vorlesungszwecke.
Houdek, Dr. & **Hervert,** Prag, Karpfengasse.	Egger'sche elektro-magnetische Motoren.
Jung, R., Heidelberg, Hauptstrasse 15.	Capillarelektrometer und Elektrocapillarkraftmaschine nach Lippmann, Thomson'sches Elektrometer nach Kirchhoff, neue Construction, Wollastonschen Draht.
***Kappeller,** Heinr., jun., Wien V, Kettenbrückengasse 9.	Barometer, Thermometer, Psychrometer, Aräometer etc.
Kohl, Max, Chemnitz, Poststrasse 21.	Physikalische Instrumente und Apparate neuester Constructionen. Preiscourant neu.
Merz, G. & S., München, Müllerstr. 11.	Optische und astronomische Instrumente.
Dr. Meyerstein's Nachfolger (Aug. Becker) in Göttingen.	Astronom. u. physikal. Werkstätte.
Miller, F., Universit.-Mechan., Innsbruck.	Physikalische u. mathemat. Instrumente.
Oertling, Aug., Berlin, Oranienburgerstrasse 57 u. 58.	Chemische Waagen, Sextanten, mathematische Instrumente, Kreistheilungen.
Pauly-Stahel, G., Friedrichshafen a. B.	Fabrik elektr. Drähte.
Riefler, Clemens, Maria Rain u. München, Karlsplatz 29.	Fabrik mathemat. Instrumente, Reisszeuge.
Schmidt, Franz, & **Haensch,** Berlin S., [illegible]strasse 4.	Spectral-Apparate, Polarisations-Apparate, Mikroskope.
[illegible] enhain b. Ober-n.	Thermometer, Barometer und alle physikalischen Glasinstrumente.
[illegible] nberg.	Fabrik dynamo-elektrischer Maschinen für elektrisches Licht Galvanoplastik u. Lehranstalten.
Steinheil, C. A., & Söhne, München, Landwehrstrasse 31.	Optische und astronomische Instrumente.
***Stöhrer,** E., jun., Leipzig.	Apparate für Projection physik. Versuche.
Stollnreuther, C., & Sohn, München.	Physikalische Instrumente.
Vogel, C. & J., Berlin, Ritterstrasse.	Ueberspponnene Drähte.
Weisser, J. G., Söhne, St. Georgen (bad. Schwarzwald).	Drehbänke für physikal. Laboratorien.
Wesselhöft, Mechaniker, Halle a. d. Saale.	Elektrische und akustische Apparate.

☞ *Bei Correspondenzen, Bestellungen etc. an die hier anzeigenden Firmen bitten wir das Repertorium für Experimentalphysik gefl. als Quelle zu nennen.*

* Ein ausführliches Inserat befindet sich im Inseratentheile.

Zeitschrift für Angewandte Elektricitätslehre

mit besonderer Berücksichtigung

der Telegraphie, des elektrischen Beleuchtungswesens, der Galvanoplastik und verwandter Zweige.

Herausgegeben von
Dr. Ph. Carl,
Professor der Physik an der königl. Kriegs-Akademie in München,
Herausgeber des „Repertorium für Experimental-Physik".

Druck und Verlag von Rudolph Oldenbourg in München.

I. Band. **1879.** Mit Tafel XXVIII und XXIX. **Nr. 11.**

Abonnements.
Erscheint monatlich wenigstens einmal. — 12 Nummern bilden einen Band. — Preis pro Band 20 Mark.
Das Abonnement kann stattfinden: bei der *Verlagshandlung R. Oldenbourg* selbst, München, Glückstrasse 11, sowie bei allen Buchhandlungen und Postämtern Deutschlands und des Auslandes.

Inserate.
Die ganze Octavseite 24 Mark, jede achtel Octavseite oder deren Bruchtheil 3 Mark. Bei Wiederholungen die Hälfte.
Inserate für 12 Nummern werden mit 10 Mark, solche für 6 Nummern mit 12 Mark für die Seite berechnet.
Beilagen bei vorheriger Einsendung eines Probe-Exemplars nach Uebereinkunft.

Inhalt.

Supplement zu Carl's Repertorium für Experimental-Physik. Bd. XV.

Hilfstafeln

für

Messungen elektrischer Leitungswiderstände,

vermittelst

der Kirchhoff-Wheatstone'schen Drahtcombination

berechnet von

Eugen Obach,

Dr. phil.

Mit 2 lithogr. Tafeln.

München.

Druck und Verlag von R. Oldenbourg.

1879.

Einfache Herleitung der Haupteigenschaften eines Systems centrirter brechender Kugelflächen.

Von

Engelbert Kobald

in Leoben.

1. Den folgenden Betrachtungen werde ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde gelegt, auf dessen x-Achse die Mittelpunkte der einzelnen brechenden Kugelflächen gelegen sein mögen; die Richtung der positiven x-Achse sei hiebei im Sinne der Richtung der einfallenden Lichtstrahlen, welche mit dieser sehr kleine Winkel einschliessen, genommen.

Betrachten wir zunächst eine einzige brechende Fläche, welche zwei Medien mit den absoluten Brechungsexponenten n und n' von einander scheidet; N sei die Abscisse ihres Durchschnittspunktes mit der x-Achse, φ und φ' ihre Brennweiten. Wird der einfallende Strahl durch die Gleichungen

$$y = \beta(x - N) + b, \qquad z = \gamma(x - N) + c$$

repräsentirt, so sind jene des gebrochenen Strahles[1]):

$$y = \frac{\beta\varphi - b}{\varphi'}(x - N) + b, \qquad z = \frac{\gamma\varphi - c}{\varphi'}(x - N) + c.$$

Gibt man dagegen den Gleichungen des einfallenden Strahles die Form

$$y = \beta(x - F) + B, \qquad z = \gamma(x - F) + C,$$

worin F und F' die Abscissen der Brennpunkte bedeuten, so nehmen die Gleichungen des austretenden Strahles die Form an:

$$y = -\frac{B}{\varphi'}(x - F') + \beta\varphi, \qquad z = -\frac{C}{\varphi'}(x - F') + \gamma\varphi.$$

2. Betrachten wir nun ein aus zwei Kugelflächen bestehendes System, für welche die Grössen $(\varphi, \varphi', F, F')$ bzw. mit den Indices

1) Vgl. Gauss Werke Bd. 5: Dioptrische Untersuchungen Art. 1.

1 und 2 unten versehen werden mögen. Den Gleichungen des einfallenden Strahles gebe man nun die Form:

$$y = \beta(x - F_1) + B, \qquad z = \gamma(x - F_1) + C; \tag{1a}$$

dann sind die Gleichungen des an der ersten Fläche gebrochenen und auf die zweite Fläche auffallenden Strahles:

$$y = -\frac{B}{\varphi'_1}(x - F'_1) + \beta\varphi_1 = -\frac{B}{\varphi'_1}(x - F_2) + \frac{B}{\varphi'_1}(F'_1 - F_2) + \beta\varphi_1$$

$$z = -\frac{C}{\varphi'_1}(x - F'_1) + \gamma\varphi_1 = -\frac{C}{\varphi'_1}(x - F_2) + \frac{C}{\varphi'_1}(F'_1 - F_2) + \gamma\varphi_1.$$

Daher sind die Gleichungen des zweimal gebrochenen Strahles:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\left(B\cdot\frac{F'_1 - F_2}{\varphi'_1\varphi'_2} + \beta\cdot\frac{\varphi_1}{\varphi'_2}\right)(x - F'_2) - B\cdot\frac{\varphi_2}{\varphi'_1} \\ z &= -\left(C\cdot\frac{F'_1 - F_2}{\varphi'_1\varphi'_2} + \gamma\cdot\frac{\varphi_1}{\varphi'_2}\right)(x - F'_2) - C\cdot\frac{\varphi_2}{\varphi'_1} \end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

3. Um einfachere Gleichungen zu erhalten, beziehen wir die Gleichungen des einfallenden und austretenden Strahles auf zwei andere, vorläufig noch unbestimmte Punkte, deren Abscissen mit F und F' bezeichnet werden mögen. Demgemäss seien die Gleichungen des einfallenden Strahles:

$$y = \beta(x - F) + B', \qquad z = \gamma(x - F) + C', \tag{2a}$$

wobei $B' = B + \beta(F - F_1)$ und $C' = C + \gamma(F - F')$;

dann sind unter Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$\varphi' = \frac{\varphi'_1\varphi'_2}{F'_1 - F_2} \tag{A}$$

die Gleichungen des austretenden Strahles:

$$\eta = -\left[\frac{B'}{\varphi'} - \beta\left(\frac{F - F_1}{\varphi'} - \frac{\varphi_1}{\varphi'_2}\right)\right](x - F')$$
$$-\left[\frac{B'}{\varphi'} - \beta\left(\frac{F - F_1}{\varphi'} - \frac{\varphi_1}{\varphi'_2}\right)\right](F' - F'_2) - B'\cdot\frac{\varphi_2}{\varphi'_1} + \beta\cdot\frac{(F - F_1)\varphi_2}{\varphi'_1}$$

und analog $z = \cdots\cdots$

Ueber die bisher willkürliche Grösse F verfüge man nun in der Weise, dass der Factor $\left(\frac{F - F_1}{\varphi'} - \frac{\varphi_1}{\varphi'_2}\right) = 0$ d. h.

$$F = F_1 + \frac{\varphi_1\varphi'_1}{F'_1 - F_2} \text{ wird.} \tag{B}$$

Dadurch erhält man für den austretenden Strahl:

$$y = -\frac{B'}{\varphi'}(x - F') + \beta . \frac{\varphi_1 \varphi_2}{F'_1 - F_2} - B'\left(\frac{F' - F'_2}{\varphi'} + \frac{\varphi_2}{\varphi'_1}\right).$$

F' wurde nun so gewählt, dass der Factor $\frac{F' - F'_2}{\varphi'} + \frac{\varphi_2}{\varphi'_1}$ verschwindet, also

$$F' = F'_2 - \frac{\varphi_2 \varphi'_2}{F'_1 - F'_2} \tag{C}$$

wird; gleichzeitig setze man analog wie in (A)

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{F'_1 - F_2}. \tag{D}$$

Dann nehmen die Gleichungen des austretenden Strahles wie im Falle einer einzigen brechenden Fläche die Gestalt an:

$$y = -\frac{B'}{\varphi'}(x - F') + \beta\varphi, \qquad z = -\frac{C'}{\varphi'}(x - F') + \gamma\varphi. \tag{2b}$$

Bezeichnet man die absoluten Brechungsexponenten der drei auf einander folgenden Medien mit n, n_1 und n', so ist bekanntlich

$$\frac{\varphi'_1}{\varphi_1} = \frac{n_1}{n} \quad \text{und} \quad \frac{\varphi'_2}{\varphi_2} = \frac{n'}{n_1}. \tag{3a}$$

Durch Multiplication dieser zwei Gleichungen erhält man unter Beachtung von (A) und (D):

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{n'}{n}. \tag{3b}$$

Durch bekannte Schlussweisen erhält man aus den Gleichungen (2a) und (2b), dass die Punkte F und F' die Brennpunkte des Systems sind.

4. Es seien nun (ξ, η, ζ) und (ξ', η', ζ') die Coordinaten zweier beliebiger Punkte P und P', die bzw. auf dem einfallenden und austretenden Strahle gelegen sein mögen. Bezieht man die Gleichungen (2a) und (2b) auf diese Punkte, so erhält man:

$$y = \beta(x - \xi) + \eta, \qquad z = \gamma(x - \xi) + \zeta \tag{4a}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{\beta(F-\xi)+\eta}{\varphi'}(x-\xi') + \beta\left(\frac{(F-\xi)(F'-\xi')}{\varphi'} + \varphi\right) + \eta\cdot\frac{F'-\xi'}{\varphi'} \\ z &= -\frac{\gamma(F-\xi)+\zeta}{\varphi'}(x-\xi') + \gamma\left(\frac{(F-\xi)(F'-\xi')}{\varphi'} + \varphi\right) + \zeta\cdot\frac{F'-\xi'}{\varphi}. \end{aligned}\right\}$$

Den Punkt P' bringen wir nun in eine solche Beziehung zum Punkt P, dass der Ausdruck $\frac{(F - \xi)(F' - \xi')}{\varphi'} + \varphi$ verschwindet, d. h.

$$(F - \xi)(\xi' - F') = \varphi\varphi' \text{ wird.} \tag{5}$$

Dann nehmen die Gleichungen des austretenden Strahles die Form an:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{\beta(F-\xi)+\eta}{\varphi'}(x-\xi')+\eta\cdot\frac{F'-\xi'}{\varphi'} \\ z &= -\frac{\gamma(F-\xi)+\zeta}{\varphi'}(x-\xi')+\zeta\cdot\frac{F'-\xi'}{\varphi'}. \end{aligned}\right\} \quad (4b$$

Aus diesen Gleichungen erhält man die Coordinaten des Punktes P':

$$\frac{\eta'}{\eta}=\frac{\zeta'}{\zeta}=-\frac{\xi'-F'}{\varphi'}=-\frac{\varphi}{F-\xi}. \quad (6$$

Aus Gründen, welche Gauss a. a. O. S. 253 angibt, wird der Punkt P' das Bild von P genannt; das durch Gleichung (6) dargestellte Verhältniss bezeichnet man als die Linearvergrösserung.

Denken wir uns jetzt, dass der Punkt P in der Achse gelegen, also $\eta=\zeta=0$ sei, dann sind nach den Gleichungen (4a) und (4b) die Gleichungen des einfallenden und austretenden Strahles beziehungsweise:

$$y=\beta(x-\xi), \qquad z=\gamma(x-\xi)$$

und

$$y=-\beta\cdot\frac{F-\xi}{\varphi}(x-\xi'), \quad z=-\gamma\cdot\frac{F-\xi}{\varphi}(x-\xi').$$

Bezeichnet man die unendlich kleinen Winkel, welche die Projectionen des austretenden Strahles auf die yx- und zx-Ebene mit der x-Achse einschliessen, mit β' und γ', so hat man nach den zwei letzten Gleichungen:

$$\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\gamma'}{\gamma}=-\frac{F-\xi}{\varphi'}=-\frac{\varphi}{\xi'-F'}. \quad (7$$

Das Verhältniss $\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\gamma'}{\gamma}$ nennt man die Winkelvergrösserung. Denkt man sich in der xy-Ebene durch einen Punkt der Achse, dessen Abscisse $=\xi$ ist, einen Strahl unter dem Neigungswinkel β gegen die Achse und ausserdem in derselben Ebene senkrecht auf diese ein Loth gezogen, so erhält man aus (6) und (7) mit Rücksicht auf (3b):

$$n\beta\eta=n'\beta'\eta'. \quad (8$$

5. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich, dass der optische Charakter eines aus zwei Kugelflächen bestehenden Systems sowie der einer einzigen brechenden Fläche durch 4 wesentliche Bestimmungsstücke, welche oben mit F, F', φ, φ' bezeichnet wurden, bedingt ist und dass zudem die Form der entwickelten Gleichungen genau die gleiche ist, welche im Falle einer brechenden Fläche resultirt.

Nehmen wir jetzt an, dass die an der zweiten Fläche gebrochenen Strahlen auf eine dritte Fläche auffallen, welche mit den beiden ersten

centrisch ist. Dann denken wir uns die beiden ersten Flächen zu einem Systeme combinirt, dessen Elemente mit $(\varphi_1, \varphi'_1, F_1, F'_1)$ bezeichnet werden mögen; jene der dritten Fläche seien $(\varphi_2, \varphi'_2, F_2, F'_2)$. Wir haben dann, um die Wirkung des Systems zu finden, genau dieselben Gleichungen wie in Art. 2 und 3 aufzustellen, indem diesen nur die Voraussetzung zu Grunde lag, dass die Brechung des Lichtes an jedem der einzelnen Theile des Systems durch 4 wesentliche Constanten bedingt sei und dass zudem für jeden Theil die Form der Gleichungen des einfallenden und austretenden Strahles dieselbe wie in den Gleichungen (2a) und (2b) des Art. 3 sei. Daraus folgt unmittelbar, dass dieselben Gleichungen auch im Falle eines aus 3 Kugelflächen bestehenden Systems den einfallenden und austretenden Strahl repräsentiren und dass dessen Elemente durch die vier Gleichungen (A), (B), (C), (D) aus denen der Theile gefunden werden können. Durch wiederholte Anwendung dieser Schlussweise folgt hieraus weiter, dass auch ein aus beliebig vielen Kugelflächen bestehendes System nur durch 4 wesentliche Bestimmungstücke vollständig definirt ist und dass auch in diesem allgemeinen Falle die Gleichungen (2a) und (2b) den einfallenden und austretenden Strahl darstellen. Hieraus schliesst man weiter, dass die Elemente eines Systems, welches aus zwei Theilen mit gemeinschaftlicher Achse besteht, aus den Gleichungen (A), (B), (C), (D) gefunden werden können, wenn mit $(\varphi, \varphi', F, F')$ die Elemente des ganzen Systems und mit denselben Buchstaben, denen aber zur Unterscheidung die Indices 1 resp. 2 unten angehängt sind, die Elemente des ersten und zweiten Theiles bezeichnet werden; bezeichnet man mit n, n_1, n' die absoluten Brechungsexponenten des ersten, des zwischen beiden Theilen gelegenen und des letzten Mediums, so haben aus demselben Grunde auch die Gleichungen (3a) und (3b) in diesem allgemeinen Falle Giltigkeit.

6. Es seien nun P und P' ein die Gleichung (5) befriedigendes Werthpaar; in den diesen Grössen entsprechenden conjugirten Punkten habe die Linearvergrösserung den Werth p, die Winkelvergrösserung den Werth q. Dann ist nach (6), (7) und (8)

$$\left.\begin{aligned} P = F + \frac{\varphi}{p} = F + q\varphi', \qquad P' = F' - p\varphi' = F' - \frac{\varphi}{q} \\ pq = \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{n}{n'}. \end{aligned}\right\} \quad (9$$

Aus den Gleichungen (9) folgt unmittelbar jene Bedeutung der Grössen φ und φ', nach welchen dieselben von Herrn Töpler[1]) als die Brennweiten des Systems definirt wurden. Mit gleichem Rechte kann nach denselben Gleichungen die erste Brennweite als die constante Verschiebung definirt werden, welche ein Strahl im letzten Mittel in der positiven Richtung der Achse erfahren muss, damit die vom letzten zum ersten Mittel gerechnete Winkelvergrösserung um die Einheit abnehme und die zweite Brennweite als die constante Verschiebung, welche ein Strahl im ersten Mittel in demselben Sinne erfahren muss, damit die Winkelvergrösserung um die Einheit zunehme; von praktischer Wichtigkeit sind diese Definitionen allerdings nicht.

Verbindet man die letzte der Gleichungen (9) mit der ebenfalls aus ihnen folgenden Gleichung $\frac{p}{q} = \frac{P' - F'}{F - P}$, so erhält man:

$$p^2 = \frac{n}{n'} \cdot \frac{P' - F'}{F - P}, \qquad q^2 = \frac{n}{n'} \cdot \frac{F - P}{P' - F'}.$$

Ist also ausser F, F' und P, P' die eine der beiden Grössen p und q gegeben, so kann man nach den zwei letzten Gleichungen $\frac{n'}{n}$ und daraus nach der dritten der Gleichungen (9) die andere eindeutig finden. Da somit die Brennweiten φ und φ' durch die Abscissen zweier conjugirter Punkte und die ihnen entsprechende Linear- oder Winkelvergrösserung ausgedrückt werden können, so folgt, dass ein System centrirter brechender Kugelflächen in Bezug auf dessen optischen Charakter vollkommen definirt ist, wenn die beiden Brennpunkte und zwei ausserhalb der Achse gelegene conjugirte Punkte oder wenn ausser den Brennpunkten zwei conjugirte Strahlen gegeben sind, welche die Achse schneiden. Hiebei wählt man am einfachsten jenes Paar conjugirter Punkte resp. Strahlen, wofür die Grössen p und q bzw. die Werthe ± 1 haben; dann erhält man die positiven und negativen Haupt- und Knotenpunkte des Systems. Bezeichnet man die Abscissen der positiven Haupt- und Knotenpunkte bzw. mit (E, E') und (K, K'), so hat man nach (9):

$$F = E - \varphi = K - \varphi', \qquad F' = E' + \varphi' = K' + \varphi. \qquad (10$$

Wenn das System durch seine Brennpunkte und zwei beliebige ausserhalb der Achse gelegene conjugirte Punkte oder zwei die Achse

1) Pogg. Ann. Bd. 142 S. 239 u. 240.

schneidende conjugirte Strahlen gegeben ist, so ist der Vollständigkeit halber noch die Aufgabe zu lösen, für einen gegebenen leuchtenden Punkt oder einen gegebenen einfallenden Strahl das entsprechende Bild resp. den conjugirten Strahl auch auf constructivem Wege zu finden. Die Lösung derselben dürfte am einfachsten ausfallen, indem man nach den bekannten Constructionen, welche die Lösung der Aufgabe für den Fall liefern, dass die gegebenen Punkte die Haupt- und Knotenpunkte des Systems sind, umgekehrt aus den gegebenen Stücken die Lage der Haupt- oder Knotenpunkte ermittelt und dann in bekannter Weise verfährt.

Bezieht man die Lage von Object und Bild auf zwei feste conjugirte Punkte P und P', so nehmen die Gleichungen (5), (6) und (7) bekanntlich noch besonders bemerkenswerthe Formen an.

Man ersetze nämlich in Gleichung (5) das Werthepaar (ξ, ξ') durch (P, P') und ziehe von der so entstehenden Gleichung die Gleichung (5), so erhält man:

$$-F(\xi'-P')+F'(P-\xi)=PP'-\xi\xi'.$$

Auf beiden Seiten dieser Gleichung addire man den Ausdruck

$$P(\xi'-P')-P'(P-\xi)$$

und dividire die so erhaltene Gleichung noch durch das Produkt $(P-\xi)(\xi'-P)$; dann ergibt sich:

$$\frac{P-F}{P-\xi}+\frac{F'-P'}{\xi'-P'}=1. \tag{11}$$

Aus dieser Gleichung findet man: $-\frac{\xi'-F'}{P-F}=\frac{\xi'-P'}{\xi-P}$ oder unter Beachtung von (9) und (6):

$$\frac{\eta'}{\eta}=\frac{\zeta'}{\zeta}=q\cdot\frac{\xi'-P'}{\xi-P}. \tag{12}$$

Hieraus erhält man endlich nach (8) für einen Strahl, welcher die Achse schneidet:

$$\frac{\beta'}{\beta}=\frac{\gamma'}{\gamma}=p\cdot\frac{\xi-P}{\xi'-P'}. \tag{13}$$

7. Denkt man sich in den Gleichungen (A), (B), (C), (D) die Abscissen der Brennpunkte durch jene der Haupt- oder Knotenpunkte gemäss den Gleichungen (10) ausgedrückt, so erhält man[1]) unter Einführung der abkürzenden Bezeichnungen:

1) Vergl. Helmholtz, physiologische Optik §. 9.

$$E_2 - E'_1 = t, \qquad K_2 - K'_1 = t'$$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi'_1 + \varphi_2 - t} = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi'_2 - t'} \\
\varphi' &= \frac{\varphi'_1 \varphi'_2}{\varphi'_1 + \varphi_2 - t} = \frac{\varphi'_1 \varphi'_2}{\varphi_1 + \varphi'_2 - t'} \\
&\frac{E - E_1}{\varphi} = \frac{t}{\varphi_2}, \quad \frac{E' - E'_2}{\varphi'} = -\frac{t}{\varphi'_1} \\
&\frac{K - K_1}{\varphi'} = \frac{t'}{\varphi'_2}, \quad \frac{K' - K_2}{\varphi} = -\frac{t'}{\varphi_1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14$$

8. Die für ein System centrirter brechender Kugelflächen entwickelten Formeln verlieren ihre Anwendbarkeit, wenn die Grössen (F, F', φ, φ') unendlich werden. Dies ist noch bei den Gleichungen (A), (B), (C), (D) der Fall, wenn

$$F_2 - F'_1 = 0 \qquad (15$$

ist, d. h. der zweite Brennpunkt des ersten Theiles mit dem ersten des zweiten Theiles zusammenfällt.

Der Bedingungsgleichung (15) lässt sich auch die Form geben:

$$E_2 - E'_1 = \varphi'_1 + \varphi_2 \text{ oder } K_2 - K'_1 = \varphi_1 + \varphi'_2. \qquad (15a$$

In diesem Falle gehen wir wieder zu den Gleichungen (1a) und (1b) zurück, vorausgesetzt dass keiner der beiden Theile die Bedingungsgleichung (15) erfüllt. Sind also die Gleichungen des einfallenden Strahles

$$\eta = \beta (x - F_1) + B, \qquad z = \gamma (x - F_1) + C \qquad (16a$$

und jene des austretenden Strahles

$$\eta = \beta' (x - F'_2) - B \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi'_1}, \qquad z = \gamma' (x - F'_2) - C \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi'_1}, \quad (16b$$

so ist nach (1b) unter Berücksichtigung von (15):

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = -\frac{\varphi_1}{\varphi'_2}. \qquad (17$$

Diese Gleichung zeigt, dass in einem Systeme der gedachten Art die Richtung des gebrochenen Strahles unabhängig von der Lage des einfallenden Strahles ist, d. h. es treten parallel zu einander einfallende Strahlen auch parallel zu einander wieder aus. Ein so beschaffenes System nennt man nach Möbius[1]) ein Fernrohr. Die zwei Theile, aus welchen dasselbe besteht, mögen wie bei einem ausgeführten Instrumente von gleicher Benennung Objectiv und Ocular

1) Crelle's Journal Bd. 5 S. 124 ff.

genannt werden. Durch die Gleichung (17) ist die Winkelvergrösserung, welche man in diesem Falle kurzweg die Vergrösserung nennt, bestimmt. Bezeichnet man nach Gauss[1]) die Vergrösserung mit $\frac{n \cdot l}{n'}$, die Linearvergrösserung mit g, so hat man mit Rücksicht auf (8) und (17) die Gleichungen:

$$l = \frac{1}{g} = -\frac{n'}{n} \cdot \frac{\varphi_1}{\varphi'_2} = -\frac{\varphi_1'}{\varphi_2}. \qquad (18$$

Wir nehmen nun auf dem einfallenden und austretenden Strahle zwei vorläufig beliebige Punkte Π und Π' an, deren Coordinaten (ξ, η, ζ) resp. (ξ', η', ζ') seien. Ertheilt man den Gleichungen des einfallenden Strahles die Form:

$$y = \beta(x - \xi) + \eta, \qquad z = \gamma(x - \xi) + \zeta, \qquad (19a$$

so sind nach (16b) die Gleichungen des austretenden Strahles:

$$y = \frac{nl}{n'}(x - \xi') + \beta\left(\frac{n}{n'g}(\xi' - F'_2) - g(\xi - F_1)\right) + g\eta$$

und analog $z = \cdots\cdots$

Sind die Punkte Π' und Π einander conjugirt, so sind hienach die Gleichungen des austretenden Strahles:

$$y = \frac{nl}{n'}(x - \xi') + g\eta, \qquad z = \frac{nl}{n'}(x - \xi') + g\zeta, \qquad (19b$$

indem dann

$$\xi' = F'_2 + \frac{n'}{n} g^2 (\xi - F_1) \qquad (20$$

zu setzen ist. Sind P und P' die Abscissen zweier fester conjugirter Punkte P und P', so ist auch

$$P' = F'_2 + \frac{n'}{n} g^2 (P - F_1). \qquad (20a$$

Durch Subtraction der zwei letzten Gleichungen von einander folgt:

$$\xi' = P' + \frac{n'}{n} g^2 (\xi - P); \qquad (20b$$

die beiden anderen Coordinaten des Punktes Π' erhält man aus den Gleichungen:

$$\eta' = g \cdot \eta, \qquad \zeta' = g \cdot \zeta.$$

Wenn das Punktenpaar (P, P') in einen zusammenfällt, dessen Abscisse $= O$ ist, so hat man nach (20a):

1) a. a. O. Art. 11.

$$O = \frac{F'_2 - \frac{n'}{n} g^2 \cdot F_1}{1 - \frac{n'}{n} g^2}.$$

Die Gleichung (20b) nimmt nun die Form an:

$$\xi' = O + \frac{n'}{n} g^2 (\xi - O).$$

Der Punkt O, in welchem Object und Bild offenbar auch dann noch zusammenfallen, wenn das Fernrohr umgekehrt wird, wird von Einigen der Mittelpunkt des Fernrohres genannt[1]). Setzt man $P = K_1$ und bezeichnet die Abscisse des conjugirten Punktes mit N'', so ist

$$N'' = K'_2 + \varphi_2 \left(1 - \frac{n'}{nl}\right)$$

und

$$\xi' = N'' + \frac{n'}{n} g^2 (\xi - K_1).$$

Es schneiden sich also alle Hauptstrahlen des Objectives nach dem Austritte aus dem Oculare in dem Punkte, dessen Abscisse mit N'' bezeichnet wurde; derselbe möge daher mit der in der Theorie der Fernröhre üblichen Benennung „Ort des Auges“ belegt werden.

Fassen wir nun eine der Achse parallele Gerade von der Länge $\Delta\xi$ als Object auf, deren Bild die Länge $\Delta\xi'$ habe, so ist nach (20)

$$\frac{\Delta\xi'}{\Delta\xi} = \frac{n}{n} g^2.$$

Das linker Hand des Gleichheitszeichens stehende Verhältniss stellt die Vergrösserung der Tiefendimensionen dar. Dividirt man dieselbe durch die Vergrösserung der Querdimensionen, welche wir schlechtweg die Linearvergrösserung nannten, so erhält man das von Herrn Töpler[2]) definirte Verhältniss der räumlichen Verzerrung:

$$\frac{\Delta\xi'}{\Delta\xi} : \frac{\eta'}{\eta} = \frac{n'}{nl};$$

dieses ist also gleich dem reciproken Werthe der Vergrösserungszahl des Fernrohres.

1) Vgl. Casorati, Proprietà cardinali dei cannochiali pag. 83 art. 32.

2) a. a. O. S. 250.

Wilhelm Weber's transportabler Magnetometer und dessen Erdinductor nach der neuesten Construction.

Von

Dr. **Meyerstein.**

(Hiezu Tafel XXV und XXVI.)

Im Jahre 1838 fertigte ich zuerst ein Magnetometer für Reisezwecke, nach der Angabe des Herrn Prof. W. Weber, an, welches im Wesentlichen auf dem Principe des grossen Magnetometers von Gauss beruht. Es sind seit jener Zeit eine Menge Magnetometer dieser Construction aus meiner früheren „astronomischen und physikalischen Werkstätte“ hervorgegangen. Durch eigene Messungen mit diesen Instrumenten fand ich (wie das wohl bei allen Instrumenten neuerer Construction der Fall ist), dass dieselben mancher Verbesserungen, sowohl rücksichtlich der Aufstellung als auch rücksichtlich der mit denselben zu erreichenden Genauigkeit (der Resultate), fähig waren. Es geht nämlich bei der Bestimmung der absoluten Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus durch die doppelte Aufstellung des Instrumentes viel Zeit verloren; denn sobald dasselbe für die Beobachtung der Ablenkungen aufgestellt war, musste es nach Beendigung derselben weggenommen und ein anderer Apparat zur Bestimmung der Schwingungsdauer des ablenkenden Stabes aufgestellt werden. Bei den älteren Instrumenten wird die Genauigkeit der Bestimmung der absoluten Intensität dadurch beeinträchtigt, dass zur Ermittelung des Trägheitsmomentes des ablenkenden Stabes die Gewichte nur in einem Abstande aufgehängt werden konnten, während die Construction des neuen Instrumentes die Aufhängung der Gewichte in zwei verschiedenen Abständen gestattet, wie dieses stets von Gauss geschehen ist, so dass also eine genaue Abmessung der Dimen-

---

1) Mittheilungen des Magn. Vereins im Jahre 1839.

sionen der Gewichte wegfällt. Ferner ist bei dem neuen Instrumente die Umlegung des schwingenden Stabes zur Bestimmung der absoluten Declination, um den Collimationsfehler desselben zu ermitteln, unvergleichlich bequemer und zuverlässiger; auch sind die kleinen Abweichungen der gegenseitigen Lage ohne weiteres an der Eintheilung des im Brennpunkte eines achromatischen Objectivs befindlichen Mikrometers zu messen.

Sollen diese Magnetometer nicht für die Bestimmung der absoluten Intensität und Declination auf Reisen verwandt werden, so eignen sich dieselben auch ganz vorzüglich zu Uebungen in einem physikalischen Practicum. Schon die älteren Magnetometer liessen die Anbringung eines Multiplicators zu, so dass man dieselben auch als Galvanometer benutzen konnte; es gestattete aber die ganze Anordnung des Instrumentes nicht die vortheilhafteste Construction des Multiplicators. Ich habe nun dieses Magnetometer, ohne Beeinträchtigung seines Hauptzweckes und ohne eine jede Complication, in ein empfindliches Galvanometer, durch Anbringung eines astatischen Nadelpaares und eines Multiplicators, der vortheilhaftesten Construction[1]) verwandelt. Ferner habe ich dem Instrumente die Einrichtung gegeben, dass man mittelst Induction auch die Inclination bestimmen kann, was sowohl für wissenschaftliche Reisen zu magnetischen Beobachtungen, als auch für Uebungen im physikalischen Practicum von Werth sein möchte.

Da mir kein Magnetometer bekannt ist, welches dieses in seiner Aufstellung, in den Beobachtungsmethoden und in der Genauigkeit der zu erreichenden Resultate übertrifft (nur beim magnetischen Theodolit ist die Aufstellung bequemer), so glaube ich durch die Beschreibung und Abbildung desselben in seiner jetzigen Construction Manchem einen Dienst zu erweisen.

Beschreibung des Magnetometers.

(Tafel XXV.)

Fig. 1 zeigt einen verticalen Schnitt durch die Mitte, senkrecht gegen die Achse des schwingenden Magnets.

Fig. 2 zeigt ebenfalls einen verticalen Schnitt durch die Mitte, aber in der Richtung der Achse des schwingenden Magnets.

Fig. 3 eine Ansicht von oben.

---

1) Vgl. W. Weber, zur Galvanometrie. Göttinger Nachr. Nr. 10. 1862.

Auf der kreisrunden Platte *AA* Fig. 1, 2 und 3, welche sich in dem mit drei Fussschrauben versehenen Ringe drehen lässt, ist der Bügel *BB* Fig. 1 und 3 befestigt. Dieser Bügel ist von oben durchbohrt und auf demselben der längliche Kasten *K* Fig. 1, 2 und 3 geschraubt, in dessen Mitte eine quadratische Platte mit gleich grosser Durchbohrung sich befindet. Auf dieser Platte sitzt eine Hülse, um welche sich eine runde Scheibe *S* drehen und mittelst der Mutter *L* festschrauben lässt. In dieser Scheibe sind, wie die drei Abbildungen zeigen, drei Messingcylinder möglichst weit nach aussen in einem Abstande von 120° geschraubt. Eine eben solche Scheibe *S'*, nur ein wenig kleiner, befindet sich oberhalb der drei Messingcylinder, welche mit ihren oberen Ansätzen in die drei Durchbohrungen der Scheibe *S'* gesteckt werden, so dass man dieselben durch drei kleine Schraubenmuttern mit der Scheibe *S'* verbinden kann. Auf der Scheibe *S'* ist eine kurze Hülse, über welche das Messingrohr *C* zum Schutze des Coconfadens und Träger des Torsionskreises *N* Fig. 1, 2 und 3 gesteckt und daran befestigt ist.

Der sowohl zur absoluten Declination als auch zur absoluten Intensität dienende Magnet *M* Fig. 1 und 2 ist der Länge nach durchbohrt und trägt an dem einen Ende ein achromatisches Objectiv, in dessen Brennpunkte, wie schon früher erwähnt, sich ein Mikrometer befindet, welches in $0{,}2^{mm}$ eingetheilt ist.

Der Magnet hat bei *m m* zwei keilförmige Nuthen; der Träger desselben *T* ist von der Form wie aus den Fig. 1 und 2 ersichtlich. In der Mitte des Trägers *T* ist ein Doppelhaken *h* befestigt, welcher an die horizontale Achse des kurzen Stiftes *s* gehängt und mittelst der Schraube *i* befestigt wird; der dünnere Theil des Stiftes *s'* lässt sich durch die Kopfschraube *o* mit der Spiegelfassung verbinden. Oberhalb des Spiegels sitzt ebenfalls ein Stift, in dessen oberes Ende ein kleines Loch zur Befestigung des Coconfadens gebohrt ist. Der Coconfaden ist mit seinem einen Ende mit der oberen Schraube verbunden, welche dazu dient, den Magnet höher oder tiefer zu bringen, ohne dass der Faden seinen Ort verändert; eine Einrichtung, welche dem grossen Magnetometer von Gauss entlehnt ist. Innerhalb des Kastens *K* ist der Stift *s'* fein durchbohrt (Fig. 1, 2 und 3), in welcher Durchbohrung ein feiner Draht *d* von Aluminium oder Argentan gesteckt ist, welcher als Index für die Messungen der Schwingungsbögen des ablenkenden Magnets *M'* Fig. 1 dient. — Zur Bestimmung der

Torsion wird ein Messingcylinder genau von den Dimensionen wie *M* benutzt, welcher der Länge nach durchbohrt ist; in diese Durchbohrung wird ein dünner Magnet gesteckt.

Die an den Seiten des Bügels *BB* befindlichen cylindrischen Zapfen *P P* dienen zur Aufnahme der Messstangen[1]) *P' P'* (cylindrische Röhren) Fig. 1 und 3, auf welche der ablenkende Magnet *M'* mit dem dazu bestimmten Sattel *R* in Fig. 1 so gesetzt wird, dass der dünne Zapfen *x*, welcher sich in der Mitte des Sattels befindet, in die Löcher tritt, welche sich in den dem Magnetometer entsprechenden Abständen in den Messstangen befinden.

Der den Magnet umgebende Dämpfer *EE* Fig. 1 und 2 ist ein länglich viereckiger Kupferkasten, welcher der Länge nach durchschnitten ist; man schiebt eine Hälfte nach der andern auf die runde Platte *AA* unter dem Bügel soweit, dass die Mitte des Kastens mit der Mitte des ganzen Instrumentes zusammenfällt, welche Stellung durch ein paar Stifte bestimmt ist.

In den Fig. 1 und 2 sieht man die Gewichte *Q Q* zur Ermittelung des Trägheitsmomentes von *M'*; es lassen sich dieselben von den Enden wegnehmen und mit ihren Spitzen nahe der Mitte in bestimmtem Abstande so aufhängen, wie die punktirten Gewichte *Q' Q'* es zeigen. — Will man nun mit dem Magnetometer nur die Variationen der Declination beobachten, so entfernt man sowohl die Gewichte als auch die Messstangen *P' P'* und den ablenkenden Stab *M'*. Man stellt nun den Apparat so auf, dass der Stift, welcher den Spiegel trägt, in der Mitte des Loches des Bügels *BB* schwingt, was durch die unteren drei Fussschrauben leicht zu erreichen ist, wobei selbstverständlich der Coconfaden so hoch aufgewunden wird, dass der Index *d* im Kasten *K* nirgends berührt. Nun dreht man die Platte *AA* mit dem Bügel so lange, bis der Magnet *M* in der Mitte des Kupferkastens *EE* schwingt, also nahezu im magnetischen Meridian. Für die Beobachtungen der Variationen ist es gleichgiltig, in welchem Azimuthe das zur Beobachtung dienende Fernrohr mit seiner Scala steht, weil der zur Beobachtung dienende Spiegel in ein jedes Azimuth gebracht werden kann. Auch für die absolute Intensitätsmessung ist die Aufstellung gleichgiltig. Eine schickliche Entfernung der Scala von dem Spiegel ist für diese Instrumente ein Meter. Wollte man aber bei der Aufstellung für die Beobachtungen der Variationen der Declinationen

1) Wie bei dem früheren Magnetometer.

gleichzeitig die absolute Declination bestimmen, so muss die Aufstellung des Fernrohrs in der Richtung des durchbohrten Magnets *M* stattfinden, weil ja dieser als Collimator eingerichtet ist, durch dessen Mikrometer die Lage der magnetischen Achse gegen den astronomischen Meridian bestimmt werden soll. Hieraus geht aber hervor, dass ein einfaches Fernrohr nicht genügt, sondern dass ein Winkelmessinstrument unentbehrlich ist. Ich habe deshalb für diese Instrumente, um auch auf Reisen die nothwendigsten astronomischen Bestimmungen machen zu können, kleine Theodolite mit Höhenkreis construirt und besonderen Werth auf die Helligkeit und entsprechende Vergrösserungen der Fernrohre gelegt. Zur Beleuchtung des Mikrometers wird der in Fig. 4 abgebildete Spiegel benutzt.

Bei dieser Aufstellung wird man gut thun, dem Spiegel des Instruments eine solche Drehung im Azimuth zu geben, dass man im Fernrohre das reflectirte Bild der auf die Horizontalachse des Theodolits gestellten Scala beobachten kann; alsdann ist das Magnetometer gleichzeitig für die Messungen der absoluten Intensität hergerichtet. In welcher Reihenfolge die Messungen für die Bestimmung der absoluten Intensität zu machen sind, dafür möchten wohl W. Weber's Vorschriften in den schon citirten „Mittheilungen des Magnetischen Vereins“ von 1839 maassgebend sein.

Zur Messung der Schwingungsdauer des Ablenkungsstabes *M'*, mit und ohne Gewichte, wird der Kupferkasten *EE* weggenommen und dafür der Holzkasten Fig. 5 und 6 unter den Bügel *BB* geschoben. Es bedarf keiner weiteren Erwähnung, dass man durch die auf der Grundplatte des Kastens *K* angebrachte Eintheilung, welche durch Glas gedeckt ist, mit genügender Genauigkeit die Schwingungsbögen des Magnets messen kann.

Bei den günstigen Resultaten, welche sich mit diesem Magnetometer für die Bestimmung der absoluten Declination und absoluten Intensität erreichen lassen, hatte ich das Verlangen, dasselbe Instrument auch für die Bestimmung der Inclination einzurichten, ohne dass dasselbe complicirt werde und ohne Beeinträchtigung seines Hauptzweckes. Um dieses zu erreichen, lag mir nichts näher als die Anwendung eines Erdinductors nach W. Weber mit dem entsprechenden Multiplicator und einem empfindlichen astatischen Nadelpaare.

Ich habe nun nach Weber's Principien einen Erdinductor (schon vor einer Reihe von Jahren) construirt, der in seiner einfachen

Form sowohl für Reisezwecke als auch zu Uebungen sich vortrefflich eignet. Bevor ich diesen Inductor näher beschreibe, verweise ich auf den hiezu bestimmten Multiplicator mit seinen Magneten. Um die Magnete mit dem eben beschriebenen Magnetometer verbinden zu können, wird nur die Schraube *i*, welche den Träger *T* Fig. 1 und 2 festhält, gelöst, der Träger weggenommen und statt dessen der Träger des astatischen Nadelpaares eingesetzt und durch die Schraube *i* befestigt. Nun wird der Multiplicator unter den Bügel *BB* geschoben.

Dass man den Multiplicator mit einem leichten Kasten von Pappe oder Holz umgibt, um die Magnete gegen Luftzug zu schützen, versteht sich wohl von selbst. Der Anfang und das Ende des Multiplicatordrahts ist mit den Stücken verbunden, in welche Leitungsdrähte, welche zum Inductor führen sollen, geklemmt werden.

Der Erdinductor.

(Tafel XXVI.)

Fig. 1 ist ein Schnitt durch die Mitte der Achse *AA'* bei senkrechter Stellung derselben.

Fig. 2 ist ein Schnitt durch die Mitte der Achse, wenn dieselbe um 90° gedreht und horizontal gelegt ist.

Fig. 3 eine Ansicht des Inductors von oben.

Fig. 4 eine Ansicht des Inductors von unten.

Der durch die Abbildungen dargestellte Erdinductor ist ohngefähr in halber natürlicher Grösse — gross genug um mit dem hiezu bestimmten Multiplicator hinreichend grosse Ablenkungen sowohl für die verticale als horizontale Componente zu erhalten, welche für die Berechnung der Inclination ein befriedigendes Resultat geben.

Die Fig. 1 und 2 stellen einen viereckigen Kasten von trockenem Holz vor, welcher durch die viereckigen Holzplatten *B B'* unten und oben geschlossen ist. *AA'* ist die Drehungsachse, welche mit einem viereckigen Rahmen von Metall *RR*, der den Inductor *II* trägt, innig verbunden ist. Diese Achse ist unten und oben konisch; ein jeder Konus geht in einen Cylinder von durchaus gleicher Dicke über. In den Deckplatten *B B'* befinden sich die Metallbüchsen *l l'*, welche sich genau der Drehungsachse *AA'* anschliessen. Der obere Cylinder von *A'* ist bei *a* viereckig abgesetzt, auf dessen Viereck der Hebel *H* Fig. 1, 2 und 3 gesteckt und mittelst der Mutter *M* scharf angeschraubt wird. Auf den cylindrischen Theil *c* ist die mit einem

Vorsprunge versehene Platte P so fest gesteckt, dass man sie nur schwer um denselben drehen kann.

Zur Drehung des Inductors dient der am Hebel H befindliche Griff. Damit aber die Drehung desselben genau 180° beträgt, so befinden sich auf der Platte $B'B'$ die Stücke $L\ L'$ Fig. 1 und 3. Durch ein jedes Loch von L und L' geht eine der Länge nach durchbohrte Mikrometerschraube $m\ m'$, welche so weit durch $L\ L'$ geschraubt werden, bis der Hebel, wenn er an der einen Schraube anliegt, durch Drehung beim Anliegen an der anderen Schraube genau einen Bogen von 180° beschreibt; etwaige Ungenauigkeit findet man durch die hervorzubringende Ablenkung der Magnete und lässt sich leicht durch die Schrauben corrigiren.

Diese Schrauben haben aber ausserdem noch den Zweck, den Inductor selbst (die Drahtwindungen desselben) symmetrisch gegen den magnetischen Meridian zu stellen. Um dieses zu erreichen, wird durch eine der Mikrometerschrauben (in der Zeichnung Fig. 3 durch m') ein dünner Messingdraht O gesteckt, welcher an dem einen Ende einen Vorsprung hat, der sich gegen den Kopf der Schraube m' anlegt; an dem anderen Ende dieses dünnen Drahtes befindet sich eine Schraubenmutter, welche sich nur bis zu einer gewissen Grenze auf diesen Draht schrauben lässt. Ist nun dieser Draht auch durch den Hebel gesteckt, so hat die Drehung desselben ein ganz bestimmtes Maass und man beobachtet die Wirkung dieser Drehung am Galvanometer. Steht nun der Inductor wirklich symmetrisch gegen den magnetischen Meridian, so muss, wenn dieser dünne Draht losgenommen und durch die Schraube m und den Hebel gesteckt wird, die Grösse der Ablenkung der Magnete beim Drehen des Hebels dieselbe sein wie vorhin. Findet aber keine gleich grosse Wirkung statt, so erkennt man leicht, in welchem Sinne der Kasten mit seinem Inductor gedreht werden muss, und in diesem Falle wird man den Versuch wiederholen.

Um den Draht des Inductors in leitende Verbindung mit dem Multiplicator zu bringen, hat sich folgende Einrichtung praktisch bewährt. Die Achse A Fig. 1 ist weit durchbohrt, durch diese Oeffnung wird der Anfang und das Ende des auf der Inductionsrolle gewickelten Drahtes von der Achse und unter sich isolirt durchgeführt. Auf ein jedes der durchtretenden Drahtenden $b\ b'$ (Fig. 1 u. 4) werden die von stark gehämmertem Kupferblech schneckenförmig gewundenen Federn $f\ f'$ mittelst kleiner Schrauben geklemmt. Die Enden dieser

Federn werden mit den auf der unteren Fläche B befindlichen Klammern $k\,k'$, leitend verbunden und von-hier aus gehen die durch die Schrauben $t\,t'$ angeklemmten Drähte zum Multiplicator.

Mit der unteren Fläche B Fig. 1 und 2 und der dagegen senkrechten C (in der Papierebene gedacht) sind in einem gleichschenklichen Dreiecke drei starke Messingcylinder $Z\,Z^1\,Z^2$ und $Z'\,Z''\,Z'''$, welche in einen Konus übergehen, sehr fest verbunden. Diese Dreiecke müssen durchaus congruent und die Verbindungslinie $Z^1\,Z^2$ genau parallel mit $Z'\,Z''$ sein.

Es wird der ganze Apparat auf eine mit drei Fussschrauben versehene Marmorplatte N Fig. 1 gestellt, in welcher den drei in einem Konus auslaufenden Cylindern entsprechende Vertiefungen sich befinden. Um nun die Drehungsachse des Inductors genau senkrecht stellen zu können, wird auf die obere Platte P Fig. 1 eine Libelle gesetzt und diese mittelst der drei Fussschrauben der Marmorplatte N (nach vorhergegangener Berichtigung derselben) zum Einspielen gebracht. In der Mitte der Platte P lässt sich eine kleine Stahlspitze einsetzen, auf welcher eine Magnetnadel spielt; eine scharfe Linie, durch die Mitte der Platte gezogen, dient als Index der Magnetnadel, mit deren Hilfe der Inductor annähernd zu orientiren ist.

Aus dem Mitgetheilten geht schon hervor, dass, um die Achse AA' horizontal zu legen, der ganze Inductor mit den drei auf der Platte CC befindlichen Cylindern in die Vertiefungen der Marmorplatte gestellt wird. Zur genauen Horizontalstellung der Achse wird die Brücke Fig. 6 auf die cylindrischen, gleich dicken Zapfen derselben gestellt und auf diese dieselbe Libelle wie vorhin; auch dieselbe Spitze mit der Magnetnadel wird hier zur Orientirung angewandt, indem der cylindrische untere Theil der Spitze in das Loch in der Mitte der Brücke passt.

Es ist nicht zu verkennen, dass die Aufstellung eines Galvanometers, Inductors und Fernrohrs zur Messung der Inclination im Vergleiche zur Aufstellung eines Nadelinclinatoriums zeitraubender und mühsamer ist, obgleich man sich dazu sehr bald eine gewisse Fertigkeit aneignen kann. Bedenkt man aber die Schwierigkeiten, welche gute Inclinationsmessungen mit dem Nadelinclinatorium mit sich führen, wie abhängig der Beobachter von der Güte des Instruments selbst ist, ganz besonders von der vollkommenen Cylindricität der dünnen Zapfen und gleichen Dicke derselben, von der vollstän-

digen Berichtigung der Nadeln, um einen möglichst kleinen Collimationsfehler zu haben, ferner mit welcher Sorgfalt dieselben behandelt werden müssen, um sie gut zu erhalten, und wie leicht diese, wenn nicht die grösste Vorsicht angewandt ist, beschädigt werden, sei es durch Rostflecke der dünnen Zapfen oder gar durch eine Verletzung derselben durch hartes Auflegen auf die Krystallplatten etc., was doch auf grösseren Reisen sehr störend sein kann: so wird man, wenn man die Wahl hat, die mühsamere Aufstellung des Erdinductors um so weniger scheuen, da die mit demselben zu machenden Beobachtungen und Berechnung der Resultate so einfach wie möglich sind; auch kann der Apparat selbst nur durch die grösste Ungeschicklichkeit beschädigt werden.

Ueber einen neuen Polarisations- und Achsenwinkelapparat.

Von

E. Schneider,

Mechaniker in Währing bei Wien.

(Hiezu Tafel XXIV.)

Im Juli des Jahres 1875 publicirte im 50. Bande des Philosophical Magazine Professor W. G. Adams ein neues Princip eines Polarisationsmikroskops.

Die Forderungen, die an dasselbe gestellt wurden, waren zufolge jener Publikation dreierlei:

Erstens sollte das neue Mikroskop ein sehr grosses Gesichtsfeld haben, so dass es die beiden Achsenbilder des brasilianischen Topas gleichzeitig enthält;

zweitens sollten mit dem Instrumente die Winkel gemessen werden, welche von den beiden optischen Achsen in doppelt-brechenden Krystallen eingeschlossen werden, und

drittens sollte man damit ein Mittel bekommen, um bei Krystallen, in welchen die Separation der beiden Achsen eine sehr weite ist, mit Immersion arbeiten zu können.

Diese Vortheile sollten durch Modification der Stellungen und Brennweiten der in gewöhnlichen Polarisationsmikroskopen angewendeten Linsen erreicht werden, so dass die Lemniscaten dann am schönsten gesehen werden, wenn zwischen den beiden Linsen, zwischen welche der Krystall gesetzt wird, ein Abstand von 1¼ Zoll (engl.) ist. In den resultirenden Zwischenraum sollte ein (central piece) Mittelstück gesetzt werden, bestehend aus einer runden Büchse, auf deren Boden und Deckel je eine stark gekrümmte planconvexe Linse derartig befestigt wäre, dass die Planflächen derselben einander zugekehrt ständen und die Krümmungsmittelpunkte der convexen Flächen zusammenfallen würden. Zwischen die beiden Linsen sollten die zur Untersuchung gelangenden Krystalle gesetzt und die Büchse um eine

Achse drehbar sein, welche durch die Krümmungsmittelpunkte der convexen Flächen geht.

Die Form und Stellung des Beleuchtungsspiegels und der Linsen des projectirten Polariskopes ist aus Taf. XXIV Fig. 1 ersichtlich. *A* ist ein Hohlspiegel von 1½ Zoll (engl.) Durchmesser, wie man solche bei den gewöhnlichen Mikroskopen verwendet. Eine biconcave Linse *B* ist derart angebracht, dass ihr negativer Brennpunkt mit dem Brennpunkte von *A* zusammenfällt. Die vom Hohlspiegel reflectirten Strahlen laufen also hinter der Linse *B* parallel weiter. Zur Verminderung der Aberration in bestmöglicher Weise ist der Krümmungshalbmesser der dem Hohlspiegel zugekehrten Fläche sechsmal so gross als jener der zweiten Linsenfläche. Die nun parallel laufenden Lichtstrahlen fallen auf eine Turmalinplatte oder ein anderes polarisirendes Mittel von etwa dem Durchmesser der Linse *B* und treffen polarisirt auf die biconvexe Linse *D*, deren erste Fläche zur möglichsten Verminderung der Aberration stärker gekrümmt ist als die zweite. Diese Linse hat 1 Zoll Oeffnung und 1¼ Zoll (engl.) Brennweite. Ein viertel Zoll weit von dieser ist eine planconvexe Linse *E* von ⅘ Zoll Durchmesser und 1 Zoll Brennweite angebracht. Diese drei Linsen *B*, *D* und *E* sind in einem Rohre gefasst, und es werden auf den Hohlspiegel parallel auffallende Strahlen durch diese Linsencombination einen halben Zoll weit von der Planfläche von *E* vereinigt werden. Die Lichtstrahlen fallen nun auf das oben erwähnte Mittelstück, welches aus zwei Planconvexlinsen besteht, welche nahezu Hemisphären sind und zwischen welche der Krystall gelegt wird. Die eine dieser Linsen *M* ist 5^{mm} dick; ihr Krümmungsradius ist 6,4^{mm}. Die zweite Linse *N* ist 7^{mm} dick; deren Krümmungsradius beträgt 9,6^{mm}. Diese Linsen müssen so gefasst sein, dass deren Krümmungsmittelpunkte genau zusammenfallen und sich im Brennpunkte *O* des Linsensystems *B D E* befinden. Der Zwischenraum zwischen *M* und *N* wird 4^{mm} betragen, welche Dimension für die meisten Krystalle ausreicht. Würde man statt obiger Linsen *M* und *N* solche von 4½ und 6⅓^{mm} Dicke verwenden, so würde sich ein Zwischenraum von 5^{mm} ergeben, wenn sie in der zweckdienstlichen Weise befestigt sind. Wie bereits erwähnt wurde, müsste das Mittelstück derart montirt sein, dass der gemeinschaftliche Krümmungsmittelpunkt von *M* und *N* mit dem Brennpunkte des ersten Linsensystems coincidirt. Es werden dann die Strahlen das Mittelstück durchdringen, ohne in ihren Richtungen

alterirt zu werden, weil der Krystall dieselben nahezu ebenso brechen wird wie Glas. Das Licht wird also durch dieses Mittelstück ebenso gehen, als wenn es durch eine Glaskugel ginge.

Hinter dem gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkte O werden die Strahlen divergirend auf eine Planconvexlinse von 1 Zoll (engl.) im Durchmesser und 1¼ Zoll Brennweite treffen. Der Abstand dieser Linse von O beträgt beiläufig ⅝ Zoll. Einen halben Zoll weit von F ist eine weitere Linse G von 1½ Zoll Durchmesser und 1¾ Zoll Brennweite angebracht, welche die ankommenden Lichtstrahlen parallellaufend macht. In einer Entfernung von 3 Zoll ist die Linse H von etwas weniger wie 3 Zoll Brennweite und 1½ Zoll Oeffnung angebracht. Oberhalb dieser Linse befindet sich der Analyseur mit irgend einem Hilfsapparate, wie z. B. jenem von Mr. Spottiswoode, mit welchem man den Einfluss von Quarz oder anderen Krystallen auf polarisirtes Licht untersuchen kann. Im Brennpunkte von H würde ein Fadenkreuz und oberhalb des Analyseurs für genaue Messungen eine einfache Linse oder ein Ocular angebracht sein.

Der Zweck, der bei Combination der Zerstreuungslinse mit dem Hohlspiegel verfolgt wurde, war die Vermeidung der Aberration und des damit verbundenen Lichtverlustes. Dies bedingt jedoch eine grosse Turmalinplatte, die in solcher Grösse schwer gut erhältlich wäre. Diese Schwierigkeit ist in bestehenden Polariskopen in der Weise vermieden, dass man die vom Beleuchtungsspiegel reflectirten Strahlen durch ein Linsensystem nahe beim polarisirenden Turmalin zur Kreuzung bringt und diese nun divergirenden Strahlen hinter dem Polariseur durch ein zweites Linsensystem wieder parallellaufend macht.

Das Mittelstück kann jedem beliebigen Polariskope beigegeben werden, vorausgesetzt dass zwischen der letzten Linse des unteren Linsensatzes und der ersten des oberen Linsensatzes genügend Raum vorhanden ist, um in demselben die zwei Linsen M, N und den Krystall unterbringen und sammt und sonders um eine durch den gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkt von M und N gehende Achse drehen zu können.

Die Linsensätze $BCDE$ und FGH sollten derart untergebracht sein, dass wenn der Krystall allein sich in O befindet, die Lemniscaten am besten gesehen würden. Bei Messungen sollte der Krystall zwischen den Fassungen von M und N untergebracht werden. Die Büchse mit den Fassungen von M und N sollte durch zwei Zapfen P und Q getragen werden, welche

mit einander eine durch O gehende Achse bilden; die Büchse sollte ferner gross genug sein, um den Kork sammt dem Krystalle aufnehmen zu können.

Die Achse PQ ist durch ein Messingrohr getragen, welches mit einem zweiten, das über die Fassung von BCD und E passt, ein ganzes Stück bildet. Ein gradirter Halbkreis ist an dem Messingrohre befestigt, auf welchem ein mit der Achse PQ verbundener Index den Winkel anzeigt, um welchen das Mittelstück verdreht wird.

Wird nun die Büchse mit den Linsen M und N um ihre Achse verdreht, so werden die durch das Centrum O der gekrümmten Linsenflächen gehenden Strahlen keine Aenderung in ihrer Richtung erfahren. Wenn also ein Krystall zwischen M und N gesetzt wird, so können die Lichtstrahlen denselben in jeder Richtung passiren, wenn die Büchse um PQ verdreht wird, so dass man von zweiachsigen Krystallen beide optischen Achsen nach einander in die Mitte des Gesichtsfeldes bringen kann. Auf diese Weise können die Winkel, welche von den optischen Achsen eingeschlossen werden, gemessen werden.

Das Mittelstück MN ist büchsenförmig construirt, um in dasselbe eine Flüssigkeit in solchen Fällen bringen zu können, wenn die Achsenbilder zu weit von einander abstehen, als dass sie in Luft gesehen werden könnten.

Die Vortheile, welche bei Anwendung des Mittelstückes erreicht werden sollten, waren:

1. ein grosses Gesichtsfeld. — Wenn das Gesichtsfeld in Luft ohne das Mittelstück 74° beträgt, so wird dasselbe durch Einsetzung von MN auf circa 128° erhöht, indem das Mittelstück denselben Winkel in Glas gibt, der ohne diesen in Luft gegeben ist. Das Gesichtsfeld kann so gross gemacht werden, dass es beide Achsenbilder des brasilianischen Topas enthält.

II. Wenn die Ebene der optischen Achsen senkrecht auf der Achse PQ steht, so kann jede der beiden Achsen eines zweiachsigen Krystalles in die Mitte des Gesichtsfeldes, wo sich die Spinnenfäden kreuzen, gebracht werden. Man kann also auf ganz genaue Weise die Achsenwinkel messen. Anstatt oberhalb des Analyseurs eine Linse oder ein Ocular anzuwenden, kann man den Mittelpunkt des Gesichtsfeldes durch Anbringung von Kreuzfäden in der Hälfte des Abstandes zwischen D und E fixiren. Von diesen beiden wird durch die Linsen

E, *M*, *N*, *F* und *G* etwa $^1/_{10}$ Zoll weit von *G* ein Bild erzeugt werden.

In der Bildebene dieses Fadenkreuzes soll das zweite angebracht werden, so dass diese Fadenkreuze durch ihr Coincidiren das Centrum des Gesichtsfeldes bestimmen würden. Das zweite Fadenkreuz müsste sich im Brennpunkte von *H* befinden, so dass man es beim Durchschauen durch den Analyseur sehen könnte.

Dieses Instrument scheint jedoch nicht ausgeführt worden zu sein, wenigstens wurde seit 1875 nichts mehr in dem obgenannten Werke davon erwähnt.

Aufgefordert von verschiedenen Seiten, habe ich es unternommen, ein Instrument nach Professor Adams' Princip anzufertigen, und machte mich Herr Dr. A. Brezina, Custos im k. k. Hof-Mineraliencabinet zu Wien, mit den verschiedenen bestehenden Constructionen von Polariskopen bekannt, dabei zunächst die Forderung stellend, dass ich bei einer etwaigen Construction eines Polarisationsmikroskops darauf Bedacht nehmen solle, dass man die Krystallplatte in ihrer eigenen Ebene drehen könne, um dadurch die Ebene der optischen Achsen während der Beobachtung durch das Instrument senkrecht zur Umdrehungsachse (*PQ* des Adams'schen Instrumentes) stellen zu können, ohne den Krystall resp. die Büchse aus dem Polariskope entfernen zu müssen. Es kam nach mancherlei Versuchen das Seite 119 ff. dieses Bandes beschriebene Instrument zu Stande. Die Resultate, die mit demselben erzielt wurden, bewogen Herrn Professor Adams, ein Instrument dieser Gattung zu bestellen. Die Versuche, die Herr Dr. Brezina mit dem angeführten Instrumente anstellte, brachten ihn dahin, weitere Forderungen an dasselbe stellen zu müssen. Da nämlich die Ebene der optischen Achsen nicht immer genau senkrecht auf den natürlichen oder künstlichen Krystallflächen steht, so kam es vor, dass man die von den optischen Achsen eingeschlossenen Winkel nicht richtig bestimmen konnte, weil eben ihre Ebene einen mehr oder weniger grossen Winkel mit der optischen Achse des Mikroskopes einschloss. Zudem muss man berücksichtigen, dass für den Constructeur die Senkrechtstellung der optischen Achse auf die Umdrehungsachse mit Schwierigkeiten verbunden ist, dass also gleich bei der Ausführung ein empfindlicher Instrumentalfehler unterlaufen könnte. Diesem Uebelstande konnte nur durch eine Drehung des Krystalles um dessen stumpfe Mittellinie abgeholfen

werden; auch sollte diese eventuell erforderliche Drehung um die zweite Mittellinie gemessen werden können. Weiters ergab sich das Bedürfniss, den Achsenwinkel auch in entgegengesetzter Lage der Krystallplatte (d. h. die bisher untere Seite der Platte nach aufwärts gelegt) messen zu können. Es sollte der Krystall um 180° umgekippt werden können, ähnlich wie man bei einem Theodoliten das Fernrohr durchschlägt. Dieses Umkippen sollte jedoch ermöglicht werden, ohne dass man zu diesem Behufe den Krystall aus dem Instrumente entfernen müsste, weil ja trotz aller Sorgfalt dadurch Fehler verursacht werden könnten. Wollte man nun den Krystall umkippen, so musste man auch die Fassung der Linsen, zwischen welchen er liegt, umkippen. Da nun bei den mir bekannten Linsencombinationen, bei welchen das Gesichtsfeld beide Achsen des brasilianischen Topases wirklich umfasst, die Linsen alle sehr nahe an einander stehen, wie es z. B. aus der Zeichnung (Taf. VI) des oben angeführten Instrumentes ersichtlich ist, so dass man die Fassungen der mittleren Linsen nicht vor den nächststehenden Linsen vorbeidrehen konnte, ohne letztere zu berühren, oder dieselben so schwach im Material halten zu müssen, dass man keine sichere Führung mehr für die Mittellinsen herstellen könnte, so musste eine Linsencombination ausfindig gemacht werden, welche die Erfüllung der aufgezählten Bedingungen ermöglicht.

Die von mir verwendete Combination gestattet die Erfüllung obiger Anforderungen, und hat das neue Instrument ein Gesichtsfeld aufzuweisen, das beide Achsenbilder von Datolith umfasst. Ich erlaube mir im Nachfolgenden das Instrument zu beschreiben.

Auf Taf. XXIV gibt Fig. 2 eine Totalansicht des Instrumentes.

A ist ein Spiegel, der darauffallendes Licht in das Mikroskop reflectirt. Bei *B* befindet sich eine Sammellinse, oberhalb dieser befindet sich der Polariseur *C*. Als solcher wurde beim ersten Instrumente ein gewöhnliches Nicol'sches Prisma verwendet. Ich beabsichtige jedoch von nun an Doppelspathprismen nach dem Principe von Prazmowsky zu verwenden, weil diese leichter zu handhaben sind und ein grösseres Gesichtsfeld haben. Oberhalb des Polariseurs befindet sich wieder eine Sammellinse *D*, welche von aussen mit Hilfe der Knopfschrauben α (und β auf der anderen Seite) verstellt werden kann. Die Fassung der Linse *B* und des Polariseurs kann um 360° um die Instrumentachse in der Fassung der Linse *D* verdreht werden. Ueber der Fassung

von *D* befindet sich das Mittelstück *M*. Dasselbe ist unten und oben eingedreht, so dass die Fassungen *R* und *R'* eingeschoben werden können, wodurch letztere *M* tragen und gewissermassen die Verticalachse bilden, um welche *M* verdreht werden kann, wenn man den Krystall um einen bestimmten Winkel in horizontalem Sinne drehen, etwa aus der Kreuz- in die Hyperbelstellung bringen will. Das Mittelstück ist von zwei Seiten durchbohrt und zwar in der Richtung der optischen Achse des Mikroskopes und in einer darauf senkrechten. Die Bohrung in der Richtung der optischen Achse ist concentrisch mit den inneren Oeffnungen von *R* und *R'* und hat gleichen Durchmesser wie diese. Die auf der optischen Achse senkrechte Bohrung ist conisch, und muss ihre Achse die optische Achse unter einem rechten Winkel schneiden. Der Querschnitt des Mittelstückes ist aus Fig. 3 (Taf. XXIV) ersichtlich. Concentrisch mit der Bohrung ist an *M* ein kreisrunder Ansatz angedreht, der einer Scheibe *N* zur Führung dient. Auf dieser ist ein Limbuskreis befestigt (*L*), innerhalb welchem ein Alhydadenkreis mit zwei diametralen Nonien (*O*) verdreht werden kann. Dieser Alhydadenkreis ist eingedreht, und wird in dieser mit dem Limbus concentrischen Vertiefung eine genau passende Messingplatte *P* mittelst zweier Schrauben *a* und *b* befestigt. Es ist folglich aus dem Gesagten zu ersehen, dass die Achse der Platte *P* mit der Achse des Limbus und mit der Achse der conischen Bohrung in *M* identisch ist, also auch die optische Achse des Mikroskopes in *Q* schneiden muss, wenn das Mittelstück richtig bearbeitet worden ist.

Auf der Platte *P* sind Fig. 4a (Taf. XXIV), 4b, 4c zwei Messingstützen *S* und *S'* befestigt, welche einem Bogenstücke *T* zur Führung dienen. Das Centrum dieses Bogenstückes *T* muss sich im Durchschnittspunkte der optischen mit der horizontalen Achse, also in *Q* befinden. Daher muss auch die optische Achse sich in der durch *T* gelegten Ebene befinden. Auf *S'* ist ein Getriebe *G* befestigt, mit dessen Hilfe man *T* fein um *Q* verdrehen kann (aus der Figur ersichtlich). Mit dem Bogenstücke *T* ist eine supportartige Platte *U* verbunden, welche die beiden Linsen *E* und *F* und zwischen *E* und *F* den Krystall trägt. Die Linsen *E* und *F* sowie ihre Fassungen sind in Fig. 5 in vergrössertem Maasse dargestellt.

Die Fassung der Linse *E* hat an ihrer äussersten Peripherie etwa 120 Zähne, ist mit ihrem conischen Ansatze genau in *U* einge-

passt und trägt ein Muttergewinde, in welches die Fassung der Linse *F* geschraubt wird. Sind diese beiden Fassungen zusammengeschraubt, so bilden die gekrümmten Linsenflächen mit einander genau eine Kugel, innerhalb der sich ein freier Raum von etwa 1—1,5 ^{mm} Dicke befindet, bestimmt, den zu untersuchenden Krystall mit oder ohne Flüssigkeit aufzunehmen. Die Krümmungsmittelpunkte der sphärischen Flächen von *F* und *E* müssen genau zusammenfallen und sich im Centrum der in *U* befindlichen conischen Führung für die Fassung von *E* befinden. Das Centrum der Fassung von *E* muss aber auch im Centrum des Bogenstückes *T* und im Durchschnittspunkte der optischen mit der Limbusachse, also in *Q* sein.

In die gezähnte Peripherie der Fassung von *E* greifen die Zähne eines kleinen auf *U* befestigten Zahnrades *V* ein. Dieses ist das letzte Glied einerReihe von Zahnrädern *V'*, *V''*, *V'''* und *W* (Fig. 4b) und wird also die Verdrehung von *E* und *F* vermitteln, wenn *W* mit Hilfe eines Griffes verdreht wird. Nachdem die im Mittelstücke *M* (Fig. 2) untergebrachten, mit Hilfe von Schräubchen regulirbaren planconvexen Linsen *H* und *I* weit genug von einander abstehen, so kann zwischen deren Planflächen *U* sammt den Fassungen von *E* und *F* um 360° verdreht werden, ohne selbe zu berühren, selbst wenn *T* derart verstellt ist, dass die Platte *U* mit der Limbusachse einen Winkel von 15° einschliesst.

Unterhalb *H* und oberhalb *I* befinden sich endlich in den in *M* eingeschobenen Enden von *R* und *R'* je ein von aussen drehbares Fadenkreuz, *FF'* und *ff'*; auf das obere Fadenkreuz werden die beiden Achsenbilder nach einander eingestellt, wenn man den Achsenwinkel messen will.

Wie oben bereits erwähnt wurde, ist in *M* das Rohrstück *R'* eingepasst; an demselben sind 4 je unter 90° von einander abstehende Indices (*i*) angebracht, auf welche man die am Ansatze *kk'* des Mittelstückes *M* befindlichen Kreistheilungsstriche einstellen kann, wenn man *M* um einen bestimmten Winkel um die optische Achse des Instrumentes verdrehen will. Im Innern von *R'* ist eine biconvexe Linse *J* und am oberen Ende eine weitere biconvexe Linse *K* angebracht. Die Linse *J* ist wie die vorhergehenden durch Schräubchen regulirbar.

Oberhalb von *R* ist der Analyseur *Z* angebracht.

Um das Eindringen störenden Lichtes bei der in der Platte *P*

befindlichen Oeffnung zu verhindern, sind lederne Blenden zweckentsprechend angebracht.

Im Nachfolgenden verdanke ich Herrn Dr. A. Brezina, Custos des k. k. Hof-Mineraliencabinets in Wien, eine Anleitung zum Gebrauche obigen Instrumentes.

Bei der Arbeit mit dem Schneider'schen Polariskop ergeben sich die Aufgaben und ihre Lösungen in der folgenden Reihe.

A. Die Arme des Fadenkreuzes *ff'* Fig. 2 Taf. XXIV zu den Hauptschnitten der Nicols parallel und senkrecht, jene von *FF'* zu denselben unter 45° zu stellen.

1. Man stellt die Nicols ohne eingeschaltete Platte auf Dunkelheit. 2. Man schaltet eine beliebige, zur Bisectrix senkrechte Platte ein und dreht das Mittelstück *M* bis zur Erreichung der Kreuzstellung, bei welcher die Hauptschnitte der Platte mit denen der Nicols zusammenfallen. 3. Nun dreht man das obere Fadenkreuz *ff'* so, dass seine Balken denen der Kreuzfigur parallel sind. 4. Sodann stellt man das untere Fadenkreuz *FF'* so, dass seine Arme mit denen von *ff'* unter beiläufig 45° geneigt sind.

B. Messung des scheinbaren Abstandes der zwei Achsenbilder.

1. Ohne Platte werden die Nicols anf Dunkelheit gekreuzt. 2. Die Platte wird eingeschaltet und das Mittelstück bis zum Erscheinen der Kreuzfigur gedreht. 3. Nun wird, unter gleichzeitiger Gegendrehung der Krystallplatte mittelst der Schraube *G*, das Mittelstück *M* aus der früheren Stellung so lange herausgedreht, bis unter fortwährender Erhaltung der Kreuzfigur die Ebene der optischen Achsen (der die beiden Ringe verbindende Balken der Kreuzfigur) parallel dem einen Faden *f* bleibt, wenn der Alhydadenkreis gedreht wird. 4. Nun werden mittelst der Schraube *g* diese beiden parallelen Linien, der eine Fadenkreuzbalken und der schwarze Achsenbalken zur wirklichen Deckung gebracht, wodurch die scheinbare Ebene der optischen Achsen in eine durch die optische Achse des Instrumentes gehende Verticalebene gebracht ist, wonach neuerlich durch Drehung des Alhydadenkreises constatirt wird, ob sich noch immer die beiden Achsenbilder entlang *f* bewegen. 5. Das Mittelstück *M* wird gegen *R* und *R'* um 45° gedreht, was ver-

mittelst der Eintheilung $k\,k'$ und der Indices i ermöglicht wird; dadurch verwandelt sich die Kreuz- in die Hyperbelfigur und es können nun 6. durch Drehung des Alhydadenkreises nach einander die beiden Achsenpositionen zur Deckung mit der Fadenkreuzmitte gebracht werden (wobei man sich zur Einstellung des monochromatischen Lichtes bedient); die Differenz der hiebei genommenen Ablesungen an o gibt die scheinbare Bogendistanz der beiden optischen Achsen, gemessen in jenem Glase, woraus die inneren Linsen bestehen. Dieselbe Messung wird zur Controle und Elimination eines Theiles der Centrirungsfehler wiederholt mit durchgeschlagenem Krystallträger U, was mittelst der Drehung des Alhydadenkreises um O bewerkstelligt wird.

C. Messung des Winkels zwischen der Plattennormale und einer scheinbaren optischen Achse.

1. Vor Einbringung der Platte werden die Nicols auf Dunkelheit gestellt, sodann die Stellung des oberen Nicols abgelesen und derselbe entfernt. 2. Die Platte wird eingebracht; an die Stelle des oberen Nicols wird mit Klebwachs ein planparalleles Spiegelglasstückchen so befestigt, dass seine Ebene mit der optischen Achse des Instrumentes einen Winkel von 45° bildet; ein Licht (Kerzenflamme) wird seitlich so angebracht, dass der Lichtschein zuerst an der Unterseite der Planparallelplatte entlang der optischen Achse des Instrumentes hinabgespiegelt wird und nach Reflexion an den horizontalen Glasflächen im Innern des Instrumentes wieder zur Planparallelplatte hinaufgesandt und durch dieselbe bis zum Auge durchgelassen wird. Durch Bewegung der Krystallplatte mittelst des Alhydadenkreises unterscheidet man leicht das an derselben oder an der Oberseite der Linse E erzeugte Spiegelbild des Fadenkreuzes f von dem an den festen Horizontalflächen entstandenen; das letztere dient dazu, um die richtige Stellung der Spiegelglasplatte zu controliren, während das erstere dazu dient, die Krystallplatte zur optischen Achse des Instrumentes senkrecht zu stellen. Hierauf wird am Alhydadenkreis abgelesen. 3. Nun wird die Planparallelplatte wieder entfernt, der obere Nicol eingesetzt und vermittelst des früher vermerkten Zeichens in die der Dunkelstellung entsprechende Lage gebracht, sodann die Kreuzstellung durch Drehung des Mittelstückes und Gegendrehung der Platte mittelst G so herbeigeführt, dass der schwarze Mittelbalken parallel dem zur Drehungs-

achse des Alhydadenkreises senkrechten Faden f zu stehen kommt. 4. Hierauf wird durch Drehung der Schraube G allein die Krystallplatte so in ihrer eigenen Ebene gedreht, dass der einzustellende Achsenring durch den einen Faden f halbirt wird. 5. Man dreht das Mittelstück M um 45° und bringt durch Drehung von O die Hyperbel möglichst nahe zum Durchschnitt mit der Fadenkreuzmitte, was im Allgemeinen nicht vollkommen gelingt, sondern erst durch eine Correctur mit der Schraube G erreicht wird, wonach mit Benutzung von monochromatischem Lichte die Feineinstellung und Ablesung gemacht wird, wobei die Differenz der gegenwärtigen Ablesung gegen die der Plattenhorizontalstellung den Winkel der scheinbaren Achse gegen die Plattennormale gibt.

Ueber eine neue Methode zur Bestimmung der Wärmecapacität von Flüssigkeiten.

Von

L. Pfaundler.

(Aus den Wiener Sitzungsberichten vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

Zur Bestimmung der Wärmecapacität von Flüssigkeiten diente bisher vorwiegend die sogenannte Mischungsmethode, und zwar wurde dieselbe auf zweifache Weise ausgeführt. Entweder man erhitzte die zu untersuchende Flüssigkeit in einem passenden Gefässe auf eine bekannte Temperatur und tauchte dieselbe in das mit Wasser gefüllte Calorimeter, oder man füllte dieselbe in letzteres und führte derselben eine bestimmbare Wärmemenge zu durch Eintauchen eines erhitzten Körpers von bekannter spec. Wärme.

Die erstere Methode lässt zwar eine ziemliche Genauigkeit zu, hat aber den Nachtheil, dass man nur die mittlere specifische Wärme zwischen weit aus einander stehenden Temperaturen erhält, was insbesondere bei Flüssigkeiten, deren Wärmecapacität mit der Temperatur meist rasch zunimmt, misslich ist. Die zweite Methode vermeidet letzteren Uebelstand, hat aber mit der ersten alle jene Schwierigkeiten gemein, welche erstens mit der Erhitzung auf eine constante und genau bestimmbare Temperatur, zweitens insbesondere mit der verlustlosen Ueberführung des erhitzten Körpers verbunden sind. Man ist dabei immer zwischen zwei Fehlerquellen. Ist der Erhitzungsapparat sehr nahe am Calorimeter angebracht, so ist Gefahr, dass das letztere Wärme von ersterem aufnimmt; ist er dagegen weiter entfernt, so ist ein Verlust an Wärme aus dem erhitzten Körper während der Ueberführung unvermeidlich.

So sinnreich man auch diese Verluste theils durch Construction verschiedener Erhitzungsapparate möglichst zu verkleinern, theils durch Versuche und Rechnung zu eliminiren gesucht hat, lag doch immer

das Bedürfniss nach einer Methode vor, wodurch dieselben ganz vermieden werden können.

Um dies zu erreichen, schien mir der nächstliegende Weg der zu sein, die der Flüssigkeit zuzuführende Wärmemenge nicht erst ausserhalb des Calorimeters zu erzeugen und an einen erhitzten Körper überzuführen, sondern sie in der Flüssigkeit selbst entstehen zu lassen.

Als Wärmequelle benützte ich theils chemische Vorgänge, theils die Erwärmung eines Drahtes von grossem Widerstande durch den elektrischen Strom.

Taucht man in zwei gleiche Calorimeter, die mit gleichen Gewichten verschiedener Flüssigkeiten gefüllt sind, je eine Drahtspirale von gleichem Leitungswiderstande und leitet dann durch beide einen und denselben elektrischen Strom, so sind die dadurch hervorgebrachten Wärmemengen gleich gross und daher die Temperaturerhöhungen den Wärmecapacitäten umgekehrt proportional. Dies ist das Princip der Methode, deren Ausführung ich nun näher beschreiben will.

Beschreibung des Apparates.[1])

An einem Gestelle A ist ein Brettchen B vertical verschiebbar und mittelst Schrauben in beliebiger Höhe festzustellen.

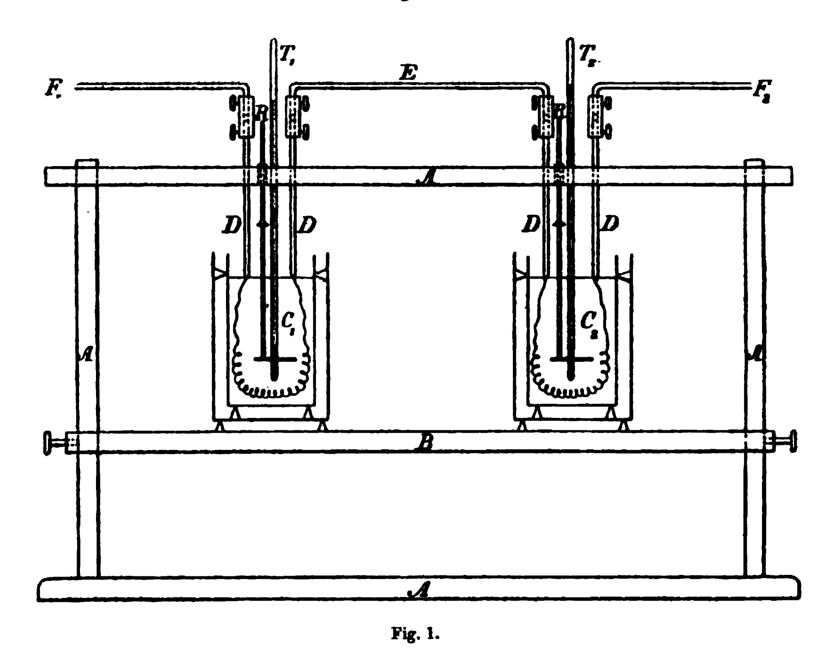


Fig. 1.

1) Fig. 2 stellt den Apparat in perspectivischer Ansicht dar.

Auf demselben stehen in gewöhnlicher Anordnung die beiden Calorimeter C_1 und C_2. Die beiden empfindlichen, möglichst gleichen und unter einander verglichenen Thermometer T_1 und T_2 tauchen in die Flüssigkeiten, welche durch die kleinen Rührer R_1 und R_2 in Bewegung erhalten werden. Die dicken Zuleitungsdrähte D tauchen mit ihren zugespitzten Enden ganz wenig unter die Flüssigkeitsoberflächen und tragen die beiden Spiralen aus dünnem Platindrahte, welche daran gelöthet sind. Diese Spiralen sind aus gleich langen Stücken ein und desselben Drahtes verfertigt und ausserdem auf ihren ganz gleichen Leitungswiderstand mittelst der Wheatstone'schen Brücke

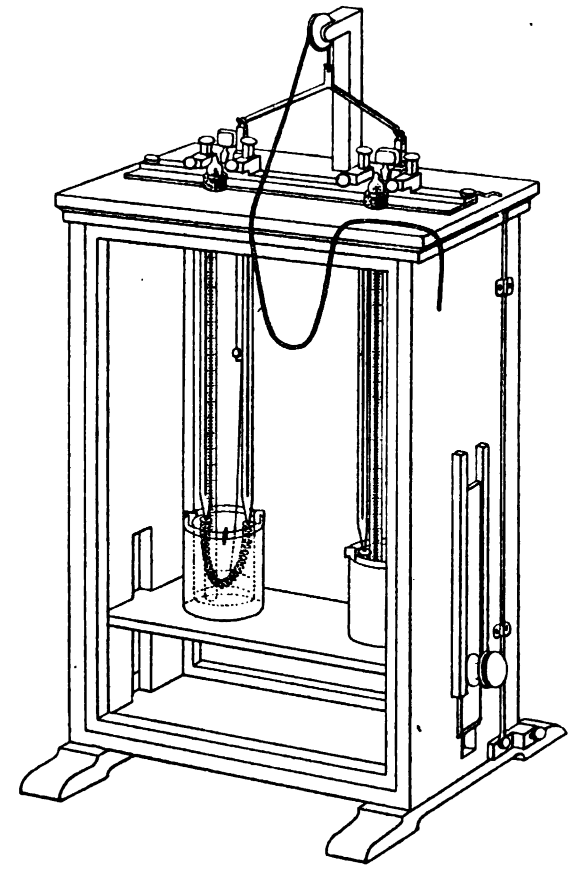


Fig. 2.

geprüft. Die beste Prüfung ergibt sich übrigens durch die Anwendung der zu beschreibenden Methode selbst. Die Enden F_1 und F_2

stehen mit den Polen einer Batterie, die beiden Spiralen unter sich durch den Draht E in Verbindung. Es versteht sich von selbst, dass die Elemente der Batterie so combinirt werden, dass sie das Maximum der Stromstärke liefern. Es ist bequem, in den Schliessungskreis einen Stromschliesser und irgend ein Rheoskop von geringem Widerstande einzuschalten. Vor und hinter dem Apparate endlich sind Glasplatten zur Abhaltung von Luftströmungen und vom Beobachter ausgehender Erwärmungen angebracht.

Ausführung der Versuche.

Man senkt das Brettchen B, setzt die Calorimeter nach einander auf die Wage, füllt sie, nahe zur gleichen Höhe, das eine mit Wasser, das andere mit der zu untersuchenden Flüssigkeit und bestimmt die Gewichtsmengen derselben. Hierauf stellt man die Calorimeter auf das Brettchen B und hebt dasselbe so weit, dass die Enden der Drähte D ein wenig eintauchen. Geringe Differenzen im Niveau der Flüssigkeiten können ausgeglichen werden durch Verschieben der Drähte D oder auch durch geringes Schiefstellen des Brettchens B. Nun stellt man die nöthigen Verbindungen her, lässt jedoch den Stromschliesser noch offen. Die beiden Rührer werden in Bewegung gesetzt und bis Ende des Versuches darin erhalten. Man beginnt die gleichzeitigen Thermometerbeobachtungen, um die Wärmeverluste der beiden Calorimeter bei ihren gegenwärtigen Temperaturen zu ermitteln. Sollten diese allzuverschieden sein, so kann man sie sehr schnell und bequem dadurch ausgleichen, dass man mit einem zangenförmig gebogenen dicken Drahte die Zuleitungsdrähte D desjenigen Calorimeters, das wärmer ist, leitend verbindet und den Strom, der nun fast ausschliesslich das andere Calorimeter erwärmt, so lange schliesst, bis letzteres dieselbe Temperatur angenommen hat. Man notirt nun bei offenen Schliessungskreise die Temperaturen in gleichen Zeitintervallen und schliesst mit Ende eines solchen den Strom. Nach ein paar Minuten ist die Temperatur um 4—8 Grade gestiegen, worauf der Strom wieder mit Beginn eines Intervalles unterbrochen und die Thermometerstände noch einige Intervalle hindurch notirt werden, um die Verluste der Calorimeter bei ihrer jetzigen Temperatur bestimmen zu können. Die Lufttemperatur braucht nicht notirt zu werden. Der ganze Versuch ist in einigen Minuten beendet. Will man ihn wiederholen, so vertauscht man diesmal die Calorimeter sammt Flüssigkeiten

und eliminirt durch das Mittelnehmen aus beiden Versuchen eine etwaige Ungleichheit der Spiralen (oder auch der Thermometer, indem man diese ebenfalls vertauscht).

Berechnung der Versuche.

Dieselbe ist höchst einfach. Sieht man einstweilen von den Correctionen wegen der Wärmeverluste der Calorimeter ab und bezeichnet man mit P_1 das Gewicht des Wassers, mit W_1 den Wasserwerth des zugehörigen Calorimeters sammt Rührer, Thermometer und Spirale, mit ϑ_1 dessen Temperaturzunahme, ferner mit P_2, W_2 und ϑ_2 die gleichnamigen Werthe für die andere Flüssigkeit, deren Wärmecapacität c bestimmt werden soll, so hat man:

$$(P_1 + W_1)\,\vartheta_1 = (P_2 c + W_2)\,\vartheta_2$$

und daraus

$$c = \frac{(P_1 + W_1)\,\vartheta_1 - W_2 \vartheta_2}{P_2 \vartheta_2}.$$

Die Werthe von W_1 und W_2, die man leicht einander gleich machen kann, werden am besten aus dem Gewichte und der specifischen Wärme der Materialien berechnet; nur die Wasserwerthe der Thermometer erhält man besser durch den Versuch. Man verfährt dabei am besten folgendermassen: Ein ganz kleines Calorimeter wird mit Wasser von der Umgebungstemperatur gefüllt und diese mit dem zu untersuchenden Thermometer unter Umrühren gemessen.

Nun nimmt man das letztere heraus, trocknet es und erwärmt es (mit der Hand) auf etwa 30° C., worauf man es schnell wieder eintaucht und nach dem neuerlichen Constantwerden der Temperatur abliest. Das Eintauchen geschieht natürlich bis zum nämlichen Theilstrich, bis zu welchem es bei den späteren Versuchen von der Flüssigkeit umgeben ist. Man erhält so den Wasserwerth des Instrumentes mit vollkommen genügender Genauigkeit, wenn das Calorimeter genügend klein ist. Bei meinen (Geissler'schen) Thermometern betrug derselbe nur 0,06^{gr}.

Was nun die Berechnung der Wärmeverluste der Calorimeter betrifft, so gestaltet sich diese bedeutend einfacher als bei den früheren Methoden. Beim Eintauchen erhitzter Körper steigt die Temperatur anfangs viel rascher als später, weshalb es nicht angeht, einfach aus den Verlusten vor und nach dem Versuche durch Berechnung des arithmetischen Mittels den mittleren Verlust per Zeitintervall während

des Versuches zu berechnen[1]). Bei der neuen Methode hingegen ist das Ansteigen der Temperatur (wenn der Strom hinreichend constant ist) sehr nahe der Zeit proportional, weil in gleichen Zeiten gleiche Wärmemengen erzeugt und diese bei der geringen Dicke des Spiraldrahtes fast augenblicklich dem bewegten Wasser mitgetheilt werden.

Es ist daher hier sehr wohl erlaubt, einfach aus den Verlusten per Zeitintervall unmittelbar vor und nach dem Versuche durch Mittelnehmen den mittleren Verlust per Intervall zu berechnen, so wie es auch anginge, den Rumford'schen Kunstgriff anzuwenden, der bei der früheren Methode immer einen Fehler mit sich bringt. Hat man so den mittleren Verlust per Intervall, so erhält man durch Multipliciren mit der Anzahl der letzteren direct den Gesammtverlust, um welchen man die Grösse ϑ_1 und ϑ_2 zu corrigiren hat.

Man erspart sich deshalb auch das Beobachten der Thermometer, während der Strom wirksam ist. Die erste Beobachtung nach Oeffnung desselben nimmt man zweckmässig nicht im Momente der Oeffnung, sondern ein Intervall später vor, was eben hinreicht, die Temperatur der Wasserschichten auszugleichen.

Weitere Vervollkommnung der Methode.

Der mitgetheilten Methode kann, wie mir scheint, nur ein wesentlicher Vorwurf gemacht werden, nämlich der, dass in Folge der Aenderung der Leitungsfähigkeit der Metalle mit der Temperatur auch die Wärmemengen ungleich werden können, die in beiden Calorimetern entwickelt werden, sobald in Folge ungleicher Wärmecapacität der beiden Flüssigkeiten die Temperatur in dem einen rascher ansteigt als in dem anderen. Nach den Versuchen von Arndsten vermindert sich die Leitungsfähigkeit der Metalle für 1 °C. Temperaturerhöhung nahe um $\frac{4}{1000}$. Bei Anstellung der beschriebenen Versuche kann die Temperatur der beiden Calorimeter wohl um etwa 5° verschieden werden. Es kann sich also auch der Widerstand der einen Spirale um 5mal $\frac{4}{1000} = \frac{2}{100}$ erhöhen, und in demselben Verhältnisse wird mehr Wärme erzeugt. Man würde in Folge dessen die Wärmecapacität der Flüssigkeit um $\frac{2}{100}$ ihres Werthes zu klein finden. Da dieser Fehler grösser ist als die übrigen unvermeidlichen Fehler der Methode, so muss man auf seine Wegschaffung sinnen. Es gelingt dies sehr leicht durch einen einfachen Kunstgriff. Kennt man nämlich

1) Siehe meine Darstellung der Regnault'schen Berechnungsmethode in den Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. Bd. 54. 2. Abth. S. 255.

durch einen vorläufigen Versuch einen angenäherten Werth der Wärmecapacität der zu untersuchenden Flüssigkeit, so wählt man ihre Gewichtsmenge so gross, dass ihr Wasserwerth eben so viel beträgt wie der des Wassers im anderen Calorimeter. Die Temperaturerhöhungen werden dann gleich gross und somit auch der besprochene Fehler vermieden.

Es hat aber dieses Verfahren noch einen anderen grossen Vortheil. Die Wärmeverluste an die Umgebung werden nämlich dadurch einander nahe gleich. Sie würden einander ganz gleich werden, wenn nicht durch die Anwendung verschieden grosser Calorimeter die Grösse der ausstrahlenden Oberflächen eine verschiedene würde. Diese Oberflächen kann man aber einander gleich und damit die Methode noch vollkommener machen, indem man die Verkleinerung des Calorimeters, der das Wasser aufzunehmen hat, nicht durch Verkleinerung des Umfanges, sondern durch Aenderung des Querschnittes zu erreichen sucht. Auf diese Weise muss es immer möglich sein, zwei Calorimeter von gleichem Gewichte des Messingbleches und gleicher Oberfläche, also gleichem Ausstrahlungsvermögen aber verschiedenem Rauminhalt herzustellen, so dass der Gesammtwasserwerth dennoch gleich gross wird[1]).

Beispiele und Controlversuche.

Um meine Methode zu prüfen, schien mir kein Versuch entscheidender als der, die Wärmecapacität des Wassers selbst zu messen, d. h. zu versuchen, ob sich, wenn man die Capacität des Wassers im Calorimeter I gleich 1 setzt, aus den Bestimmungen auch die des Wassers im anderen Calorimeter nahe genug gleich 1 heraustelle. Ich erhielt nachfolgende Versuchsresultate:

I. Versuch.

Erste Stellung der Calorimeter:

	Calorimeter I.	Calorimeter II.
	$W_1 = 2{,}21$	$W_2 = 2{,}21$
	$P_1 = 100$	$P_2 = 100$
Anf.-Temp.	$t_1 = 11{,}14^\circ$ C.	$t_2 = 11{,}12^\circ$ C.
End.-Temp.	$t_1' = 13{,}63$ „	$t_2' = 13{,}62$ „
	$\vartheta_1 = 2{,}49$ „	$\vartheta_2 = 2{,}50$ „

1) Strenge genommen müsste man, um diese Bedingung ganz erfüllen zu können, auch auf die Wärmeverluste an der Flüssigkeitsoberfläche Rücksicht nehmen. Man könnte übrigens die Calorimeter auch oben bis auf einige kleine Oeffnungen schliessen, was bei flüchtigen Substanzen ohnehin zu empfehlen wäre. Bei der früheren Methode war dies nicht thunlich.



Hieraus berechnet sich

$$c = 0{,}996.$$

Zweite Stellung der Colorimeter:

$t_1 = 10{,}31^\circ C.$	$t_2 = 10{,}31^\circ C.$
$t_1' = 13{,}20$ „	$t_2' = 13{,}81$ „
$\vartheta_1 = 2{,}89$ „	$\vartheta_2 = 2{,}87$ „

Hieraus

$$c = 1{,}009.$$

$$\text{Mittel} = 1{,}0025.$$

II. Versuch.

Erste Stellung der Calorimeter (Wasserwerth und Gewichtsmengen wie oben):

Calorimeter I.	Calorimeter II.
$t_1 = 13{,}63^\circ C.$	$t_2 = 13{,}63^\circ C.$
$t_1' = 21{,}50$ „	$t_2' = 21{,}60$ „
$\vartheta_1 = 7{,}87$ „	$\vartheta_2 = 7{,}97$ „

Hieraus

$$c = 0{,}9874.$$

Zweite Stellung der Calorimeter:

$t_1 = 12{,}65^\circ C.$	$t_2 = 12{,}67^\circ C.$
$t_1' = 20{,}94$ „	$t_2' = 20{,}88$ „
$\vartheta_1 = 8{,}29$ „	$\vartheta_2 = 8{,}21$ „

Hieraus

$$c = 1{,}0097.$$

$$\text{Mittel} = 0{,}9985.$$

Aus den vorstehenden Versuchen ersieht man fürs erste, dass die Gleichheit des Leitungswiderstandes nicht vollkommen erreicht war, indem die eine Spirale stets eine etwas (im Mittel um $\frac{9}{1000}$) geringere Erwärmung verursachte als die andere, dass aber durch die Vertauschung der Colorimeter und Berechnung des Mittels diese Abweichung bis auf einen ganz kleinen Fehler eliminirt werden konnte.

Man ersieht ferner daraus, dass die Methode so genaue Werthe gibt, als sie mit den gegebenen Thermometern überhaupt geben konnte. Da dieselben in $\frac{1}{10}$ Grade getheilt waren, so konnte man nur mehr $\frac{1}{100}$ Grade ablesen und beging bei jedem ϑ möglicherweise einen Fehler von $\frac{2}{100}$ Graden. Mit Rücksicht auf die Grössen der Werthe von ϑ war demnach der zu erwartende Fehler beim ersten Versuche $\frac{2}{250} = 0{,}008$,

beim zweiten Versuche $\frac{2}{787} = 0,0025$. Er wurde in keinem der beiden Versuche überschritten.

Nun will ich noch eine Bestimmung der Wärmecapacität des Terpentinöls anführen, welche ohne die beschriebenen Vervollkommnungen, also mit gleich grossen Calorimetern, und ohne Vertauschung derselben angestellt wurde.

	Wasser	Terpentinöl
Wasserwerth d. Calor. sammt Thermometer	$W_1 = 2,21$	$W_2 = 2,21$
	$P_1 = 94,40^{gr}$	$P_2 = 81,34^{gr}$

Signal	Temperatur des Wassers	Temperatur des Terpentinöls	
0	12,39° C.	12,90° C.	
⋮			
5	12,42 „	13,01 „	Der Strom wird geschlossen.
⋮			
15	15,50 „	21,10 „	Der Strom wird geöffnet.
16	15,58 „	21,08 „	
⋮			
21	15,54 „	20,70 „	

Aus diesen Zahlen berechnet sich für die Endtemperatur des Wassers die Correction = 0,011° C., für die des Terpentinöls = 0,286° C. Die Temperaturzunahmen werden dann:

$$\vartheta_1 = 3,17^\circ \text{C.} \qquad \vartheta_2 = 8,36^\circ \text{C.}$$

Endlich findet man

$$c = 0,4232.$$

Diese Zahl erfordert nun zunächst eine kleine Correction wegen der Ungleichheit der Spiralen. Wie nämlich aus den früher angeführten Versuchen mit dem Waaser hervorgeht, erwärmt die zweite Spirale etwas mehr und verursacht, dass die Werthe der Wärmecapacität um $\frac{9}{1000}$ ihrer Grösse zu klein ausfallen. Man hat also obiges c noch mit 1,009 zu multipliciren, wodurch man die Zahl 0,4270 erhält. Nun wäre noch eine Correction wegen der Aenderung des Leitungswiderstandes durch die Temperatur anzubringen. Man kann sie angenähert folgendermassen berechnen. Die mittlere Temperatur des Terpentinöls überstieg jene des Wassers, während der Strom geschlossen blieb, um 3,05° C. Der Leitungswiderstand, also auch die

Wärmeerzeugung, war demnach beim Terpentinöl um $3 \times \frac{4}{1000}$ grösser als beim Wasser, folglich fiel der Werth der Capacität um $\frac{12}{1000}$ seines Betrages zu klein aus. Durch Multiplication mit 1,012 erhält man also den definitiven Werth

$$c = 0,4321.$$

Aus anderen, nach der älteren Methode angestellten Versuchen hatte sich als Mittel ergeben

$$c = 0,430.$$

Regnault's Formel endlich gibt für die Capacität des Terpentinöls zwischen 13° und 21°

$$c = 0,4328.$$

Die Uebereinstimmung ist also eine sehr befriedigende.

Der im Vorstehenden beschriebene Apparat wird von Herrn Universitätsmechanikus Miller in Innsbruck ausgeführt. *C.*

Ueber eine zweiconstantige Dispersionsformel.

Von

E. Lommel.

(Aus den Sitzungsberichten der physikalisch-medicinischen Societät zur Erlangen vom Herrn Verfasser mitgetheilt.)

In den drei Abhandlungen „Theorie der Absorption und Fluorescenz“[1]), „Theorie der normalen und annomalen Dispersion“[2]) und „Theorie der Doppelbrechung“[3]) habe ich die Umrisse einer Theorie des Lichtes skizzirt, welche, von den einfachsten Anschauungen ausgehend, Brechung und Dispersion (normale und anomale), Absorption, Fluorescenz und Oberflächenfarben, Doppelbrechung und Pleochroismus im Zusammenhange erklärt.

Was insbesondere die Farbenzerstreuung anlangt, so führt diese Theorie zu der folgenden Dispersionsformel:

$$n^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{P^2 + Q^2} + P\right),$$

in welcher

$$P = 1 + \frac{m}{\mu}(\varkappa - \varepsilon)^2 \cdot \frac{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varepsilon^2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}$$

$$Q = \frac{m}{\mu}(\varkappa - \varepsilon) \cdot \frac{\lambda}{\lambda^0} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varkappa\varepsilon \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2 + \varepsilon^2 \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}$$

ist. Darin bezeichnet n den Brechungscoëfficienten, λ die Wellenlänge im leeren Raum, und λ_0, $\frac{m}{\mu}$, $\varkappa$ und ε sind vier Constante, deren physikalische Bedeutung aus der Theorie sich ergibt. Diese Formel umfasst sowohl die normale als die anomale Dispersion. Sie zeigt, dass

1) Erl. Sitzungsber. 10. Heft S. 20. Repertorium laufender Band S. 15.
2) Erl. Sitzungsber. 10. Heft S. 65. Repertorium laufender Band S. 81.
3) Erl. Sitzungsber. 10. Heft S. 98. Repertorium laufender Band S. 81.

der Brechungscoëfficient nirgends (ausser für $\lambda = \infty$) eine Unterbrechung der Stetigkeit erleidet und niemals imaginär wird.

Aus der Theorie geht hervor, dass für farblos durchsichtige Substanzen die Grösse Q im Bereiche des sichtbaren Spectrums sehr klein sein muss. Vernachlässigen wir daher Q^2 gegenüber P^2 so erhalten wir zunächst

$$n^2 = P.$$

Nehmen wir ferner an, dass ε klein genug sei, um im Nenner von P das mit ε^2 behaftete Glied ausser Acht lassen zu können, und setzen wir

$$\frac{m}{\mu}(\varkappa - \varepsilon)^2 = a,$$

so gelangen wir zu der folgenden einfachen Dispersionsformel

$$n^2 - 1 = \frac{a}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}} \tag{L}$$

mit nur zwei Constanten a und λ_0. Die Constante λ_0 bedeutet die Wellenlänge des Absorptionsmaximums, welches für farblos durchsichtige Substanzen jenseits der brechbareren Grenze des sichtbaren Spectrums liegt.

Wie ich bereits früher[1]) bemerkt habe, stellt diese Formel die Beobachtungen im Allgemeinen genauer dar als die zweiconstantige Cauchy'sche Formel

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}. \tag{C}$$

Ich habe die obige Formel nun auch mit der Christoffel'schen

$$n = \frac{n_0\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda}} + \sqrt{1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}}} \tag{Ch}$$

verglichen, indem ich dieselben Beobachtungsreihen, welche Christoffel[2]) zur Verification seiner Formel benutzt hat, berechnete.

Die Berechnung nach der Formel (L) gestaltet sich ganz einfach, wenn man, nachdem λ_0 und a ermittelt sind, den Hilfswinkel φ aus der Gleichung

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2}}$$

1) Erl. Sitzungsber. 10. Heft S. 72. Repertorium laufender Band S. 88.
2) Berl. Monatsber. 1861 S. 906. Pogg. Ann. Bd. 127 S. 27.

bestimmt, und dann

$$n = \frac{1}{\cos \varphi}$$

findet.

Die Resultate der Berechnung, bei welcher auch die Cauchy'sche Formel (C) zum Vergleich herangezogen wurde, sind in den folgenden Tabellen verzeichnet.

Aether (Dale und Gladstone).

$a = 0,81779 \qquad \lambda_0 = 0,9770$

	B	C	D	E	F	G	H
n	1,3545	1,3554	1,3566	1,3590	1,3606	1,3646	1,3683
C		+3	−2	−1	−4		+6
Ch		+3	−2	0	−4		+5
L		+3	−3	0	−4		+4

Spiköl (Baden-Powell).

$a = 1,1328 \qquad \lambda_0 = 1,2288$

	B	C	D	E	F	G	H
n	1,4732	1,4746	1,4783	1,4829	1,4868	1,4944	1,5009
C		+1	+2	+1	−1		−1
Ch		+1	+4	+4	+2		−4
L		+2	+3	+3	+1		−5

Gelbes Flintglas von Guinand (Dutirou).

$a = 2,0550 \qquad \lambda_0 = 1,3040$

	B	C	D	E	F	G	H
n	1,7697	1,7718	1,7777	1,7852	1,7924	1,8062	1,8186
C		−2	−5	−9	−9		+10
Ch		0	−1	−3	−3		+2
L		0	−1	−5	−5		+3

Phenylhydrat (Dale und Gladstone).

$a = 1,3144 \qquad \lambda_0 = 1,4587$

	B	C	D	E	F	G	H
n	1,5416	1,5433	1,5488	1,5564	1,5639	1,5763	1,5886
C		−4	−9	−9	−1		+15
Ch		−3	−4	−2	+5		+6
L		−3	−4	−3	+4		+6

Schwefelkohlenstoff (Dale und Gladstone).

$a = 1,4884 \qquad \lambda_0 = 1,7879$

	B	C	D	E	F	G	H
n	1,6177	1,6209	1,6303	1,6434	1,6554	1,6799	1,7035
C		−5	−16	−24	−24		+37
Ch		−3	−4	−3	−5		+7
L		−1	−6	−9	−9		+9

Lösung von Phosphor in Schwefelkohlenstoff (Dale und Gladstone).

$a = 2{,}5150 \qquad \lambda_0 = 1{,}9287$

n	1,9314	*	1,9527	1,9744	1,9941	2,0361	2,0746
C			— 30	— 44	— 50		+ 59
Ch			+ 4	+ 7	— 1		— 37
L			— 9	— 14	— 22		+ 4

* ist nicht beobachtet.

Lavendelöl (Baden-Powell).

$a = 1{,}1090 \qquad \lambda_0 = 1{,}1943$

n	1,4641	1,4658	1,4660	1,4728	1,4760	1,4837	1,4930?
C		+ 5	— 26	— 2	— 8		+ 32
Ch		+ 5	— 25	+ 1	— 6		+ 30
L		+ 5	— 25	0	— 5		+ 29

Terpentinöl (Fraunhofer).

$a = 1{,}1305 \qquad \lambda_0 = 1{,}1325$

n	1,4705	1,4715	1,4744	1,4784	1,4817	1,4882	1,4939
C		0	— 1	0	— 1		+ 3
Ch		— 1	— 1	+ 1	— 1		+ 1
L		0	0	+ 1	0		0

Kalkspath (Rudberg).

$a = 1{,}6863 \qquad \lambda_0 = 1{,}1246$ (ω

n	1,6531	1,6545	1,6585	1,6636	1,6680	1,6762	1,6833
C		0	0	0	0		— 1
Ch		0	+ 2	+ 4	+ 3		— 3
L		0	+ 2	+ 3	+ 2		— 4

$a = 1{,}1824 \qquad \lambda_0 = 0{,}8774$ (ε

n	1,4839	1,4845	1,4864	1,4887	1,4907	1,4945	1,4978
C		— 1	0	0	0		0
Ch		0	+ 1	+ 1	+ 1		0
L		0	0	0	0		— 1

Arragonit (Rudberg).

$a = 1{,}7780 \qquad \lambda_0 = 1{,}0950$ (α

n	1,6806	1,6820	1,6859	1,6908	1,6952	1,7032	1,7101
C		0	+ 1	0	0		— 1
Ch		0	+ 2	+ 3	+ 2		— 4
L		+ 1	0	+ 1	+ 2		— 4

$a = 1{,}7648 \qquad \lambda_0 = 1{,}0862$ (β

n	1,6763	1,6778	1,6816	1,6863	1,6905	1,6984	1,7051
C		+ 1	+ 2	0	— 1		— 2
Ch		+ 2	+ 2	+ 3	+ 2		— 4
L		+ 1	+ 1	+ 2	+ 1		— 5

$a = 1{,}3118 \quad \lambda_0 = 0{,}8730$ (γ

n	1,5275	1,5282	1,5301	1,5326	1,5348	1,5388	1,5423
C		0	0	0	0		0
Ch		0	0	+1	+1		−1
L		0	−1	0	0		−1

Topas (Rudberg).

$a = 1{,}5908 \quad \lambda_0 = 0{,}8846$ (α

n	1,6179	1,6188	1,6211	1,6241	1,6265	1,6312	1,6351
C		+1	+1	+2	0		−2
Ch		+1	+2	+3	+1		−3
L		+1	0	+2	+1		−4

$a = 1{,}5673 \quad \lambda_0 = 0{,}8857$ (β

n	1,6105	1,6114	1,6137	1,6167	1,6191	1,6237	1,6275
C		+1	+1	+2	+1		−3
Ch		+1	+2	+4	+2		−3
L		+1	0	+3	+1		−4

$a = 1{,}5606 \quad \lambda_0 = 0{,}8837$ (γ

n	1,6084	1,6094	1,6116	1,6145	1,6170	1,6215	1,6254
C		+2	+2	+2	+1		−2
Ch		+2	+2	+2	+2		−3
L		+2	+1	+2	+2		−3

Bergkrystall, ordentlicher Strahl, elliptisch polarisirt. (Esselbach).

$a = 1{,}3555 \quad \lambda_0 = 0{,}8860$

	B	C	D	E	F	G	H
n	1,5414	1,5424	1,5446	1,5476	1,5500	1,5546	1,5586
C	−6	−4	−3		0	+2	+3
Ch	−8	−6	−4		0	+3	+3
L	−8	−5	−4		0	+3	+4

	L	M	N	O	P	Q	R
n	1,5605	1,5621	1,5646	1,5674	1,5690	1,5702	1,5737
C	+4		−1	+2	+4	+3	+5
Ch	+4		−2	−1	0	−2	−3
L	+4		−1	0	+1	0	−1

Bei der Berechnung der Formeln (C) und (L) sind die Wellenlängen von Angström zu Grunde gelegt worden, nämlich die Werthe

B	C	D	E	F	G	H
6,867	6,562	5,892	5,269	4,860	4,307	3,950;

Christoffel hat bei seiner Rechnung, deren Resultate oben unter (Ch) aufgeführt sind, etwas andere Werthe der Wellenlänge, nämlich die Fraunhofer'schen benutzt; nur bei dem Bergkrystall sind alle

drei Formeln mit denselben Werthen der Wellenlängen, nämlich denjenigen von Esselbach, berechnet.

An der Spitze jeder Beobachtungsreihe sind die Werthe von a und λ_0 der Formel (L) angegeben, und zwar die letztere Grösse in der den obigen Wellenlängen zu Grunde liegenden Einheit von 0,0001^{mm}. Die erste Zeile (n) enthält die beobachteten Brechungscoëfficienten, die folgenden drei Zeilen geben in Einheiten der vierten Decimale die Differenzen an, welche man aus den Formeln (C), (Ch) und (L) berechneten Werthen resp. hinzufügen muss, um die beobachteten Werthe zu erhalten.

Bei Lavendelöl H ist die Beobachtung als unsicher bezeichnet; auch der Werth für D kann unmöglich richtig sein.

Die Vergleichung der Differenzen zeigt nun, dass, obgleich in einzelnen Fällen, namentlich bei den Krystallen, die Cauchy'sche Formel sich den Beobachtungen etwas besser anschliesst, als die beiden andern, diese letzteren dennoch im Allgemeinen jener weit überlegen sind.

Es ergibt sich ferner, dass meine Formel die Beobachtungen mindestens eben so gut darstellt, wie die Christoffel'sche, und demnach alles leistet, was von einer Dispersionsformel mit nur zwei Constanten verlangt werden kann. Sie dürfte daher, auch wenn man sie nur als empirische Formel ansehen will, ihrer Einfachheit und leichteren Handhabung wegen der Christoffel'schen vorzuziehen sein.

Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn Thiesen „Ueber das Kalibriren von Thermometern".

Von Dr. Marek.

Nach der Einleitung zu dem Aufsatze des Herrn Dr. M. Thiesen: „Ueber das Kalibriren von Thermometern etc.; dieses Repertorium Bd. 15 S. 677 f." könnte es scheinen, als ob Hansen sich in seinem daselbst angezogenen klassischen Werke ausser mit dem sehr nahe verwandten Problem der „Bestimmung der Theilungsfehler" auch mit der Kalibrirung von Thermometern beschäftiget hätte. Es scheint mir nicht unwichtig, **besser hervorzuheben**, dass in dieser Abhandlung Hansen's von **Thermometer-Kalibercorrectionen** kein einzigesmal, auch nicht andeutungsweise, die Rede ist und dass, wie durch eine Vergleichung leicht ersichtlich, meine speciellen Schlussformeln zur numerischen Berechnung der **Kalibercorrectionen von Thermometern** von Hansen's allgemein giltigem Rechnungsmechanismus zur Bestimmung der **Theilungsfehler eines geradlinigen Maassstabes** in ihrer Form vollständig abweichen.

Register.

Die Zahlenangaben bedeuten Seitenzahlen.

Hilfstafeln

für

Messungen elektrischer Leitungswiderstände,

vermittelst

der Kirchhoff-Wheatstone'schen Drahtcombination,

berechnet von

Eugen Obach,
Dr. phil.

Mit 2 lithogr. Tafeln.

München.
Druck und Verlag von R. Oldenbourg.
1879.

Vorwort.

Die erstmalige Berechnung der Hilfstafeln, welche ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, fällt schon in den Anfang dieses Jahrzehntes. Damals hatte ich bei einer Experimentaluntersuchung eine grössere Zahl von Widerstandsbestimmungen vorzunehmen, wozu ich mich der Kirchhoff-Wheastone'schen Drahtcombination bediente. Um hierbei die wiederholte Berechnung ein und desselben Verhältnisses der zwei Drahtabschnitte zu umgehen, wurden jedesmal die berechneten Werthe in geordneter Reihenfolge notirt, wie es bei ähnlicher Gelegenheit ohne Zweifel von Andern, mehr oder weniger vollständig, ebenfalls geschehen sein wird [1]).

Die auf solche Weise entstandene Tabelle wurde bald nachher durch Berechnung der noch fehlenden Werthe ergänzt und der Vollständigkeit halber über die ganze, gerade 1000 Theilstriche umfassende Brückenscala ausgedehnt. Bei dieser letztgenannten Arbeit wurde ich von mehreren meiner Freunde und damaligen Studiengenossen am Stuttgarter Polytechnikum unterstützt, welche mich hierdurch zu bestem Danke verpflichtet haben.

Seit jener Zeit habe ich mehrfach Gelegenheit gehabt, die Tafeln zu benützen und mich davon zu überzeugen, dass durch ihren Gebrauch die Messungen mit der Drahtbrücke wesentlich beschleunigt und erleichtert werden können. Dies machte denn auch schon längst den Wunsch in mir rege, die genannten Tafeln durch Veröffentlichung auch Andern zugänglich zu machen; aber erst jetzt konnte ich dazu gelangen, die gründliche Revision derselben vorzunehmen, welche ich für geboten hielt, ehe das Manuscript in den Druck gegeben werden konnte.

Bei den Berechnungen wurden anfänglich fünfstellige Logarithmen benützt; da es aber wünschenswerth schien, auch noch die letzte (fünfte)

1) Es geben z. B. Siemens & Halske in der Beschreibung ihres Universalgalvanometers, welches auch als Drahtbrücke zu gebrauchen ist, eine solche Tabelle für den 2 × 150 Theilstriche langen Draht dieses Instrumentes.

*



Stelle richtig anzugeben, so wurden bei der Revision alle Werthe nochmals siebenstellig nachgerechnet.

In den Tafeln sind die Logarithmen durchweg mit fünfstelliger Mantisse und mit Kennziffer angegeben, während die Numeri nur so weit auf 5 Decimalen mitgetheilt sind, als die dazugehörigen Differenzen eine dreizifferige Zahl im Allgemeinen nicht überschreiten. Zur Erhöhung der Genauigkeit wurde bei allen Numeri, die mit weniger als 5 Decimalstellen angegeben sind, die letzte Ziffer mit einem Strichchen bezeichnet, wenn sie durch Abschneiden der folgenden um eine Einheit erhöht worden war. Die Grenze des Fehlers, welchen einer der mitgetheilten Werthe haben kann, wird auf diese Art auf die Hälfte herabgesetzt, wie dies Schrön in der Vorrede zu seinen siebenstelligen Logarithmen des Näheren zeigt.

Zwischen den Logarithmen der ersten Hälfte der Tafeln und zwischen denjenigen der zweiten Hälfte besteht, wie leicht zu sehen ist, die Beziehung, dass sich die, so zu sagen symmetrisch zur Tafelnmitte liegenden Logarithmen gegenseitig zu Null ergänzen [1]). Dies ist beispielsweise der Fall für

$$\log \frac{88}{912} = 8.98449 \text{ auf Tafel IV}$$

$$\text{und} \quad \log \frac{912}{88} = 1.01551 \text{ auf Tafel XXXVII,}$$

$$\text{somit Summe} = 0.00000.$$

In anderen Worten kann diese Beziehung auch so ausgedrückt werden: „Die symmetrisch zu beiden Seiten der Tafelnmitte liegenden Differenzen auf einander folgender Logarithmen sind einander gleich.“

In unserem Falle wurden die beiden Hälften der Tafeln völlig unabhängig von einander berechnet, und man konnte deshalb von der erwähnten Eigenschaft der Differenzen Gebrauch machen, um die Logarithmen der einen Hälfte durch die der anderen zu controliren [2]).

Es war ursprünglich die Absicht, die Numeri auf dem Correcturbogen nochmals mit der Rechenmaschine nachzurechnen; Mr. F. Jacob machte mich jedoch noch rechtzeitig auf die Barlow'schen Tafeln aufmerksam,

---

1) War die abgeschnittene sechste Stelle eine „Fünf“, so kommt hiervon eine geringe Abweichung vor, so z. B. auf Taf. IV, $\log \frac{95}{905} = 9.02108\ [75]$

auf Taf. XXXVII, $\log \frac{905}{95} = 0.97893\ [25]$

Summe: $= 0,00001\ [00]$

2) Bei den Differenzen ist ebenfalls zu beachten, dass sich dann kleine Unterschiede zeigen, wenn die abgeschnittene sechste Stelle der Mantisse gerade fünf betrug.

welche unter Anderem die reciproken Werthe aller ganzen Zahlen bis 10000 auf 7 Stellen enthalten. Diese reciproken Werthe können auf folgende Weise für die vorliegenden Zwecke verwendet werden. Der Quotient $\frac{a}{b}$ unserer Tafeln kann, da $a = 1000 - b$, auch geschrieben werden:

$$\frac{1000 - b}{b} \quad \text{oder} \quad 1000 \cdot \frac{1}{b} - 1.$$

Wie man hieraus sieht, sind die mit 1000 multiplicirten Reciproken nach Abzug von 1 unmittelbar die Werthe des Quotienten $\frac{a}{b}$ der Tafeln. In diesem Sinne wurden alle Numeri des Correcturbogens mit den Barlow'schen Zahlen verglichen, und sobald sich der geringste Unterschied (der letzten Ziffer) zeigte, wurde der betreffende Werth noch einmal neu berechnet. Ferner wurden auf dem Druckbogen sämmtliche Differenzen wiederum zu ihren Subtrahenden addirt und die entstandene Summe wurde dann nochmals mit dem Minuenden verglichen.

Die Proportionaltheile sind aufs sorgfältigste mit den in den siebenstelligen Logarithmentafeln von Schrön und von Köhler[1]) angegebenen verglichen worden.

Durch Beifügung der Differenzen und Proportionaltheile glaube ich die Bequemlichkeit beim Gebrauche der Tafeln und somit deren Nützlichkeit nicht wenig erhöht zu haben, da man bei Brückenmessungen in der Regel noch Zehnteltheilstriche abzulesen haben wird.

Wenn so von meiner Seite keine Mühe und Arbeit gespart wurde, die Tafeln so correct und zugleich so bequem als möglich zu gestalten, so glaube ich auch auf gütige Nachsicht hoffen zu dürfen, wenn trotz aller Sorgfalt dennoch ein Versehen meiner Aufmerksamkeit entgangen sein sollte.

Woolwich, 21. Februar 1879.

Eugen Obach.

---

1) In dem siebenstelligen logarithmisch-trigonometrischen Handbuche von Dr. G. Köhler, 9. Stereotyp-Ausgabe, ist mir bei diesem Vergleiche eine kleine Ungleichmässigkeit aufgefallen. Es ist nämlich bei den Proportionaltheilen, welche den Logarithmen selbst beigedruckt sind, die letzte Stelle beim Abschneiden einer „Fünf" stets erhöht worden, während dies nicht bei denjenigen Proportionaltheilen geschehen ist, welche aus Mangel an Raum auf einer besonderen Hilfstafel (S. 2) zusammengestellt sind. Unter diesen Umständen kann es vorkommen, dass Rechnungen, welche zu denselben Resultaten führen sollten, bei denen jedoch zufällig bald die einen, bald die anderen Proportionaltheile benützt wurden, kleine Verschiedenheiten ergeben, deren Ursache manchmal nicht gleich in die Augen fällt. Aus diesem Grunde glaube ich bei dieser Gelegenheit auf den genannten Umstand aufmerksam machen zu sollen.

Einleitung.

Von allen Methoden, welche bis jetzt zur Bestimmung des elektrischen Leitungwiderstandes fester Körper in Vorschlag gebracht worden sind, werden diejenigen unstreitig am häufigsten angewendet, welche auf dem Principe der sogenannten Wheatstone'schen Brücke beruhen[1]).

Dieses gründet sich bekanntlich auf den Satz, dass bei einer Combination von sechs Leitern AB, AC, BC, AD, BD und CD Fig. 1 und 2 Tafel X, welche in vier Punkten A; B, C und D zusammenstossen und in deren einem AB eine elektromotorische Kraft e wirksam ist, dann durch CD kein Strom fliesst, wenn die Widerstände der vier übrigen Leiter die Beziehung zu einander haben:

$$AC : BC = AD : BD.$$

Wird in den Leiter CD, der häufig als die (eine) „Diagonale“ bezeichnet wird, ein empfindliches Galvanoskop eingeschaltet, so lässt sich prüfen, ob zwischen den vier „Zweigen“ AC, BC, AD und BD der Brücke das genannte Verhältniss besteht, da alsdann die Magnetnadel nicht abgelenkt werden darf. Aus dem Ausbleiben eines elektrischen Stromes in dem einen Theile der Combination wird somit gefolgert, dass in einem anderen Theile derselben unter den Widerständen gewisse Verhältnisse zutreffen, d. h. aus dem Nichteintreten einer Wirkung wird auf das Erfülltsein bestimmter Bedingungen geschlossen. Die Methode gehört demnach unter die sogenannten

1) Diese Methode wurde zuerst von Hunter Christie in Woolwich angewendet und als „*differential arrangement*“ in den philosophical transactions von 1833 beschrieben; sie kam jedoch, wie es scheint, erst 10 Jahre später durch Wheatstone's Abhandlung „*An account of several new instruments and processes for determining the constants of a voltaic circuit*“ zur allgemeinen Kenntniss. Diese klassische Abhandlung ist in dem 3. und 4. Bande des *Telegraphic Journal* wieder abgedruckt. Vgl. hierüber auch Latimer Clark in dem *Journal of the society of telegraph engineers* Vol. I p. 206, 1872.

Null-Methoden, deren mancherlei Vortheile anderen Messmethoden gegenüber auch bei ihr sich geltend machen [1]).

Je nach der Absicht, welche bei den Messungen verfolgt wird, so insbesondere, je nach der Grösse des zu bestimmenden Widerstandes und der geforderten Genauigkeit ist die praktische Ausführung derselben eine verschiedene.

Für Zwecke der Telegraphie z. B., bei denen es sich fast nur um das Messen grösserer Leitungswiderstände handelt, wird gewöhnlich die Einrichtung derart getroffen, dass der unbekannte Widerstand in den Zweig AD oder BD und ein sogenannter Stöpselrheostat in den Zweig BD oder AD eingeschaltet wird. Den zwei anderen Zweigen AC und BC wird ein einfaches Verhältniss z. B. 1 : 1, 1 : 10, 1 : 100 etc. fest zuertheilt. In der einen Diagonale CD befindet sich das Galvanoskop und in der anderen AB die Batterie. Der Widerstand des Rheostaten wird so lange verändert, bis, wie man sagt, das „Gleichgewicht" der Brücke erzielt ist, d. h. bis keine Ablenkung mehr am Galvanoskope eintritt. Der gesuchte Widerstand ist dann je nach Umständen entweder unmittelbar gleich dem am Rheostat eingeschalteten, oder auch ein Zehntel, ein Hundertel etc. desselben, oder endlich zehn, hundert etc. mal so gross als dieser.

Für wissenschaftliche Zwecke, bei denen häufig kleine Widerstände zu bestimmen sind, ist die gebräuchlichste Form des Messapparates die, welche als die Kirchhoff-Wheatstone'sche Drahtcombination bekannt ist [2]).

Bei derselben werden die beiden Brückenzweige AD und BD der früher erwähnten schematischen Figuren durch die beiden Abschnitte a und b eines Drahtes AB gebildet, der längs einer Scala ausgespannt ist (Fig. 3 und Fig. 4). Der zu messende Widerstand x kommt in den einen der Zweige AC und BC und ein „Vergleichswiderstand" in den andern. Je nachdem der Widerstand w des Galvanoskopes oder derjenige ω der Elemente von beiden der grössere ist, werden sie wie Fig. 3 oder wie Fig. 4 verbunden, wobei wir annehmen, dass sich die Widerstände der vier Brückenzweige mit zunehmender Grösse wie folgt ordnen: AC, BC, AD und BD. Sind die beiden Widerstände w und ω einander gleich, so kann entweder die eine oder die andere Schaltung gewählt werden [3]).

Sind die Verbindungen in der genannten Weise hergestellt, so wird das Ende D des Leiters CD so lange auf dem Brückendrahte AB ver-

1) Siehe Clerk Maxwell „A treatise on Electricity and Magnetism" Vol. I p. 396, 1873.

2) Wiedemann, Galvanismus 2. Aufl. Bd. I S. 251, sowie Schwendler, Instructions for testing telegraph lines. London 1878. Vol. I p. 1.

3) Schwendler l. c., p. 14.



schoben, bis das Galvanoskop keinen Strom mehr anzeigt. Ist dies erreicht, so verhalten sich

$$x : n = a : b,$$

woraus $$x = \frac{a}{b} n$$

oder, wenn mit l die gesammte Länge des Brückendrahtes AB bezeichnet wird,

$$x = \frac{a}{l - a} \cdot n.$$

Die Länge l ist für ein bestimmtes Messinstrument eine Constante, und man kann deshalb für die verschiedenen Ablesungen a zum voraus eine Tabelle berechnen, welche die zugehörigen Werthe des Quotienten $\frac{a}{l - a} = \frac{a}{b}$ enthält. Im Besitze einer derartigen Tabelle hätte man alsdann nur noch die Multiplication mit n auszuführen, um in jedem Falle den gesuchten Widerstand x in denselben Einheiten wie letzteren zu erhalten.

Bei den hier vorliegenden Tafeln wurde die Berechnung der Werthe $\frac{a}{l - a}$ unter der Annahme durchgeführt, dass die Länge l des Brückendrahtes gerade 1000 der Theilstriche messe, in welchen der Abschnitt a abgelesen wird. Diese Verhältnisse treffen unter Anderem völlig zu, wenn der genau meterlange Draht neben einer Theilung in Millimeter ausgespannt ist, wie dies sehr häufig der Fall ist. In Fig. 5 ist eine derartige Drahtbrücke mit Hinweglassung constructiver Details abgebildet und zwar in der Form, in der sie von Messrs. Elliott Brothers in London in trefflicher Ausstattung geliefert wird. Der aus Platin-Iridium bestehende Draht $A'B'$ ist mit beiden Enden an eine dicke Kupferschiene (in der Figur schraffirt gezeichnet) gelöthet, welche an vier Stellen, nämlich bei p, x, n und v, durchgeschnitten ist. Zu beiden Seiten jeder so entstandenen Unterbrechungsstelle sind Klemmen auf der Schiene befestigt. Für gewöhnlich sind die beiden Lücken p und v durch dicke Kupferstücke überdeckt und der zu messende Widerstand kommt bei x, der Vergleichswiderstand bei n zur Verbindung mit der Brücke. Die Pole der Batterie werden bei A und B und die Enden des Galvanoskopdrahtes bei C und D verbunden. Der „Laufcontact" D ist mit einem Nonius versehen, so dass Zehntelmillimeter noch genau abgelesen werden können [1].

Ueber die Einrichtung unserer Tafeln ist Folgendes zu sagen.

Jede Tafel zerfällt auf den ersten Blick in drei Hauptabtheilungen, welche von einander durch kräftige Linien getrennt sind. In der ersten dieser

1) Die Brücke ist in G. C. Foster's Abhandlung „On a modified form of Wheatstone's bridge, and methods of measuring small resistances" näher beschrieben. Journ. of the soc. of telegr. engin. Vol. I p. 196, 1872. Diese Abhandlung ist, ohne Quellenangabe, in G. Prescott's „Electricity and the electric telegraph", New-York 1877, p. 247 to 256 wörtlich abgedruckt. Ein Nachtheil der Elliott'schen Brücke scheint mir der zu sein, dass dieselbe nur mit Klemmschrauben und nicht auch mit Quecksilbernäpfen ausgestattet ist.

drei Abtheilungen sind die beiden Drahtabschnitte a und b von Millimeter zu Millimeter angegeben. Hierbei ist zu beachten, dass im Allgemeinen unter a derjenige Abschnitt verstanden wird, welcher sich auf Seiten des zu messenden Widerstandes befindet und der demgemäss mit diesem wächst und abnimmt. In der zweiten Abtheilung, welche in zwei Haupt- und zwei Nebenspalten zerfällt, sind die Logarithmen des Verhältnisses $\frac{a}{b}$, sowie dessen Numeri angegeben und die zu beiden gehörenden Differenzen mitgetheilt. In der dritten Abtheilung endlich sind die Proportionaltheile enthalten, durch deren Benützung auch die abgelesenen Zehnteltheilstriche leicht in Rechnung gezogen werden können. In der Ueberschrift ist jedesmal angegeben, zu welcher Art von Differenzen die betreffenden Proportionaltheile gehören. Bei jeder Tafel sind links oben die beiden Grenzwerthe von a und rechts unten die von b in fettem Drucke vermerkt, welche darauf vorkommen; hierdurch, sowie durch die den Tafeln vorausgehende „Uebersicht" wird das Aufsuchen der Werthe wesentlich erleichtert.

Von den Logarithmen kann man in manchen Fällen vortheilhaften Gebrauch machen. So z. B. dann, wenn der Vergleichswiderstand in keinem einfachen Verhältnisse zu der Einheit steht, in welcher x gemessen werden soll; also beispielsweise, wenn man sich als Normalmaass einer beliebigen Röhre mit Quecksilber bedient, deren Widerstand in Siemens'schen Einheiten aus ihrer Länge und dem Gewichte des Inhaltes berechnet worden ist[1]). Ferner sind die Logarithmen bequem, wenn der Widerstand x in einer andern Einheit ausgedrückt werden soll, als es n ist, wenn man also z. B. mit Siemens'schen Einheiten vergleicht und das Resultat in absoluten Einheiten zu haben wünscht u. dgl. m.

Die nachstehende kleine Tabelle, bei der die zuverlässigsten und neuesten Bestimmungen zu Grunde gelegt sind, wird bei der Reduction der drei jetzt gebräuchlichen Widerstandseinheiten auf einander von Nutzen sein. Der Bequemlichkeit halber sind in dieser Zusammenstellung auch die Logarithmen der betreffenden Reductionsfactoren mitgetheilt.

---

1) So bediente ich mich z. B. vor einer Reihe von Jahren einer Quecksilberröhre als Vergleichswiderstand für zahlreiche Messungen, welche zu 0,1791 S. E. bei 15° C. berechnet worden war, da mir damals kein eigentliches Normaletalon zur Verfügung stand. Mit Hilfe dieses Widerstandes und der Drahtbrücke wurde eine Siemens'sche Einheit aus Neusilberdraht angefertigt, welche Jahre darauf gelegentlich mit einer von Siemens & Halske stammenden Einheit verglichen wurde. Dieser Vergleich gab, anbetrachts der verhältnissmässig bescheidenen Hilfsmittel, welche mir bei der Herstellung zu Gebote waren, eine ganz zufriedenstellende Uebereinstimmung. Ich führe dies hier an, weil es wiederum zeigt, wie leicht sich die von Dr. Siemens vorgeschlagene Quecksilbereinheit mit einer für gewöhnliche Anforderungen hinreichenden Genauigkeit reproduciren lässt, wodurch ihr ein unbestreitbarer Vorzug gegenüber allen anderen Widerstandseinheiten zukommt, die bis jetzt vorgeschlagen worden sind.

Ein Widerstand, welcher gemessen wurde in	ist mit folgenden Zahlen zu multipliciren, um ausgedrückt zu werden in			Bemerkungen
	Siemens'schen Quecksilber-Einheiten	Einheiten der British Association	absoluten elektromagnetischen Einheiten [4])	
Siemens'schen Quecksilber-Einheiten. S. Q. E. [1])	1,0000	*(b.)* 0,95302 (log = 9.97910)	*(A.)* 0,9550 (log = 9.98000)	*(A.)* Nach H. F. Weber in Zürich (1877). *(a.)* Aus *(A.)* berechnet.
Einheiten der British Association (Ohm). B. A. U. [2])	*(B.)* 1,0493 (log = 0.02090)	1,0000	*(A, B.)* 1,00208 (log = 0.00090)	*(B.)* Nach Dehms (1868) und Hermann Siemens (1873). *(b.)* Aus *(B.)* berechnet.
absol. elektromagn. Einheiten. Abs. elm. E. [3])	*(a.)* 1,04712 (log = 0.02000)	*(a, b.)* 0,99792 (log = 9.99910)	1,0000	*(A, B.)* Aus *(A.)* und *(B.)* berechnet. *(a, b.)* Aus *(A, B.)* berechnet.

Der Quotient $\frac{a}{1000 - a}$ ist als Function von a auf der beigegebenen Curventafel (Tafel XI) graphisch dargestellt; für diese Curve sind demnach

die Abscissen $x = a$

die Ordinaten $y = \frac{a}{1000 - a}$.

Curve I erstreckt sich beinahe über die gesammte Länge der Scala von $x = 0$ bis $x = 1000$, Curve II dagegen reicht nur bis $x = 500$. Bei der zuletzt genannten Curve sind die Abscissen doppelt und die Ordinaten zehn Mal so gross als bei der zuerst erwähnten. Curve II kann an Stelle der Tafeln zur raschen Aufsuchung des Quotienten $\frac{a}{b}$ für den Fall dienen, dass nur geringe Genauigkeit erfordert wird und dass $a < 500$ ist. Für Curve I sind die Coordinaten oben und auf der rechten Seite, für Curve II unten, auf der linken Seite und an passenden Stellen der Curve selbst angegeben.

---

1) Dieselbe ist bekanntlich der Widerstand eines Quecksilberfadens von 1^m Länge und 1^{qmm} Querschnitt bei 0° C. Die S. Q. E. wurde 1868 von der internationalen Telegraphenconferenz als allgemeines Widerstandsmaass acceptirt.

2) Diese Einheit wurde von dem englischen „Comité für elektrische Normalmaasse" dargestellt. In England wird dieselbe fast ausschliesslich benützt. Sie sollte genau gleich $10^9 \frac{\text{Centimeter}}{\text{Secunden}}$ elektromagnetischen Einheiten sein (das „theoretische" Ohm). Die producirte Einheit (das „praktische" Ohm) weicht jedoch, wie die Tabelle zeigt, von diesem angestrebten Werthe etwas ab.

3) Die absolute elektromagnetische Einheit wurde von Wilhelm Weber in Vorschlag gebracht. Je nachdem die Secunde und der Meter, Centimeter oder Millimeter zu Grunde gelegt wird, sind die obigen Zahlen noch mit 10^{-7}, 10^{-9} oder 10^{-10} zu multipliciren.

4) Die Zahlen dieser Spalte sind mit 10^7, 10^9 und 10^{10} zu multipliciren, wiederum, je nachdem man in Metern, Centimetern oder Millimetern rechnet.

Die Beziehung zwischen den Coordinaten kann auch ausgedrückt werden durch

$$x = C \frac{y}{y + 1}$$

oder

$$x = C \frac{1}{r + 1},$$

wo C eine Constante, im vorliegenden Falle 1000, bedeutet und r der reciproke Werth von y ist.

Aus dem Verlaufe der Curve I zeigt sich, dass in der Nähe der Mitte $x = 500$ die Ordinaten am regelmässigsten zunehmen, dass sie dagegen ungefähr unterhalb $x = 400$ sehr langsam und oberhalb $x = 600$ sehr rasch sich ändern. Dies weist darauf hin, dass bei den Messungen mit der Drahtbrücke, wenn thunlich, die Anordnungen so zu wählen sind, dass der Laufcontact möglichst in der Mitte des Drahtes bleibt. Dass unter diesen Umständen wirklich ein Maximum der Empfindlichkeit und der Genauigkeit erhalten wird, ist von verschiedener Seite hervorgehoben worden[1]; es würde jedoch irrig sein, annehmen zu wollen, dass nur innerhalb so enger Grenzen überhaupt brauchbare Resultate mit der Drahtbrücke gewonnen werden können. Die Messungen geben selbst bei ziemlich bedeutendem Missverhältnisse der Brückenzweige Zahlen, welche für die meisten Zwecke noch sehr wohl zu verwenden sind, insofern nur im Uebrigen der Messapparat gewissen Anforderungen entspricht, welche nothwendig an ihn zu stellen sind und auf die wir weiter unten noch aufmerksam machen werden.

Unsere Tafeln sind sowohl der Vollständigkeit wegen, als auch namentlich um den verschiedensten Ansprüchen Rechnung zu tragen, über die ganze Erstreckung der Theilung ausgedehnt worden, obgleich von den ersten und letzten 100 Werthen nur selten Gebrauch gemacht werden wird. Uebrigens ist es mir doch zuweilen vorgekommen, dass sich Messungen innerhalb der ersten 100 Scalentheile bewegten, und die Genauigkeit war trotzdem noch immer eine für die betreffenden Zwecke ausreichende. Durch hinlängliche Empfindlichkeit des Galvanoskopes und richtige Wahl der Batterie kann in manchen Fällen der Unempfindlichkeit des Systemes abgeholfen werden, welche als Folge eines zu starken Missverhältnisses der Brückenzweige eintritt.

Damit jedoch in allen Fällen den Widerstandsbestimmungen vermittelst der Drahtbrücke der jeweils erreichbare Grad von Genauigkeit auch wirklich zukomme, ist vor allem Folgendes zu beachten. Die Drahtlängen müssen mit möglichster Schärfe gemessen werden können, bei der metrischen Brücke muss zudem der Draht genau 1000^{mm} lang sein, und dann ist es unerlässlich, dass der Messdraht von Strecke zu Strecke den nämlichen Leitungswiderstand besitze. Um mit Bezug auf letzteres sicher zu gehen, ist es zweckmässig,

---

1) Vgl. Dehms: Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereines Jahrg. XIII und XV; ferner Schwendler l. c. p. 8.

erst ein längeres Stück des Drahtes, welcher für die Bespannung der Brücke bestimmt ist und der, nebenbei gesagt, aufs sorgfältigste gezogen und ganz frei von Biegungsstellen sein muss, elektrisch zu calibriren[1]) und alsdann dasjenige Stück auszusuchen, welches hierbei am gleichförmigsten befunden wird. Mit anderen Worten, man hat ähnlich zu verfahren, wie es bei der Auswahl der Röhren zur Anfertigung von Thermometern geschieht. Hat der Widerstand des Drahtes einer bereits bespannten Brücke nicht die erforderliche Gleichmässigkeit, so lässt sich, nachdem der Widerstand von Strecke zu Strecke gemessen worden ist, diesem Uebelstande dadurch abhelfen, dass man alle Drahtstrecken durch sehr vorsichtiges Abreiben mit feinstem Smirgelpapier auf den höchsten Widerstand bringt, welcher für eine derselben zu Anfang gefunden worden war. Diese Operation erfordert begreiflicherweise Sorgfalt und Geduld, sie kann aber bis zu jedem wünschenswerthen Grade von Genauigkeit getrieben werden.

Für eine metrische Drahtbrücke, bei der die genannten Anforderungen erfüllt sind, können unsere Hilfstafeln ohne weiteres und mit bedeutender Ersparniss an Zeit und Arbeit benützt werden, und man wird nur in seltenen Fällen zu jenen complicirteren Messungs- und Berechnungsmethoden zu greifen haben, welche namentlich von Siemens und Dehms bei der Reproduction der Normalquecksilber-Einheit in Anwendung gebracht worden sind.

Eine weitere Erhöhung der Genauigkeit kann man überdies noch erreichen, wenn die Anordnung bei den Messungen derart getroffen wird, dass die beiden mit einander zu vergleichenden Widerstände x und n vertauscht werden können, so dass in beiden Lagen die Messung ausgeführt und hieraus das Mittel genommen werden kann. Ist der Maassstab der Brücke nur in einer Richtung mit Zahlen versehen, so ist in diesem Falle die Spalte b der Tafeln vortheilhaft zu gebrauchen.

Der zu bestimmende Widerstand wird nur selten in unmittelbaren Contact mit den Theilen der Messbrücke gebracht werden können, meistens wird man mehr oder weniger lange Zuleitungen nöthig haben, deren Widerstand in Abrechnung zu bringen ist. Wenn diese Zuleitungen aus so dicken Metallmassen gefertigt werden können, dass ihr Widerstand gänzlich vernachlässigt werden kann, so ist dies das Beste; kann dies jedoch nicht geschehen, so ertheilt man denselben zweckmässig einen bestimmten runden Widerstand z. B. von 0,01, 0,1, 0,2 . . . . Einheiten und stellt sie aus einem Metalle her, dessen Leitungsfähigkeit sich nur wenig mit der Temperatur ändert.

Der Widerstand des Brückendrahtes beträgt gewöhnlich ungefähr eine halbe Siemens'sche Einheit, und demgemäss ist das für die Messungen günstigste Verhältniss, dass alle vier Brückenzweige gleichen Widerstand haben, dann erfüllt, wenn der zu messende Widerstand und das Vergleichs-

1) Ueber dieses Calibriren vgl. Foster l. c. p. 200.

maass je eine viertel Einheit betragen. Zur (genauen) Vergleichung grösserer Widerstände z. B. von einer Einheit und darüber empfiehlt es sich, den Messdraht durch Hinzuschalten geeigneter Widerstände auf beiden Seiten zu „verlängern". Bei der früher erwähnten Elliott'schen Brücke Fig. 5 sind zu diesem Zwecke die beiden Unterbrechungen p und q in der Kupferschiene angebracht, in welche Widerstandsrollen eingesetzt werden können, die dem Apparate beigegeben wird.

Die Siemens'sche Brücke, welche Fig. 6 ohne constructive Details zeigt, kann in gewissem Sinne unter die Brücken mit „verlängertem" Messdrahte gerechnet werden. Bei derselben ist nämlich nur der mittlere Theil $A'B'$ des Platindrahtes $AA'B'B$ längs der Scala ausgespannt, dagegen nicht die übrigen Theile AA' und BB', welche somit als die Verlängerungen p und q angesehen werden können. Die beiden Enden des Drahtes AB tauchen in die Näpfchen 1 und 2 eines Quecksilberumschalters, mit welchen bei 3 und 4 ein Ende von x und eines von n verbunden sind. Die beiden anderen Enden dieser Widerstände sind zusammengeführt und bilden den Punkt C, welcher, nebst dem Laufcontacte D, mit den Polen der Batterie in Verbindung steht. Das Galvanoskop wird bei 1 und 2 mit den Enden des Messdrahtes verbunden[1]).

Bei der „metrischen" Brücke kann man den „Verlängerungswiderstand" so wählen, dass trotzdem unsere Tafeln noch benützt werden können. Wird nämlich auf beiden Seiten des Drahtes ein Widerstand angehängt, welcher gerade 4½ mal so gross ist als sein eigener Widerstand, so ist der Draht gewissermassen aufs Zehnfache verlängert und an Stelle der Ablesung in Millimetern und deren Zehnteln tritt eine solche in Centimetern und Millimetern, wobei die Nonienangaben hundertel Theile abgeben. Unter den so geänderten Verhältnissen kommt jetzt an den Anfangspunkt der Theilung 450, in der Mitte, wie zuvor, 500 und an das Ende 550 zu stehen. Zur Vermeidung von Irrungen ist es rathsam, diese neue Bedeutung der Theilstriche auf dem Maasstabe selbst zu vermerken, wie es Fig. 7 zeigt, wobei dies zum Unterschiede von den alten Zahlen etwa mit anderer Farbe geschehen kann.

Es wurde beispielshalber der Widerstand des Drahtes einer metrischen Brücke zu 0,4185 S.E. gefunden; damit dieselbe zur genauen Messung von Widerständen sich eigne, welche nahe an 2 S. E. betragen, soll er aufs Zehnfache verlängert werden. Um dies zu erreichen, sind nach obiger Regel auf jeder Seite des Drahtes $4{,}5 \times 0{,}4185 = 1{,}8833$ S. E. hinzuzufügen.

Der Widerstand des Brückendrahtes kann entweder unter Zuhilfenahme einer zweiten Messvorrichtung, oder auch auf folgende Weise bestimmt werden. Man vergleiche vermittelst der Brücke in der gewöhnlichen Art

---

1) Eine ausführliche Beschreibung der Siemens'schen Brücke gibt Dehms am angeführten Orte, sowie Wiedemann in seinem Galvanismus Bd. I S. 256.



zwei Widerstände x und n, welche nicht sehr verschieden von einander sind, so dass der Schleifcontact D nahe der Mitte zu stehen kommt; die abgelesenen Drahtabschnitte seien in diesem Falle a und b. Hierauf schaltet man an dem einen Ende des Brückendrahtes z. B. bei A' Fig. 8 einen bekannten Widerstand p zu, welcher kleiner als der des zu messenden Drahtes $A'B'$ ist, und vergleicht nun dieselben beiden Widerstände x und n von neuem, wobei die beiden Abschnitte a' und b' erhalten worden seien. Alsdann hat man

$$\text{im ersten Falle: } \frac{x}{n} = \frac{a}{b}$$

$$\text{und im zweiten Falle: } \frac{x}{n} = \frac{a' + p}{b'},$$

wenn jetzt unter p die Anzahl von Millimetern Brückendraht verstanden wird, welche denselben Widerstand haben wie der zugeschaltete. Aus diesen beiden Gleichungen folgt unmittelbar

$$p = \frac{ab' - a'b}{b}.$$

Setzt man in diesen Ausdruck für b und b' ihre eigentlichen Werthe $1000 - a$ und $1000 - a'$ ein, so wird derselbe

$$p = \frac{a - a'}{1 - 0{,}001 \cdot a}.$$

Für den besonderen Fall, dass die zwei Widerstände x und n einander völlig gleich sein sollten, vereinfacht sich diese Formel zu

$$p = \frac{500 - a'}{1 - 0{,}5}$$

oder

$$p = 1000 - 2\,a'.$$

Ein Beispiel wird das Gesagte noch deutlicher machen.

Beim Vergleiche zweier Widerstände x (0,2305 S. E.), und n (0,2000 S. E.) vermittelst der einfachen Brücke soll sich der Abschnitt $a = 535{,}4^{mm}$ ergeben haben. Hierauf habe man auf Seite von x einen Widerstand p von genau 0,2 S. E. zugeschaltet und bei Wiederholung der Messung $a' = 313{,}9^{mm}$ gefunden. In diesem Falle ist

$$p = \frac{535{,}4 - 313{,}9}{1 - 0{,}5354} = 477{,}9^{mm}.$$

Es ist also der Widerstand von $477{,}9^{mm}$ des Brückendrahtes = 0,2 S. E. und somit derjenige der ganzen Meterlänge = 0,4185 S. E.

Bei manchen Messbrücken, welche im Gebrauche sind, ist der Draht länger oder kürzer als 1000 der Theilstriche, in welche die Scala getheilt ist; es soll nun gezeigt werden, wie auch noch unter solchen Umständen die Tafeln von Nutzen sein können. Zunächst sei erwähnt, dass unter Anderem die von Wiedemann in seinem Lehrbuche des Galvanismus be-

schriebene Brücke zu dieser Gattung gehört. Bei diesem Instrumente, das in Fig. 9 in seinen Haupttheilen dargestellt ist, hat der Messdraht eine Länge von 1,2^{m} und ist neben einer Millimetertheilung ausgespannt. Die Enden dieses Drahtes sind mit einer dicken Kupferschiene verlöthet, welche in der Figur schraffirt gezeichnet ist. Die Schiene ist bei p, c und g durchgeschnitten und an den hierdurch gebildeten Enden mit Klemmschrauben und Quecksilbernäpfen versehen. Mit den Klemmen oder Näpfchen 1 und 2 zu beiden Seiten der Unterbrechungsstelle c wird ein Ende des zu bestimmenden Widerstandes und ein Ende des Vergleichswiderstandes verbunden, die beiden anderen Enden dagegen sind wiederum zum Punkte C vereinigt, welcher mit dem einen Pol der Batterie in Verbindung ist, während der andere Pol am Laufcontacte D liegt. Der Galvanoskop wird zwischen 1 und 2 eingefügt[1]).

Der einfachste Weg, eine Brücke, deren Draht über 1000 Scalentheile lang ist, den Tafeln anzupassen, ist der, dass beim Theilstriche 1000 abschliessend, zwei mit Kerben versehene dicke Kupferplatten oder ein z. B. aus Kork geschnittener Quecksilbernapf auf den Draht geschoben werden, mit denen die Verbindungen hergestellt werden, anstatt mit dem eigentlichen Drahtende.

Will man diese einfache Umänderung des Apparates nicht vornehmen, oder ist der Draht einer Brücke kürzer als 1000 Scalentheile, so ist eine kleine Hifsrechnung erforderlich, damit die Tafelwerthe auch in diesem Falle noch brauchbar bleiben. Dies lässt sich auf folgende Art zeigen. Zwei beliebige Widerstände x und n sollen beim Vergleiche vermittelst eines Brückendrahtes von der Länge l die Abschnitte a und b und beim Vergleiche vermittelst eines Drahtes von der Länge l' die Abschnitte a' und b' ergeben, so ist offenbar

$$\text{beim ersten Vergleiche: } \frac{x}{n} = \frac{a}{b} = \frac{a}{l - a}$$

$$\text{und beim zweiten Vergleiche: } \frac{x}{n} = \frac{a'}{b'} = \frac{a'}{l' - a'}.$$

$$\text{Hieraus folgt: } a = a' \frac{l}{l'},$$

d. h. um aus der Ablesung an einer Brücke die entsprechende der andern Brücke zu erfahren, ist erstere einfach mit dem Verhältnisse der beiden Längen der Brückendrähte zu multipliciren. Je nachdem $l' \gtrless l$, ist dieses Verhältniss ein echter oder unechter Bruch. Wir wollen hiervon Gebrauch machen, um die Ablesungen der erwähnten Wiedemann'schen auf unsere

1) Beschrieben in Wiedemann, Galvanismus Bd. I S. 252.

tausendtheilige Brücke zu reduciren. In Metern ausgedrückt, haben wir $l = 1$ und $l' = 1{,}2$ also $\frac{l}{l'} = 0{,}8333$ als die Zahl, mit der die Ablesungen zu multipliciren sein würden, damit sie in den Tafeln aufgesucht werden können. Ist z. B. mit dem genannten Apparate $a' = 436{,}2^{mm}$ abgelesen worden, so ist hieraus

$$a = 436{,}2 \times 0{,}8333 = 363{,}5.$$

Für diese Zahl findet sich auf Tafel XV der Werth 0,57110 als das Verhältniss der beiden Drahtabschnitte resp. des gesuchten Widerstandes zur Vergleichseinheit.

Ohne Benützung der Tafeln würde sich die Berechnung wie folgt gestalten:

$$\begin{array}{rrcl}
\text{gegeben:} & l' = a' + b' & = & 1200^{mm} \\
\text{beobachtet:} & a' & = & 436{,}2 \\
\hline
\text{berechnet:} & b' & = & 763{,}8 \\
\text{Hieraus} & \log a' & = & 2.63969 \\
\text{und} & \log b' & = & 2.88298 \\
\hline
 & \log \frac{a'}{b'} & = & 9.75671 \\
\text{und} & \frac{a'}{b'} & = & 0{,}57110 \text{ (wie zuvor).}
\end{array}$$

Dies zeigt deutlich, dass auch unter diesen Umständen die Tafeln noch mit einigem Nutzen gebraucht werden können; damit dies jedoch der Fall sein kann, sollte der Brückendraht nicht zu sehr von 1000 Scalentheilen abweichen.

Schliesslich sei noch erwähnt, dass die Bemerkungen über Einrichtung und Gebrauch der Drahtbrücke, welche da und dort in diese Einleitung eingestreut wurden, mir namentlich für diejenigen von Interesse zu sein scheinen, welche bisher noch nicht Gelegenheit hatten, eigene Erfahrungen über das genannte Messinstrument zu sammeln. Begreiflicherweise musste ich bei diesen Besprechungen mich so kurz als möglich fassen, damit die Einleitung nicht zu sehr in die Länge gezogen werde, jedoch war ich bestrebt, durch Anmerkungen und Zusätze, so gut ich es vermochte, die Quellen anzugeben, aus denen weitere Auskunft in der Sache zu erlangen ist.

Tafeln

enthaltend

die Werthe des Verhältnisses $\frac{a}{1000-a}$

soweit als thunlich auf fünf Decimalstellen

und deren

dekadische Logarithmen

mit Kennziffer und fünfstelliger Mantisse

für

alle ganzen Zahlen von $a=1$ bis $a=1000$,

nebst den zugehörigen Differenzen und Proportionaltheilen.

Uebersicht.

a		$b=1000-a$		Log. $\frac{a}{b}$		Num. $\frac{a}{b}$		Tafel
von	bis	von	bis	von	bis	von	bis	
0	100	1000	900	$-\infty$	9.04576	0,00000	0,11111	I bis IV
100	200	900	800	9.04576	9.39794	0,11111	0,25000	V bis VIII
200	300	800	700	9.39794	9.63202	0,25000	0,42857	IX bis XII
300	400	700	600	9.63202	9.82391	0,42857	0,66667	XIII bis XVI
400	500	600	500	9.82391	0.00000	0,66667	1,00000	XVII bis XX
500	600	500	400	0.00000	0.17609	1,00000	1,50000	XXI bis XXIV
600	700	400	300	0.17609	0.36798	1,50000	2,33333	XXV bis XXVIII
700	800	300	200	0.36798	0.60206	2,33333	4,00000	XXIX bis XXXII
800	900	200	100	0.60206	0 95424	4,00000	9,00000	XXXIII bis XXXVI
900	1000	100	0	0.95424	$+\infty$	9,00000	∞	XXXVII bis XL
von	bis	von	bis	von	bis	von	bis	Tafel
a		$b=1000-a$		Log. $\frac{a}{b}$		Num. $\frac{a}{b}$		

a: 0—25. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
0	1000	$-\infty$	∞	0,00000	100
1	999	7.00043	30147	0,00100	100
2	998	7.30190	17653	0,00200	101
3	997	7.47843	12537	0,00301	101
4	996	7.60380	9735	0,00402	101
5	995	7.70115	7961	0,00503	101
6	994	7.78076	6739	0,00604	101
7	993	7.84815	5843	0,00705	101
8	992	7.90658	5159	0,00806	102
9	991	7.95817	4619	0,00908	102
10	990	8.00436	4184	0,01010	102
11	989	8.04620	3822	0,01112	103
12	988	8.08442	3521	0,01215	102
13	987	8.11963	3262	0,01317	103
14	986	8.15225	3041	0,01420	103
15	985	8.18266	2846	0,01523	103
16	984	8.21112	2678	0,01626	103
17	983	8.23790	2526	0,01729	104
18	982	8.26316	2392	0,01833	104
19	981	8.28708	2272	0,01937	104
20	980	8.30980	2164	0,02041	104
21	979	8.33144	2064	0,02145	104
22	978	8.35208	1975	0,02249	105
23	977	8.37183	1893	0,02354	105
24	976	8.39076	1818	0,02459	105
25	975	8.40894		0,02564	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	30147	17653	12537	9735
1	3015	1765	1254	974
2	6029	3531	2507	1947
3	9044	5296	3761	2921
4	12059	7061	5015	3894
5	15074	8827	6269	4868
6	18088	10592	7522	5841
7	21103	12357	8776	6815
8	24118	14122	10030	7788
9	27132	15888	11283	8762

	7961	6739	5843	5159	4619
1	796	674	584	516	462
2	1592	1348	1169	1032	924
3	2388	2022	1753	1548	1386
4	3184	2696	2337	2064	1848
5	3981	3370	2922	2580	2310
6	4777	4043	3506	3095	2771
7	5573	4717	4090	3611	3233
8	6369	5391	4674	4127	3695
9	7165	6065	5259	4643	4157

	4184	3822	3521	3262	3041
1	418	382	352	326	304
2	837	764	704	652	608
3	1255	1147	1056	979	912
4	1674	1529	1408	1305	1216
5	2092	1911	1761	1631	1521
6	2510	2293	2113	1957	1825
7	2929	2675	2465	2283	2129
8	3347	3058	2817	2610	2433
9	3766	3440	3169	2936	2737

	2846	2678	2526	2392	2272
1	285	268	253	239	227
2	569	536	505	478	454
3	854	803	758	718	582
4	1138	1071	1010	957	909
5	1423	1339	1263	1196	1136
6	1708	1607	1516	1435	1363
7	1992	1875	1768	1674	1590
8	2277	2142	2021	1914	1818
9	2561	2410	2273	2153	2045

	2164	2061	1975	1893	1818
1	216	206	198	189	182
2	433	413	395	379	364
3	649	619	593	568	545
4	866	826	790	757	727
5	1082	1032	988	947	909
6	1298	1238	1185	1136	1091
7	1515	1445	1383	1325	1273
8	1731	1651	1580	1514	1454
9	1948	1858	1778	1704	1636

(Num. $\frac{a}{b}$)

	100	101
1	10	10
2	20	20
3	30	30
4	40	40
5	50	51
6	60	61
7	70	71
8	80	81
9	90	91

	102
1	10
2	20
3	31
4	41
5	51
6	61
7	71
8	82
9	92

	103
1	10
2	21
3	31
4	41
5	52
6	62
7	72
8	82
9	93

	104
1	10
2	21
3	31
4	42
5	52
6	62
7	73
8	83
9	94

	105
1	11
2	21
3	32
4	42
5	53
6	63
7	74
8	84
9	95

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: 975—1000.

a: **25—50.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
25	975	8.40894	1747	0,02564	105
26	974	8.42641	1684	0,02669	106
27	973	8.44325	1624	0,02775	106
28	972	8.45949	1569	0,02881	106
29	971	8.47518	1517	0,02987	106
30	**970**	8.49035	1469	0,03093	106
31	969	8.50504	1423	0,03199	107
32	968	8.51927	1382	0,03306	107
33	967	8 53309	1341	0,03413	107
34	966	8.54650	1304	0,03520	107
35	965	8.55954	1269	0,03627	107
36	964	8.57223	1235	0,03734	108
37	963	8.58458	1203	0,03842	108
38	962	8.59661	1173	0,03950	108
39	961	8.60834	1145	0,04058	109
40	**960**	8.61979	1118	0,04167	108
41	959	8.63097	1091	0,04275	109
42	958	8.64188	1068	0,04384	109
43	957	8.65256	1043	0,04493	110
44	956	8.66299	1022	0,04603	109
45	955	8.67321	1000	0,04712	110
46	954	8.68321	980	0,04822	110
47	953	8.69301	959	0,04932	110
48	952	8.70260	942	0,05042	110
49	951	8.71202	923	0,05152	111
50	**950**	8.72125		0,05263	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P. (Log. $\frac{a}{b}$) — (Num. $\frac{a}{b}$)

	1747	1684	1624	1569	1517	105	106
1	175	168	162	157	152	11	11
2	349	337	325	314	303	21	21
3	524	505	487	471	455	32	32
4	699	674	650	628	607	42	42
5	874	842	812	785	759	53	53
6	1048	1010	974	941	910	63	64
7	1223	1179	1137	1098	1062	74	74
8	1398	1347	1299	1255	1214	84	85
9	1572	1516	1462	1412	1365	95	95

	1469	1423	1382	1341	1304	107
1	147	142	138	134	130	11
2	294	285	276	268	261	21
3	441	427	415	402	391	32
4	588	569	553	536	522	43
5	735	712	691	671	652	54
6	881	854	829	805	782	64
7	1028	996	967	939	913	75
8	1175	1138	1106	1073	1043	86
9	1322	1281	1244	1207	1174	96

	1269	1235	1203	1173	1145	108
1	127	124	120	117	115	11
2	254	247	241	235	229	22
3	381	371	361	352	344	32
4	508	494	481	469	458	43
5	635	618	602	587	573	54
6	761	741	722	704	687	65
7	888	865	842	821	802	76
8	1015	988	962	938	916	86
9	1142	1112	1083	1056	1031	97

	1118	1091	1068	1043	1022	109
1	112	109	107	104	102	11
2	224	218	214	209	204	22
3	335	327	320	313	307	33
4	447	436	427	417	409	44
5	559	546	534	522	511	55
6	671	655	641	626	613	65
7	783	764	748	730	715	76
8	894	873	854	834	818	87
9	1006	982	961	939	920	98

	1000	980	959	942	923	110	111
1	100	98	96	94	92	11	11
2	200	196	192	188	185	22	22
3	300	294	288	283	277	33	33
4	400	392	384	377	369	44	44
5	500	490	480	471	462	55	56
6	600	588	575	565	554	66	67
7	700	686	671	659	646	77	78
8	800	784	767	754	738	88	89
9	900	882	863	848	831	99	100

(Log. $\frac{a}{b}$) — (Num. $\frac{a}{b}$) **P. P.**

b: **950—975.**

a: 50—75. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
50	**950**	8.72125	905	0,05263	111
51	949	8.73030	890	0,05374	111
52	948	8.73920	873	0,05485	112
53	947	8.74793	857	0,05597	111
54	946	8.75650	843	0,05708	112
55	945	8.76493	829	0,05820	112
56	944	8.77322	814	0,05932	113
57	943	8.78136	802	0,06045	112
58	942	8.78938	788	0,06157	113
59	941	8.79726	776	0,06270	113
60	**940**	8.80502	764	0,06383	113
61	939	8.81266	753	0,06496	114
62	938	8.82019	741	0,06610	114
63	937	8.82760	730	0,06724	114
64	936	8.83490	720	0,06838	114
65	935	8.84210	710	0,06952	114
66	934	8.84920	699	0,07066	115
67	933	8.85619	690	0,07181	115
68	932	8.86309	681	0,07296	115
69	931	8.86990	672	0,07411	116
70	**930**	8.87662	662	0,07527	116
71	929	8.88324	654	0,07643	116
72	928	8.88978	646	0,07759	116
73	927	8.89624	638	0,07875	116
74	926	8.90262	630	0,07991	117
75	925	8.90892		0,08108	

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	905	890	873	857	843
1	91	89	87	86	84
2	181	178	175	171	169
3	272	267	262	257	253
4	362	356	349	343	337
5	453	445	437	429	422
6	543	534	524	514	506
7	634	623	611	600	590
8	724	712	698	686	674
9	815	801	786	771	759

	829	814	802	788	776
1	83	81	80	79	78
2	166	163	160	158	155
3	249	244	241	236	233
4	332	326	321	315	310
5	415	407	401	394	388
6	497	488	481	473	466
7	580	570	561	552	543
8	663	651	642	630	621
9	746	733	722	709	698

	764	753	741	730	720
1	76	75	74	73	72
2	153	151	148	146	144
3	229	226	222	219	216
4	306	301	296	292	288
5	382	377	371	365	360
6	458	452	445	438	432
7	535	527	519	511	504
8	611	602	593	584	576
9	688	678	667	657	648

	710	699	690	681	672
1	71	70	69	68	67
2	142	140	138	136	134
3	213	210	207	204	202
4	284	280	276	272	269
5	355	350	345	341	336
6	426	419	414	409	403
7	497	489	483	477	470
8	568	559	552	545	538
9	639	629	621	613	605

	662	654	646	638	630
1	66	65	65	64	63
2	132	131	129	128	126
3	199	196	194	191	189
4	265	262	258	255	252
5	331	327	323	319	315
6	397	392	388	383	378
7	463	458	452	447	441
8	530	523	517	510	504
9	596	589	581	574	567

(Num. $\frac{a}{b}$)

	111	112
1	11	11
2	22	22
3	33	34
4	44	45
5	56	56
6	67	67
7	78	78
8	89	90
9	100	101

	113
1	11
2	23
3	34
4	45
5	57
6	68
7	79
8	90
9	102

	114
1	11
2	23
3	34
4	46
5	57
6	68
7	80
8	91
9	103

	115
1	12
2	23
3	35
4	46
5	58
6	69
7	81
8	92
9	104

	116	117
1	12	12
2	23	23
3	35	35
4	46	47
5	58	59
6	70	70
7	81	82
8	93	94
9	104	105

a: **75—100.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
75	925	8.90892	622	0,08108	117
76	924	8.91514	615	0,08225	117
77	923	8.92129	607	0,08342	118
78	922	8.92736	601	0,08460	118
79	921	8.93337	593	0,08578	118
80	**920**	8.93930	587	0,08696	118
81	919	8.94517	580	0,08814	118
82	918	8.95097	574	0,08932	119
83	917	8.95671	567	0,09051	119
84	916	8.96238	562	0,09170	120
85	915	8.96800	555	0,09290	119
86	914	8.97355	550	0,09409	120
87	913	8.97905	544	0,09529	120
88	912	8.98449	538	0,09649	120
89	911	8.98987	533	0,09769	121
90	**910**	8.99520	528	0,09890	121
91	909	9.00048	522	0,10011	121
92	908	9.00570	518	0,10132	122
93	907	9.01088	512	0,10254	121
94	906	9.01600	508	0,10375	122
95	905	9.02108	502	0,10497	123
96	904	9.02610	498	0,10620	122
97	903	9.03108	494	0,10742	123
98	902	9.03602	489	0,10865	123
99	901	9.04091	485	0,10988	123
100	**900**	9.04576		0,11111	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	622	615	607	601	593
1	62	62	61	60	59
2	124	123	121	120	119
3	187	185	182	180	178
4	249	246	243	240	237
5	311	308	304	301	297
6	373	369	364	361	356
7	435	431	425	421	415
8	498	492	486	481	474
9	560	554	546	541	534

	587	580	574	567	562
1	59	58	57	57	56
2	117	116	115	113	112
3	176	174	172	170	169
4	235	232	230	227	225
5	294	290	287	284	281
6	352	348	344	340	337
7	411	406	402	397	393
8	470	464	459	454	450
9	528	522	517	510	506

	555	550	544	538	533
1	56	55	54	54	53
2	111	110	109	108	107
3	167	165	163	161	160
4	222	220	218	215	213
5	278	275	272	269	267
6	333	330	326	323	320
7	389	385	381	377	373
8	444	440	435	430	426
9	500	495	490	484	480

	528	522	518	512	508
1	53	52	52	51	51
2	106	104	104	102	102
3	158	157	155	154	152
4	211	209	207	205	203
5	264	261	259	256	254
6	317	313	311	307	305
7	370	365	363	358	356
8	422	418	414	410	406
9	475	470	466	461	457

	502	498	494	489	485
1	50	50	49	49	49
2	100	100	99	98	97
3	151	149	148	147	146
4	201	199	198	196	194
5	251	249	247	245	243
6	301	299	296	293	291
7	351	349	346	342	340
8	402	398	395	391	388
9	452	448	445	440	437

(Num. $\frac{a}{b}$)

	117	118
1	12	12
2	23	24
3	35	35
4	47	47
5	59	59
6	70	71
7	82	83
8	94	94
9	105	106

	119
1	12
2	24
3	36
4	48
5	60
6	71
7	83
8	95
9	107

	120
1	12
2	24
3	36
4	48
5	60
6	72
7	84
8	96
9	108

	121
1	12
2	24
3	36
4	48
5	61
6	73
7	85
8	97
9	109

	122	123
1	12	12
2	24	25
3	37	37
4	49	49
5	61	62
6	73	74
7	85	86
8	98	98
9	110	111

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

a: 100—125. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
100	**900**	9.04576		0,11111	
			480		124
101	899	9.05056		0,11235	
			476		124
102	898	9.05532		0,11359	
			472		124
103	897	9.06004		0,11483	
			469		124
104	896	9.06473		0,11607	
			464		125
105	895	9.06937		0,11732	
			460		125
106	894	9.07397		0,11857	
			456		125
107	893	9.07853		0,11982	
			453		126
108	892	9.08306		0,12108	
			449		125
109	891	9.08755		0,12233	
			445		127
110	**890**	9.09200		0,12360	
			442		126
111	889	9.09642		0,12486	
			439		127
112	888	9.10081		0,12613	
			434		127
113	887	9.10515		0,12740	
			432		127
114	886	9.10947		0,12867	
			428		127
115	885	9.11375		0,12994	
			426		128
116	884	9.11801		0,13122	
			422		128
117	883	9.12223		0,13250	
			418		129
118	882	9.12641		0,13379	
			416		128
119	881	9.13057		0,13507	
			413		129
120	**880**	9.13470		0,13636	
			410		130
121	879	9.13880		0,13766	
			407		129
122	878	9.14287		0,13895	
			404		130
123	877	9.14691		0,14025	
			401		130
124	876	9.15092		0,14155	
			398		131
125	875	9.15490		0,14286	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$) | (Num. $\frac{a}{b}$)

	480	476	472	469	464			124
1	48	48	47	47	46		1	12
2	96	95	94	94	93		2	25
3	144	143	142	141	139		3	37
4	192	190	189	188	186		4	50
5	240	238	236	235	232		5	62
6	288	286	283	281	278		6	74
7	336	333	330	328	325		7	87
8	384	381	378	375	371		8	99
9	432	428	425	422	418		9	112

	460	456	453	449	445			125
1	46	46	45	45	45		1	13
2	92	91	91	90	89		2	25
3	138	137	136	135	134		3	38
4	184	182	181	180	178		4	50
5	230	228	227	225	223		5	63
6	276	274	272	269	267		6	75
7	322	319	317	314	312		7	88
8	368	365	362	359	356		8	100
9	414	410	408	404	401		9	113

	442	439	434	432	428			126	127
1	44	44	43	43	43		1	13	13
2	88	88	87	86	86		2	25	25
3	133	132	130	130	128		3	38	38
4	177	176	174	173	171		4	50	51
5	221	220	217	216	214		5	63	64
6	265	263	260	259	257		6	76	76
7	309	307	304	302	300		7	88	89
8	354	351	347	346	342		8	101	102
9	398	395	391	389	385		9	113	114

	426	422	418	416	413			128	129
1	43	42	42	42	41		1	13	13
2	85	84	84	83	83		2	26	26
3	128	127	125	125	124		3	38	39
4	170	169	167	166	165		4	51	52
5	213	211	209	208	207		5	64	65
6	256	253	251	250	248		6	77	77
7	298	295	293	291	289		7	90	90
8	341	338	334	333	330		8	102	103
9	383	380	376	374	372		9	115	116

	410	407	404	401	398			130	131
1	41	41	40	40	40		1	13	13
2	82	81	81	80	80		2	26	26
3	123	122	121	120	119		3	39	39
4	164	163	162	160	159		4	52	52
5	205	204	202	201	199		5	65	66
6	246	244	242	241	239		6	78	79
7	287	285	283	281	279		7	91	92
8	328	326	323	321	318		8	104	105
9	369	366	364	361	358		9	117	118

(Log. $\frac{a}{b}$) | (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: 875—900.

a: 125—150. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
125	875	9.15490		0,14286	
			396		131
126	874	9.15886		0,14417	
			393		131
127	873	9.16279		0,14548	
			390		131
128	872	9.16669		0,14679	
			388		132
129	871	9.17057		0,14811	
			385		132
130	**870**	9.17442		0,14943	
			383		132
131	869	9.17825		0,15075	
			380		132
132	868	9.18205		0,15207	
			378		133
133	867	9.18583		0,15340	
			376		133
134	866	9.18959		0,15473	
			373		134
135	865	9.19332		0,15607	
			371		134
136	864	9.19703		0,15741	
			368		134
137	863	9.20071		0,15875	
			366		134
138	862	9.20437		0,16009	
			364		135
139	861	9.20801		0,16144	
			362		135
140	**860**	9.21163		0,16279	
			360		135
141	859	9.21523		0,16414	
			357		136
142	858	9.21880		0,16550	
			356		136
143	857	9.22236		0,16686	
			353		136
144	856	9.22589		0,16822	
			351		137
145	855	9.22940		0,16959	
			349		137
146	854	9.23289		0,17096	
			348		137
147	853	9.23637		0,17233	
			345		138
148	852	9.23982		0,17371	
			344		138
149	851	9.24326		0,17509	
			341		138
150	**850**	9.24667		0,17647	

P. P. (Log. $\frac{a}{b}$)

	396	393	390	388	385
1	40	39	39	39	39
2	79	79	78	78	77
3	119	118	117	116	116
4	158	157	156	155	154
5	198	197	195	194	193
6	238	236	234	233	231
7	277	275	273	272	270
8	317	314	312	310	308
9	356	354	351	349	347

	383	380	378	376	373
1	38	38	38	38	37
2	77	76	76	75	75
3	115	114	113	113	112
4	153	152	151	150	149
5	192	190	189	188	187
6	230	228	227	226	224
7	268	266	265	263	261
8	306	304	302	301	298
9	345	342	340	338	336

	371	368	366	364	362
1	37	37	37	36	36
2	74	74	73	73	72
3	111	110	110	109	109
4	148	147	146	146	145
5	186	184	183	182	181
6	223	221	220	218	217
7	260	258	256	255	253
8	297	294	293	291	290
9	334	331	329	328	326

	360	357	356	353	351
1	36	36	36	35	35
2	72	71	71	71	70
3	108	107	107	106	105
4	144	143	142	141	140
5	180	179	178	177	176
6	216	214	214	212	211
7	252	250	249	247	246
8	288	286	285	282	281
9	324	321	320	318	316

	349	348	345	314	341
1	35	35	35	34	34
2	70	70	69	69	68
3	105	104	104	103	102
4	140	139	138	138	136
5	175	174	173	172	171
6	209	209	207	206	205
7	244	244	242	241	239
8	279	278	276	275	273
9	314	313	311	310	307

P. P. (Num. $\frac{a}{b}$)

	131
1	13
2	26
3	39
4	52
5	66
6	79
7	92
8	105
9	118

	132	133
1	13	13
2	26	27
3	40	40
4	53	53
5	66	67
6	79	80
7	92	93
8	106	106
9	119	120

	134	135
1	13	14
2	27	27
3	40	41
4	54	54
5	67	68
6	80	81
7	94	95
8	107	108
9	121	122

	136	137
1	14	14
2	27	27
3	41	41
4	54	55
5	68	69
6	82	82
7	95	96
8	109	110
9	122	123

	138
1	14
2	28
3	41
4	55
5	69
6	83
7	97
8	110
9	124

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.	(Log. $\frac{a}{b}$) P. P.	(Num. $\frac{a}{b}$) P. P.

b: 850—875.

a: **150—175.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
150	**850**	9.24667	340	0,17647	139
151	849	9.25007	338	0,17786	139
152	848	9.25345	336	0,17925	139
153	847	9.25681	334	0,18064	139
154	846	9.26015	332	0,18203	140
155	845	9.26347	331	0,18343	140
156	844	9.26678	329	0,18483	141
157	843	9.27007	328	0,18624	141
158	842	9.27335	325	0,18765	141
159	841	9.27660	324	0,18906	142
160	**840**	9.27984	322	0,19048	142
161	839	9.28306	321	0,19190	142
162	838	9.28627	319	0,19332	142
163	837	9.28946	318	0,19474	143
164	836	9.29264	316	0,19617	144
165	835	9.29580	314	0,19761	143
166	834	9.29894	313	0,19904	144
167	833	9.30207	312	0,20048	144
168	832	9.30519	310	0,20192	145
169	831	9.30829	308	0,20337	145
170	**830**	9.31137	307	0,20482	145
171	829	9.31444	306	0,20627	146
172	828	9.31750	304	0,20773	146
173	827	9.32054	303	0,20919	146
174	826	9.32357	301	0,21065	147
175	825	9.32658		0,21212	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

	340	338	336	334	332	139	
1	34	34	34	33	33	14	
2	68	68	67	67	66	28	
3	102	101	101	100	100	42	
4	136	135	134	134	133	56	
5	170	169	168	167	166	70	
6	204	203	202	200	199	83	
7	238	237	235	234	232	97	
8	272	270	269	267	266	111	
9	306	304	302	301	299	125	
	331	**329**	**328**	**325**	**324**	**140**	**141**
1	33	33	33	33	32	14	14
2	66	66	66	65	65	28	28
3	99	99	98	98	97	42	42
4	132	132	131	130	130	56	56
5	166	165	164	163	162	70	71
6	199	197	197	195	194	84	85
7	232	230	230	228	227	98	99
8	265	263	262	260	259	112	113
9	298	296	295	293	292	126	127
	322	**321**	**319**	**318**	**316**	**142**	**143**
1	32	32	32	32	32	14	14
2	64	64	64	64	63	28	29
3	97	96	96	95	95	43	43
4	129	128	128	127	126	57	57
5	161	161	160	159	158	71	72
6	193	193	191	191	190	85	86
7	225	225	223	223	221	99	100
8	258	257	255	254	253	114	114
9	290	289	287	286	284	128	129
	314	**313**	**312**	**310**	**308**	**144**	**145**
1	31	31	31	31	31	14	15
2	63	63	62	62	62	29	29
3	94	94	94	93	92	43	44
4	126	125	125	124	123	58	58
5	157	157	156	155	154	72	73
6	188	188	187	186	185	86	87
7	220	219	218	217	216	101	102
8	251	250	250	248	246	115	116
9	283	282	281	279	277	130	131
	307	**306**	**304**	**303**	**301**	**146**	**147**
1	31	31	30	30	30	15	15
2	61	61	61	61	60	29	29
3	92	92	91	91	90	44	44
4	123	122	122	121	120	58	59
5	154	153	152	152	151	73	74
6	184	184	182	182	181	88	88
7	215	214	213	212	211	102	103
8	246	245	243	242	241	117	118
9	276	275	274	273	271	131	132

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: **825—850.**

a: **175—200.** $(a + b = 1000.)$

a	*b*	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
175	825	9.32658	301	0,21212	147
176	824	9.32959	298	0,21359	148
177	823	9.33257	298	0,21507	148
178	822	9.33555	296	0,21655	148
179	821	9.33851	295	0,21803	148
180	**820**	9.34146	293	0,21951	149
181	819	9.34439	293	0,22100	149
182	818	9.34732	291	0,22249	150
183	817	9.35023	290	0,22399	150
184	816	9.35313	288	0,22549	150
185	815	9.35601	288	0,22699	151
186	814	9.35889	286	0,22850	151
187	813	9.36175	285	0,23001	152
188	812	9.36460	284	0,23153	152
189	811	9.36744	283	0,23305	152
190	**810**	9.37027	281	0,23457	152
191	809	9.37308	281	0,23609	153
192	808	9.37589	279	0,23762	154
193	807	9.37868	279	0,23916	154
194	806	9.38147	277	0,24070	154
195	805	9.38424	276	0,24224	154
196	804	9.38700	275	0,24378	155
197	803	9.38975	274	0,24533	155
198	802	9.39249	273	0,24688	156
199	801	9.39522	272	0,24844	156
200	**800**	9.39794		0,25000	

P. P. $\left(\text{Log. } \frac{a}{b}\right)$

	301	298	296	295
1	30	30	30	30
2	60	60	59	59
3	90	89	89	89
4	120	119	118	118
5	151	149	148	148
6	181	179	178	177
7	211	209	207	207
8	241	238	237	236
9	271	268	266	266

	293	291	290	288
1	29	29	29	29
2	59	58	58	58
3	88	87	87	86
4	117	116	116	115
5	147	146	145	144
6	176	175	174	173
7	205	204	203	202
8	234	233	232	230
9	264	262	261	259

	286	285	284	283
1	29	29	28	28
2	57	57	57	57
3	86	86	85	85
4	114	114	114	113
5	143	143	142	142
6	172	171	170	170
7	200	200	199	198
8	229	228	227	226
9	257	257	256	255

	281	279	277	276
1	28	28	28	28
2	56	56	55	55
3	84	84	83	83
4	112	112	111	110
5	141	140	139	138
6	169	167	166	166
7	197	195	194	193
8	225	223	222	221
9	253	251	249	248

	275	274	273	272
1	28	27	27	27
2	55	55	55	54
3	83	82	82	82
4	110	110	109	109
5	138	137	137	136
6	165	164	164	163
7	193	192	191	190
8	220	219	218	218
9	248	247	246	245

P. P. $\left(\text{Num. } \frac{a}{b}\right)$

	147	148
1	15	15
2	29	30
3	44	44
4	59	59
5	74	74
6	88	89
7	103	104
8	118	118
9	132	133

	149	150
1	15	15
2	30	30
3	45	45
4	60	60
5	75	75
6	89	90
7	104	105
8	119	120
9	134	135

	151	152
1	15	15
2	30	30
3	45	46
4	60	61
5	76	76
6	91	91
7	106	106
8	121	122
9	136	137

	153	154
1	15	15
2	31	31
3	46	46
4	61	62
5	77	77
6	92	92
7	107	108
8	122	123
9	138	139

	155	156
1	16	16
2	31	31
3	47	47
4	62	62
5	78	78
6	93	94
7	109	109
8	124	125
9	140	140

a	*b*	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.	$\left(\text{Log. } \frac{a}{b}\right)$ P. P.	$\left(\text{Num. } \frac{a}{b}\right)$ P. P.

b: **800—825.**

a: **200—225.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
200	**800**	9.39794		0,25000	
			271		156
201	799	9.40065		0,25156	
			270		157
202	798	9.40335		0,25313	
			269		158
203	797	9.40604		0,25471	
			268		157
204	796	9.40872		0,25628	
			267		158
205	795	9.41139		0,25786	
			266		159
206	794	9.41405		0,25945	
			265		158
207	793	9.41670		0,26103	
			264		160
208	792	9.41934		0,26263	
			263		159
209	791	9.42197		0,26422	
			262		160
210	**790**	9.42459		0,26582	
			262		161
211	789	9.42721		0,26743	
			260		161
212	788	9.42981		0,26904	
			259		161
213	787	9.43240		0,27065	
			259		161
214	786	9.43499		0,27226	
			258		163
215	785	9.43757		0,27389	
			257		162
216	784	9.44014		0,27551	
			256		163
217	783	9.44270		0,27714	
			255		163
218	782	9.44525		0,27877	
			254		164
219	781	9.44779		0,28041	
			254		164
220	**780**	9.45033		0,28205	
			252		165
221	779	9.45285		0,28370	
			252		165
222	778	9.45537		0,28535	
			251		165
223	777	9.45788		0,28700	
			251		166
224	776	9.46039		0,28866	
			249		166
225	775	9.46288		0,29032	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	271	270	269	268
1	27	27	27	27
2	54	54	54	54
3	81	81	81	80
4	108	108	108	107
5	136	135	135	134
6	163	162	161	161
7	190	189	188	188
8	217	216	215	214
9	244	243	242	241

	267	266	265	264
1	27	27	27	26
2	53	53	53	53
3	80	80	80	79
4	107	106	106	106
5	134	133	133	132
6	160	160	159	158
7	187	186	186	185
8	214	213	212	211
9	240	239	239	238

	263	262	260	259
1	26	26	26	26
2	53	52	52	52
3	79	79	78	78
4	105	105	104	104
5	132	131	130	130
6	158	157	156	155
7	184	183	182	181
8	210	210	208	207
9	237	236	234	233

	258	257	256	255
1	26	26	26	26
2	52	51	51	51
3	77	77	77	77
4	103	103	102	102
5	129	129	128	128
6	155	154	154	153
7	181	180	179	179
8	206	206	205	204
9	232	231	230	230

	254	252	251	249
1	25	25	25	25
2	51	50	50	50
3	76	76	75	75
4	102	101	100	100
5	127	126	126	125
6	152	151	151	149
7	178	176	176	174
8	203	202	201	199
9	229	227	226	224

(Num. $\frac{a}{b}$)

	156	157	158
1	16	16	16
2	31	31	32
3	47	47	47
4	62	63	63
5	78	79	79
6	94	94	95
7	109	110	111
8	125	126	126
9	140	141	142

	159	160
1	16	16
2	32	32
3	48	48
4	64	64
5	80	80
6	95	96
7	111	112
8	127	128
9	143	144

	161	162
1	16	16
2	32	32
3	48	49
4	64	65
5	81	81
6	97	97
7	113	113
8	129	130
9	145	146

	163	164
1	16	16
2	33	33
3	49	49
4	65	66
5	82	82
6	98	98
7	114	115
8	130	131
9	147	148

	165	166
1	17	17
2	33	33
3	50	50
4	66	66
5	83	83
6	99	100
7	116	116
8	132	133
9	149	149

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: **775—800.**

a: **225—250.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
225	775	9.46288	249	0,29032	167
226	774	9.46537	248	0,29199	167
227	773	9.46785	247	0,29366	168
228	772	9.47032	246	0,29534	168
229	771	9.47278	246	0,29702	168
230	**770**	9.47524	245	0,29870	169
231	769	9.47769	244	0,30039	169
232	768	9.48013	243	0,30208	170
233	767	9.48256	243	0,30378	170
234	766	9.48499	242	0,30548	171
235	765	9.48741	241	0,30719	171
236	764	9.48982	240	0,30890	172
237	763	9.49222	240	0,31062	172
238	762	9.49462	239	0,31234	172
239	761	9.49701	239	0,31406	173
240	**760**	9.49940	238	0,31579	173
241	759	9.50178	237	0,31752	174
242	758	9.50415	236	0,31926	174
243	757	9.50651	236	0,32100	175
244	756	9.50887	235	0,32275	175
245	755	9.51122	234	0,32450	176
246	754	9.51356	234	0,32626	176
247	753	9.51590	233	0,32802	177
248	752	9.51823	233	0,32979	177
249	751	9.52056	232	0,33156	177
250	**750**	9.52288		0,33333	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	249	248	247	246
1	25	25	25	25
2	50	50	49	49
3	75	74	74	74
4	100	99	99	98
5	125	124	124	123
6	149	149	148	148
7	174	174	173	172
8	199	198	198	197
9	224	223	222	221

	245	244	243	242
1	25	24	24	24
2	49	49	49	48
3	74	73	73	73
4	98	98	97	97
5	123	122	122	121
6	147	146	146	145
7	172	171	170	169
8	196	195	194	194
9	221	220	219	218

	241	240	239
1	24	24	24
2	48	48	48
3	72	72	72
4	96	96	96
5	121	120	120
6	145	144	143
7	169	168	167
8	193	192	191
9	217	216	215

	238	237	236
1	24	24	24
2	48	47	47
3	71	71	71
4	95	95	94
5	119	119	118
6	143	142	142
7	167	166	165
8	190	190	189
9	214	213	212

	235	234	233	232
1	24	23	23	23
2	47	47	47	46
3	71	70	70	70
4	94	94	93	93
5	118	117	117	116
6	141	140	140	139
7	165	164	163	162
8	188	187	186	186
9	212	211	210	209

(Num. $\frac{a}{b}$)

	167	168	169
1	17	17	17
2	33	34	34
3	50	50	51
4	67	67	68
5	84	84	85
6	100	101	101
7	117	118	118
8	134	134	135
9	150	151	152

	170	171
1	17	17
2	34	34
3	51	51
4	68	68
5	85	86
6	102	103
7	119	120
8	136	137
9	153	154

	172	173
1	17	17
2	34	35
3	52	52
4	69	69
5	86	87
6	103	104
7	120	121
8	138	138
9	155	156

	174	175
1	17	18
2	35	35
3	52	53
4	70	70
5	87	88
6	104	105
7	122	123
8	139	140
9	157	158

	176	177
1	18	18
2	35	35
3	53	53
4	70	71
5	88	89
6	106	106
7	123	124
8	141	142
9	158	159

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

a: 250—275. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
250	**750**	9.52288	231	0,33333	178
251	749	9,52519	231	0,33511	179
252	748	9.52750	230	0,33690	179
253	747	9.52980	229	0,33869	179
254	746	9.53209	229	0,34048	180
255	745	9.53438	229	0,34228	181
256	744	9.53667	227	0,34409	181
257	743	9.53894	228	0,34590	181
258	742	9.54122	226	0,34771	182
259	741	9.54348	226	0,34953	182
260	**740**	9.54574	226	0,35135	183
261	739	9.54800	224	0,35318	183
262	738	9.55024	225	0,35501	184
263	737	9.55249	224	0,35685	185
264	736	9.55473	223	0,35870	184
265	735	9.55696	223	0,36054	186
266	734	9.55919	222	0,36240	186
267	733	9.56141	221	0,36426	186
268	732	9.56362	221	0,36612	187
269	731	9.56583	221	0,36799	187
270	**730**	9.56804	220	0,36986	188
271	729	9.57024	220	0,37174	189
272	728	9.57244	219	0,37363	189
273	727	9.57463	218	0,37552	189
274	726	9.57681	218	0,37741	190
275	725	9.57899		0,37931	

P. P. (Log. $\frac{a}{b}$)

	231	230	229
1	23	23	23
2	46	46	46
3	69	69	69
4	92	92	92
5	116	115	115
6	139	138	137
7	162	161	160
8	185	184	183
9	208	207	206

	228	227	226
1	23	23	23
2	46	45	45
3	68	68	68
4	91	91	90
5	114	114	113
6	137	136	136
7	160	159	158
8	182	182	181
9	205	204	203

	225	224	223
1	23	22	22
2	45	45	45
3	68	67	67
4	90	90	89
5	113	112	112
6	135	134	134
7	158	157	156
8	180	179	178
9	203	202	201

	222	221	220
1	22	22	22
2	44	44	44
3	67	66	66
4	89	88	88
5	111	111	110
6	133	133	132
7	155	155	154
8	178	177	176
9	200	199	198

	219	218
1	22	22
2	44	44
3	66	65
4	88	87
5	110	109
6	131	131
7	153	153
8	175	174
9	197	196

P. P. (Num. $\frac{a}{b}$)

	178	179	180
1	18	18	18
2	36	36	36
3	53	54	54
4	71	72	72
5	89	90	90
6	107	107	108
7	125	125	126
8	142	143	144
9	160	161	162

	181	182
1	18	18
2	36	36
3	54	55
4	72	73
5	91	91
6	109	109
7	127	127
8	145	146
9	163	164

	183	184	185
1	18	18	19
2	37	37	37
3	55	55	56
4	73	74	74
5	92	92	93
6	110	110	111
7	128	129	130
8	146	147	148
9	165	166	167

	186	187
1	19	19
2	37	37
3	56	56
4	74	75
5	93	94
6	112	112
7	130	131
8	149	150
9	167	168

	188	189	190
1	19	19	19
2	38	38	38
3	56	57	57
4	75	76	76
5	94	95	95
6	113	113	114
7	132	132	133
8	150	151	152
9	169	170	171

a: **275—300.** ($a + b = 1000.$)

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
275	725	9.57899	218	0,37931	191
276	724	9.58117	217	0,38122	191
277	723	9.58334	217	0,38313	191
278	722	9.58551	216	0,38504	192
279	721	9.58767	216	0,38696	193
280	**720**	9.58983	215	0,38889	193
281	719	9.59198	214	0,39082	194
282	718	9.59412	215	0,39276	194
283	717	9.59627	214	0,39470	195
284	716	9.59841	213	0,39665	195
285	715	9.60054	213	0,39860	196
286	714	9.60267	212	0,40056	196
287	713	9.60479	212	0,40252	197
288	712	9.60691	212	0,40449	198
289	711	9.60903	211	0,40647	198
290	**710**	9.61114	211	0,40845	199
291	709	9.61325	210	0,41044	199
292	708	9.61535	210	0,41243	200
293	707	9.61745	209	0,41443	200
294	706	9.61954	209	0,41643	201
295	705	9.62163	209	0,41844	201
296	704	9.62372	208	0,42045	203
297	703	9.62580	208	0,42248	202
298	702	9.62788	207	0,42450	203
299	701	9.62995	207	0,42653	204
300	**700**	9.63202		0,42857	

P. P. (Log. $\frac{a}{b}$)

	218	217	216
1	22	22	22
2	44	43	43
3	65	65	65
4	87	87	86
5	109	109	108
6	131	130	130
7	153	152	151
8	174	174	173
9	196	195	194

	215	214
1	22	21
2	43	43
3	65	64
4	86	86
5	108	107
6	129	128
7	151	150
8	172	171
9	194	193

	213	212
1	21	21
2	43	42
3	64	64
4	85	85
5	107	106
6	128	127
7	149	148
8	170	170
9	192	191

	211	210
1	21	21
2	42	42
3	63	63
4	84	84
5	106	105
6	127	126
7	148	147
8	169	168
9	190	189

	209	208	207
1	21	21	21
2	42	42	41
3	63	62	62
4	84	83	83
5	105	104	104
6	125	125	124
7	146	146	145
8	167	166	166
9	188	187	186

P. P. (Num. $\frac{a}{b}$)

	191	192
1	19	19
2	38	38
3	57	58
4	76	77
5	96	96
6	115	115
7	134	134
8	153	154
9	172	173

	193	194	195
1	19	19	20
2	39	39	39
3	58	58	59
4	77	78	78
5	97	97	98
6	116	116	117
7	135	136	137
8	154	155	156
9	174	175	176

	196	197	198
1	20	20	20
2	39	39	40
3	59	59	59
4	78	79	79
5	98	99	99
6	118	118	119
7	137	138	139
8	157	158	158
9	176	177	178

	199	200	201
1	20	20	20
2	40	40	40
3	60	60	60
4	80	80	80
5	100	100	101
6	119	120	121
7	139	140	141
8	159	160	161
9	179	180	181

	202	203	204
1	20	20	20
2	40	41	41
3	61	61	61
4	81	81	82
5	101	102	102
6	121	122	122
7	141	142	143
8	162	162	163
9	182	183	184

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.	(Log. $\frac{a}{b}$) P. P.	(Num. $\frac{a}{b}$) P. P.

b: **700—725.**

a: 300—325. ($a + b = 1000$.)

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
300	**700**	9.63202	207	0,42857	205
301	699	9.63409	206	0,43062	204
302	698	9.63615	206	0,43266	206
303	697	9.63821	205	0,43472	206
304	696	9.64026	206	0,43678	207
305	695	9.64232	204	0,43885	207
306	694	9.64436	205	0,44092	208
307	693	9.64641	203	0,44300	209
308	692	9.64844	204	0,44509	209
309	691	9.65048	203	0,44718	210
310	**690**	9.65251	203	0,44928	210
311	689	9.65454	203	0,45138	211
312	688	9.65657	202	0,45349	211
313	687	9.65859	202	0,45560	213
314	686	9.66061	201	0,45773	212
315	685	9.66262	201	0,45985	214
316	684	9.66463	201	0,46199	214
317	683	9.66664	200	0,46413	215
318	682	9.66864	200	0,46628	215
319	681	9.67064	200	0,46843	216
320	**680**	9.67264	200	0,47059	216
321	679	9.67464	199	0,47275	218
322	678	9.67663	198	0,47493	217
323	677	9.67861	199	0,47710	219
324	676	9.68060	198	0,47929	219
325	675	9.68258		0,48148	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

Communis

	207	206	205	204
1	21	21	21	20
2	41	41	41	41
3	62	62	62	61
4	83	82	82	82
5	104	103	103	102
6	124	124	123	122
7	145	144	144	143
8	166	165	164	163
9	186	185	185	184

(Log. $\frac{a}{b}$)

	203	202
1	20	20
2	41	40
3	61	61
4	81	81
5	102	101
6	122	121
7	142	141
8	162	162
9	183	182

	201	200
1	20	20
2	40	40
3	60	60
4	80	80
5	101	100
6	121	120
7	141	140
8	161	160
9	181	180

	199	198
1	20	20
2	40	40
3	60	59
4	80	79
5	100	99
6	119	119
7	139	139
8	159	158
9	179	178

(Num. $\frac{a}{b}$)

	208	209	210	211
1	21	21	21	21
2	42	42	42	42
3	62	63	63	63
4	83	84	84	84
5	104	105	105	106
6	125	125	126	127
7	146	146	147	148
8	166	167	168	169
9	187	188	189	190

	212	213	214	215
1	21	21	21	22
2	42	43	43	43
3	64	64	64	65
4	85	85	86	86
5	106	107	107	108
6	127	128	128	129
7	148	149	150	151
8	170	170	171	172
9	191	192	193	194

	216	217	218	219
1	22	22	22	22
2	43	43	44	44
3	65	65	65	66
4	86	87	87	88
5	108	109	109	110
6	130	130	131	131
7	151	152	153	153
8	173	174	174	175
9	194	195	196	197

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

a: 325—350. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
325	675	9.68258	198	0,48148	220
326	674	9.68456	197	0,48368	220
327	673	9 68653	197	0,48588	222
328	672	9.68850	197	0,48810	221
329	671	9.69047	197	0,49031	223
330	**670**	9.69244	196	0,49254	223
331	669	9.69440	196	0,49477	224
332	668	9.69636	196	0,49701	224
333	667	9.69832	195	0,49925	225
334	666	9.70027	195	0,50150	226
335	665	9.70222	195	0,50376	226
336	664	9.70417	195	0,50602	228
337	663	9.70612	194	0,50830	227
338	662	9.70806	194	0,51057	229
339	661	9.71000	194	0,51286	229
340	**660**	9.71194	193	0,51515	230
341	659	9.71387	193	0,51745	231
342	658	9.71580	193	0,51976	231
343	657	9.71773	192	0,52207	232
344	656	9.71965	193	0,52439	233
345	655	9.72158	192	0,52672	233
346	654	9.72350	192	0,52905	234
347	653	9.72542	191	0,53139	235
348	652	9.72733	191	0,53374	236
349	651	9.72924	191	0,53610	236
350	**650**	9.73115		0,53846	

P. P. (Log. $\frac{a}{b}$)

	198	197
1	20	20
2	40	39
3	59	59
4	79	79
5	99	99
6	119	118
7	139	138
8	158	158
9	178	177

	196
1	20
2	39
3	59
4	78
5	98
6	118
7	137
8	157
9	176

	195	194
1	20	19
2	39	39
3	59	58
4	78	78
5	98	97
6	117	116
7	137	136
8	156	155
9	176	175

	193
1	19
2	39
3	58
4	77
5	97
6	116
7	135
8	154
9	174

	192	191
1	19	19
2	38	38
3	58	57
4	77	76
5	96	96
6	115	115
7	134	134
8	154	153
9	173	172

P. P. (Num. $\frac{a}{b}$)

	220	221	222	223
1	22	22	22	22
2	44	44	44	45
3	66	66	67	67
4	88	88	89	89
5	110	111	111	112
6	132	133	133	134
7	154	155	155	156
8	176	177	178	178
9	198	199	200	201

	224	225	226
1	22	23	23
2	45	45	45
3	67	68	68
4	90	90	90
5	112	113	113
6	134	135	136
7	157	158	158
8	179	180	181
9	202	203	203

	227	228	229
1	23	23	23
2	45	46	46
3	68	68	69
4	91	91	92
5	114	114	115
6	136	137	137
7	159	160	160
8	182	182	183
9	204	205	206

	230	231	232
1	23	23	23
2	46	46	46
3	69	69	70
4	92	92	93
5	115	116	116
6	138	139	139
7	161	162	162
8	184	185	186
9	207	208	209

	233	234	235	236
1	23	23	24	24
2	47	47	47	47
3	70	70	71	71
4	93	94	94	94
5	117	117	118	118
6	140	140	141	142
7	163	164	165	165
8	186	187	188	189
9	210	211	212	212

a: **350—375.** $(a + b = 1000.)$

a	*b*	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
350	**650**	9.73115	191	0,53846	237
351	649	9.73306	191	0,54083	238
352	648	9.73497	190	0,54321	239
353	647	9.73687	190	0,54560	239
354	646	9.73877	190	0,54799	240
355	645	9.74067	189	0,55039	241
356	644	9.74256	190	0,55280	241
357	643	9.74446	189	0,55521	242
358	642	9.74635	189	0,55763	243
359	641	9.74824	188	0,56006	244
360	**640**	9.75012	189	0,56250	245
361	639	9.75201	188	0,56495	245
362	638	9.75389	188	0,56740	246
363	637	9.75577	187	0,56986	247
364	636	9.75764	188	0,57233	247
365	635	9.75952	187	0,57480	249
366	634	9.76139	187	0,57729	249
367	633	9.76326	187	0,57978	250
368	632	9.76513	187	0,58228	251
369	631	9.76700	186	0,58479	251
370	**630**	9.76886	186	0,58730	253
371	629	9.77072	186	0,58983	253
372	628	9.77258	186	0,59236	254
373	627	9.77444	186	0,59490	254
374	626	9.77630	185	0,59744	256
375	625	9.77815		0,60000	
a	*b*	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	191	190
1	19	19
2	38	38
3	57	57
4	76	76
5	96	95
6	115	114
7	134	133
8	153	152
9	172	171

	189
1	19
2	38
3	57
4	76
5	95
6	113
7	132
8	151
9	170

	188
1	19
2	38
3	56
4	75
5	94
6	113
7	132
8	150
9	169

	187
1	19
2	37
3	56
4	75
5	94
6	112
7	131
8	150
9	168

	186	185
1	19	19
2	37	37
3	56	56
4	74	74
5	93	93
6	112	111
7	130	130
8	149	148
9	167	167

(Num. $\frac{a}{b}$)

	237	238	239	240
1	24	24	24	24
2	47	48	48	48
3	71	71	72	72
4	95	95	96	96
5	119	119	120	120
6	142	143	143	144
7	166	167	167	168
8	190	190	191	192
9	213	214	215	216

	241	242	243	244
1	24	24	24	24
2	48	48	49	49
3	72	73	73	73
4	96	97	97	98
5	121	121	122	122
6	145	145	146	146
7	169	169	170	171
8	193	194	194	195
9	217	218	219	220

	245	246	247
1	25	25	25
2	49	49	49
3	74	74	74
4	98	98	99
5	123	123	124
6	147	148	148
7	172	172	173
8	196	197	198
9	221	221	222

	249	250	251
1	25	25	25
2	50	50	50
3	75	75	75
4	100	100	100
5	125	125	126
6	149	150	151
7	174	175	176
8	199	200	201
9	224	225	226

	253	254	256
1	25	25	26
2	51	51	51
3	76	76	77
4	101	102	102
5	127	127	128
6	152	152	154
7	177	178	179
8	202	203	205
9	228	229	230

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: **625—650.**

a: 375—400. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
375	625	9.77815	185	0,60000	256
376	624	9.78000	185	0,60256	258
377	623	9.78185	185	0,60514	258
378	622	9.78370	185	0,60772	259
379	621	9.78555	184	0,61031	259
380	**620**	9.78739	184	0,61290	261
381	619	9.78923	184	0,61551	261
382	618	9.79107	184	0,61812	263
383	617	9.79291	184	0,62075	263
384	616	9.79475	184	0,62338	264
385	615	9.79659	183	0,62602	264
386	614	9.79842	183	0,62866	266
387	613	9.80025	183	0,63132	267
388	612	9.80208	183	0,63399	267
389	611	9.80391	182	0,63666	268
390	**610**	9.80573	183	0,63934	270
391	609	9.80756	182	0,64204	270
392	608	9.80938	182	0,64474	271
393	607	9.81120	182	0,64745	272
394	606	9.81302	182	0,65017	272
395	605	9.81484	182	0,65289	274
396	604	9.81666	181	0,65563	274
397	603	9.81847	182	0,65837	276
398	602	9.82029	181	0,66113	276
399	601	9.82210	181	0,66389	278
400	**600**	9.82391		0,66667	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

	(Log. $\frac{a}{b}$)		(Num. $\frac{a}{b}$)		
	185		256	258	259
1	19	1	26	26	26
2	37	2	51	52	52
3	56	3	77	77	78
4	74	4	102	103	104
5	93	5	128	129	130
6	111	6	154	155	155
7	130	7	179	181	181
8	148	8	205	206	207
9	167	9	230	232	233
	184		261	263	264
1	18	1	26	26	26
2	37	2	52	53	53
3	55	3	78	79	79
4	74	4	104	105	106
5	92	5	131	132	132
6	110	6	157	158	158
7	129	7	183	184	185
8	147	8	209	210	211
9	166	9	235	237	238
	183		266	267	268
1	18	1	27	27	27
2	37	2	53	53	54
3	55	3	80	80	80
4	73	4	106	107	107
5	92	5	133	134	134
6	110	6	160	160	161
7	128	7	186	187	188
8	146	8	213	214	214
9	165	9	239	240	241
	182		270	271	272
1	18	1	27	27	27
2	36	2	54	54	54
3	55	3	81	81	82
4	73	4	108	108	109
5	91	5	135	136	136
6	109	6	162	163	163
7	127	7	189	190	190
8	146	8	216	217	218
9	164	9	243	244	245
	181		274	276	278
1	18	1	27	28	28
2	36	2	55	55	56
3	54	3	82	83	83
4	72	4	110	110	111
5	91	5	137	138	139
6	109	6	164	166	167
7	127	7	192	193	195
8	145	8	219	221	222
9	163	9	247	248	250
	(Log. $\frac{a}{b}$)		(Num. $\frac{a}{b}$)		

P. P.

b: 600—625.

a: 400—425. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
400	600	9.82391	181	0,66667	278
401	599	9.82572	180	0,66945	279
402	598	9.82752	181	0,67224	280
403	597	9.82933	181	0,67504	281
404	596	9.83114	180	0,67785	282
405	595	9.83294	180	0,68067	283
406	594	9.83474	180	0,68350	284
407	593	9.83654	180	0,68634	285
408	592	9.83834	180	0,68919	286
409	591	9.84014	179	0,69205	287
410	590	9.84193	180	0,69492	287
411	589	9.84373	179	0,69779	289
412	588	9.84552	179	0,70068	290
413	587	9.84731	179	0,70358	290
414	586	9.84910	179	0,70648	292
415	585	9.85089	179	0,70940	293
416	584	9.85268	179	0,71233	294
417	583	9.85447	178	0,71527	294
418	582	9.85625	179	0,71821	296
419	581	9.85804	178	0,72117	297
420	580	9.85982	178	0,72414	298
421	579	9.86160	178	0,72712	298
422	578	9.86338	178	0,73010	300
423	577	9.86516	178	0,73310	301
424	576	9.86694	178	0,73611	302
425	575	9.86872		0,73913	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	181
1	18
2	36
3	54
4	72
5	91
6	109
7	127
8	145
9	163

	180
1	18
2	36
3	54
4	72
5	90
6	108
7	126
8	144
9	162

	179
1	18
2	36
3	54
4	72
5	90
6	107
7	125
8	143
9	161

	178
1	18
2	36
3	53
4	71
5	89
6	107
7	125
8	142
9	160

(Num. $\frac{a}{b}$)

	278	279	280	281	282
1	28	28	28	28	28
2	56	56	56	56	56
3	83	84	84	84	85
4	111	112	112	112	113
5	139	140	140	141	141
6	167	167	168	169	169
7	195	195	196	197	197
8	222	223	224	225	226
9	250	251	252	253	254

	283	284	285	286
1	28	28	29	29
2	57	57	57	57
3	85	85	86	86
4	113	114	114	114
5	142	142	143	143
6	170	170	171	172
7	198	199	200	200
8	226	227	228	229
9	255	256	257	257

	287	289	290	292
1	29	29	29	29
2	57	58	58	58
3	86	87	87	88
4	115	116	116	117
5	144	145	145	146
6	172	173	174	175
7	201	202	203	204
8	230	231	232	234
9	258	260	261	263

	293	294	296	297
1	29	29	30	30
2	59	59	59	59
3	88	88	89	89
4	117	118	118	119
5	147	147	148	149
6	176	176	178	178
7	205	206	207	208
8	234	235	237	238
9	264	265	266	267

	298	300	301	302
1	30	30	30	30
2	60	60	60	60
3	89	90	90	91
4	119	120	120	121
5	149	150	151	151
6	179	180	181	181
7	209	210	211	211
8	238	240	241	242
9	268	270	271	272

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: 575—600.

a: **425—450.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
425	575	9.86872	178	0,73913	303
426	574	9.87050	177	0,74216	304
427	573	9.87227	178	0,74520	305
428	572	9.87405	177	0,74825	306
429	571	9.87582	177	0,75131	308
430	**570**	9.87759	178	0,75439	308
431	569	9.87937	177	0,75747	309
432	568	9.88114	176	0,76056	311
433	567	9.88290	177	0,76367	311
434	566	9.88467	177	0,76678	313
435	565	9.88644	177	0,76991	314
436	564	9.88821	176	0,77305	315
437	563	9.88997	177	0,77620	316
438	562	9.89174	176	0,77936	317
439	561	9.89350	176	0,78253	318
440	**560**	9.89526	177	0.78571	320
441	559	9.89703	176	0,78891	320
442	558	9.89879	176	0,79211	322
443	557	9.90055	176	0,79533	323
444	556	9.90231	176	0,79856	324
445	555	9.90407	176	0.80180	325
446	554	9.90583	175	0,80505	327
447	553	9.90758	176	0,80832	327
448	552	9.90934	175	0,81159	329
449	551	9.91109	176	0,81488	330
450	**550**	9.91285		0,81818	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	178	177	176	175
1	18	18	18	18
2	36	35	35	35
3	53	53	53	53
4	71	71	70	70
5	89	89	88	88
6	107	106	106	105
7	125	124	123	123
8	142	142	141	140
9	160	159	158	158

(Num. $\frac{a}{b}$)

	303	304	305	306
1	30	30	31	31
2	61	61	61	61
3	91	91	92	92
4	121	122	122	122
5	152	152	153	153
6	182	182	183	184
7	212	213	214	214
8	242	243	244	245
9	273	274	275	275

	308	309	311	313
1	31	31	31	31
2	62	62	62	63
3	92	93	93	94
4	123	124	124	125
5	154	155	156	157
6	185	185	187	188
7	216	216	218	219
8	246	247	249	250
9	277	278	280	282

	314	315	316	317	318
1	31	32	32	32	32
2	63	63	63	63	64
3	94	95	95	95	95
4	126	126	126	127	127
5	157	158	158	159	159
6	188	189	190	190	191
7	220	221	221	222	223
8	251	252	253	254	254
9	283	284	284	285	286

	320	322	323	324
1	32	32	32	32
2	64	64	65	65
3	96	97	97	97
4	128	129	129	130
5	160	161	162	162
6	192	193	194	194
7	224	225	226	227
8	256	258	258	259
9	288	290	291	292

	325	327	329	330
1	33	33	33	33
2	65	65	66	66
3	98	98	99	99
4	130	131	132	132
5	163	164	165	165
6	195	196	197	198
7	228	229	230	231
8	260	262	263	264
9	293	294	296	297

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: **550—575.**

a: **450—475.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
450	**550**	9.91285	175	0,81818	331
451	549	9.91460	176	0,82149	333
452	548	9.91636	175	0,82482	333
453	547	9.91811	175	0,82815	335
454	546	9.91986	175	0,83150	336
455	545	9.92161	176	0,83486	338
456	544	9.92337	175	0,83824	338
457	543	9.92512	175	0,84162	340
458	542	9.92687	175	0,84502	341
459	541	9.92862	174	0,84843	342
460	**540**	9.93036	175	0,85185	344
461	539	9.93211	175	0,85529	345
462	538	9.93386	175	0,85874	346
463	537	9.93561	174	0,86220	347
464	536	9.93735	175	0,86567	349
465	535	9.93910	174	0,86916	350
466	534	9.94084	175	0,87266	351
467	533	9.94259	174	0,87617	353
468	532	9.94433	175	0,87970	354
469	531	9.94608	174	0,88324	355
470	**530**	9.94782	175	0,88679	357
471	529	9.94957	174	0,89036	358
472	528	9.95131	174	0,89394	359
473	527	9.95305	174	0,89753	361
474	526	9.95479	174	0,90114	362
475	525	9.95653		0,90476	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	176
1	18
2	35
3	53
4	70
5	88
6	106
7	123
8	141
9	158

	175
1	18
2	35
3	53
4	70
5	88
6	105
7	123
8	140
9	158

	174
1	17
2	35
3	52
4	70
5	87
6	104
7	122
8	139
9	157

(Num. $\frac{a}{b}$)

	331	333	335	336
1	33	33	34	34
2	66	67	67	67
3	99	100	101	101
4	132	133	134	134
5	166	167	168	168
6	199	200	201	202
7	232	233	235	235
8	265	266	268	269
9	298	300	302	302

	338	340	341	342
1	34	34	34	34
2	68	68	68	68
3	101	102	102	103
4	135	136	136	137
5	169	170	171	171
6	203	204	205	205
7	237	238	239	239
8	270	272	273	274
9	304	306	307	308

	344	345	346	347	349
1	34	35	35	35	35
2	69	69	69	69	70
3	103	104	104	104	105
4	138	138	138	139	140
5	172	173	173	174	175
6	206	207	208	208	209
7	241	242	242	243	244
8	275	276	277	278	279
9	310	311	311	312	314

	350	351	353	354	355
1	35	35	35	35	36
2	70	70	71	71	71
3	105	105	106	106	107
4	140	140	141	142	142
5	175	176	177	177	178
6	210	211	212	212	213
7	245	246	247	248	249
8	280	281	282	283	284
9	315	316	318	319	320

	357	358	359	361	362
1	36	36	36	36	36
2	71	72	72	72	72
3	107	107	108	108	109
4	143	143	144	144	145
5	179	179	180	181	181
6	214	215	215	217	217
7	250	251	251	253	253
8	286	286	287	289	290
9	321	322	323	325	326

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

a: 475—500. ($a + b = 1000$.)

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
475	525	9.95653		0,90476	
			175		364
476	524	9.95828		0,90840	
			174		365
477	523	9.96002		0,91205	
			174		366
478	522	9.96176		0,91571	
			174		368
479	521	9.96350		0,91939	
			174		369
480	**520**	9.96524		0,92308	
			174		370
481	519	9.96698		0,92678	
			174		372
482	518	9.96872		0,93050	
			174		374
483	517	9.97046		0,93424	
			174		374
484	516	9.97220		0,93798	
			173		377
485	515	9.97393		0,94175	
			174		378
486	514	9.97567		0,94553	
			174		379
487	513	9.97741		0,94932	
			174		380
488	512	9.97915		0,95312	
			174		383
489	511	9.98089		0,95695	
			174		383
490	**510**	9.98263		0,96078	
			173		386
491	509	9.98436		0,96464	
			174		386
492	508	9.98610		0,96850	
			174		389
493	507	9.98784		0,97239	
			174		389
494	506	9.98958		0,97628	
			173		392
495	505	9.99131		0,98020	
			174		393
496	504	9.99305		0,98413	
			174		394
497	503	9.99479		0,98807	
			174		396
498	502	9.99653		0,99203	
			173		398
499	501	9.99826		0,99601	
			174		399
500	**500**	0.00000		1,00000	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	175
1	18
2	35
3	53
4	70
5	88
6	105
7	123
8	140
9	158

	174
1	17
2	35
3	52
4	70
5	87
6	104
7	122
8	139
9	157

	173
1	17
2	35
3	52
4	69
5	87
6	104
7	121
8	138
9	156

(Num. $\frac{a}{b}$)

	364	365	366	368	369
1	36	37	37	37	37
2	73	73	73	74	74
3	109	110	110	110	111
4	146	146	146	147	148
5	182	183	183	184	185
6	218	219	220	221	221
7	255	256	256	258	258
8	291	292	293	294	295
9	328	329	329	331	332

	370	372	374	377
1	37	37	37	38
2	74	74	75	75
3	111	112	112	113
4	148	149	150	151
5	185	186	187	189
6	222	223	224	226
7	259	260	262	264
8	296	298	299	302
9	333	335	337	339

	378	379	380	383
1	38	38	38	38
2	76	76	76	77
3	113	114	114	115
4	151	152	152	153
5	189	190	190	192
6	227	227	228	230
7	265	265	266	268
8	302	303	304	306
9	340	341	342	345

	386	389	392
1	39	39	39
2	77	78	78
3	116	117	118
4	154	156	157
5	193	195	196
6	232	233	235
7	270	272	274
8	309	311	314
9	347	350	353

	393	394	396	398	399
1	39	39	40	40	40
2	79	79	79	80	80
3	118	118	119	119	120
4	157	158	158	159	160
5	197	197	198	199	200
6	236	236	238	239	239
7	275	276	277	279	279
8	314	315	317	318	319
9	354	355	356	358	359

(Log $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: 500—525.

a: **500—525.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
500	**500**	0.00000		1,00000	
			174		401
501	499	0.00174		1,00401	
			173		402
502	498	0.00347		1,00803	
			174		404
503	497	0.00521		1,01207	
			174		406
504	496	0.00695		1,01613	
			174		407
505	495	0.00869		1,02020	
			173		409
506	494	0.01042		1,02429	
			174		411
507	493	0.01216		1,02840	
			174		412
508	492	0.01390		1,03252	
			174		414
509	491	0.01564		1,03666	
			173		416
510	**490**	0.01737		1,04082	
			174		417
511	489	0.01911		1,04499	
			174		419
512	488	0.02085		1,04918	
			174		421
513	487	0.02259		1,05339	
			174		422
514	486	0.02433		1,05761	
			174		425
515	485	0.02607		1,06186	
			173		426
516	484	0.02780		1,06612	
			174		427
517	483	0.02954		1,07039	
			174		430
518	482	0.03128		1,07469	
			174		431
519	481	0.03302		1,07900	
			174		433
520	**480**	0.03476		1,08333	
			174		435
521	479	0.03650		1,08768	
			174		437
522	478	0.03824		1,09205	
			174		439
523	477	0.03998		1,09644	
			174		440
524	476	0.04172		1,10084	
			175		442
525	475	0.04347		1,10526	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	173
1	17
2	35
3	52
4	69
5	87
6	104
7	121
8	138
9	156

	174
1	17
2	35
3	52
4	70
5	87
6	104
7	122
8	139
9	157

	175
1	18
2	35
3	53
4	70
5	88
6	105
7	123
8	140
9	158

(Num. $\frac{a}{b}$)

	401	402	404	406	407
1	40	40	40	41	41
2	80	80	81	81	81
3	120	121	121	122	122
4	160	161	162	162	163
5	201	201	202	203	204
6	241	241	242	244	244
7	281	281	283	284	285
8	321	322	323	325	326
9	361	362	364	365	366

	409	411	412	414	416
1	41	41	41	41	42
2	82	82	82	83	83
3	123	123	124	124	125
4	164	164	165	166	166
5	205	206	206	207	208
6	245	247	247	248	250
7	286	288	288	290	291
8	327	329	330	331	333
9	368	370	371	373	374

	417	419	421	422	425
1	42	42	42	42	43
2	83	84	84	84	85
3	125	126	126	127	128
4	167	168	168	169	170
5	209	210	211	211	213
6	250	251	253	253	255
7	292	293	295	295	298
8	334	335	337	338	340
9	375	377	379	380	383

	426	427	430	431	433
1	43	43	43	43	43
2	85	85	86	86	87
3	128	128	129	129	130
4	170	171	172	172	173
5	213	214	215	216	217
6	256	256	258	259	260
7	298	299	301	302	303
8	341	342	344	345	346
9	383	384	387	388	390

	435	437	439	440	442
1	44	44	44	44	44
2	87	87	88	88	88
3	131	131	132	132	133
4	174	175	176	176	177
5	218	219	220	220	221
6	261	262	263	264	265
7	305	306	307	308	309
8	348	350	351	352	354
9	392	393	395	396	398

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: **475—500.**

a: 525—550. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
525	475	0.04347	174	1,10526	444
526	474	0.04521	174	1,10970	446
527	473	0.04695	174	1,11416	448
528	472	0.04869	174	1,11864	450
529	471	0.05043	175	1,12314	452
530	**470**	0.05218	174	1,12766	454
531	469	0.05392	175	1,13220	455
532	468	0.05567	174	1,13675	458
533	467	0.05741	175	1,14133	459
534	466	0.05916	174	1,14592	462
535	465	0.06090	175	1,15054	463
536	464	0.06265	174	1,15517	466
537	463	0.06439	175	1,15983	467
538	462	0.06614	175	1,16450	470
539	461	0.06789	175	1,16920	471
540	**460**	0.06964	174	1,17391	474
541	459	0.07138	175	1,17865	476
542	458	0.07313	175	1,18341	477
543	457	0.07488	175	1,18818	480
544	456	0.07663	176	1,19298	482
545	455	0.07839	175	1,19780	484
546	454	0.08014	175	1,20264	487
547	453	0.08189	175	1,20751	488
548	452	0.08364	176	1,21239	491
549	451	0.08540	175	1,21730	492
550	**450**	0.08715		1,22222	

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	174
1	17
2	35
3	52
4	70
5	87
6	104
7	122
8	139
9	157

	175
1	18
2	35
3	53
4	70
5	88
6	105
7	123
8	140
9	158

	176
1	18
2	35
3	53
4	70
5	88
6	106
7	123
8	141
9	158

(Num. $\frac{a}{b}$)

	444	446	448	450	452
1	44	45	45	45	45
2	89	89	90	90	90
3	133	134	134	135	136
4	178	178	179	180	181
5	222	223	224	225	226
6	266	268	269	270	271
7	311	312	314	315	316
8	355	357	358	360	362
9	400	401	403	405	407

	454	455	458	459	462
1	45	46	46	46	46
2	91	91	92	92	92
3	136	137	137	138	139
4	182	182	183	184	185
5	227	228	229	230	231
6	272	273	275	275	277
7	318	319	321	321	323
8	363	364	366	367	370
9	409	410	412	413	416

	463	466	467	470	471
1	46	47	47	47	47
2	93	93	93	94	94
3	139	140	140	141	141
4	185	186	187	188	188
5	232	233	234	235	236
6	278	280	280	282	283
7	324	326	327	329	330
8	370	373	374	376	377
9	417	419	420	423	424

	474	476	477	480	482
1	47	48	48	48	48
2	95	95	95	96	96
3	142	143	143	144	145
4	190	190	191	192	193
5	237	238	239	240	241
6	284	286	286	288	289
7	332	333	334	336	337
8	379	381	382	384	386
9	427	428	429	432	434

	484	487	488	491	492
1	48	49	49	49	49
2	97	97	98	98	98
3	145	146	146	147	148
4	194	195	195	196	197
5	242	244	244	246	246
6	290	292	293	295	295
7	339	341	342	344	344
8	387	390	390	393	394
9	436	438	439	442	443

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.	(Log. $\frac{a}{b}$)	(Num. $\frac{a}{b}$)
						P. P.	

b: 450—475.

a: **550—575.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
550	**450**	0.08715		1,22222	
			176		495
551	449	0.08891		1,22717	
			175		497
552	448	0.09066		1,23214	
			176		500
553	447	0.09242		1,23714	
			175		501
554	446	0.09417		1,24215	
			176		504
555	445	0.09593		1,24719	
			176		506
556	444	0.09769		1,25225	
			176		509
557	443	0.09945		1,25734	
			176		510
558	442	0.10121		1,26244	
			176		513
559	441	0.10297		1,26757	
			177		516
560	**440**	0.10474		1,27273	
			176		517
561	439	0.10650		1,27790	
			176		521
562	438	0.10826		1,28311	
			177		522
563	437	0.11003		1,28833	
			176		525
564	436	0.11179		1,29358	
			177		527
565	435	0.11356		1,29885	
			177		530
566	434	0.11533		1,30415	
			177		532
567	433	0.11710		1,30947	
			176		534
568	432	0.11886		1,31481	
			178		538
569	431	0.12064		1,32019	
			177		539
570	**430**	0.12241		1,32558	
			177		542
571	429	0.12418		1,33100	
			177		545
572	428	0.12595		1,33645	
			178		547
573	427	0.12773		1,34192	
			177		550
574	426	0.12950		1,34742	
			178		552
575	425	0.13128		1,35294	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	175
1	18
2	35
3	53
4	70
5	88
6	105
7	123
8	140
9	158

	176
1	18
2	35
3	53
4	70
5	88
6	106
7	123
8	141
9	158

	177
1	18
2	35
3	53
4	71
5	89
6	106
7	124
8	142
9	159

	178
1	18
2	36
3	53
4	71
5	89
6	107
7	125
8	142
9	160

(Num. $\frac{a}{b}$)

	495	497	500	501	504
1	50	50	50	50	50
2	99	99	100	100	101
3	149	149	150	150	151
4	198	199	200	200	202
5	248	249	250	251	252
6	297	298	300	301	302
7	347	348	350	351	353
8	396	398	400	401	403
9	446	447	450	451	454

	506	509	510	513	516
1	51	51	51	51	52
2	101	102	102	103	103
3	152	153	153	154	155
4	202	204	204	205	206
5	253	255	255	257	258
6	304	305	306	308	310
7	354	356	357	359	361
8	405	407	408	410	413
9	455	458	459	462	464

	517	521	522	525	527
1	52	52	52	53	53
2	103	104	104	105	105
3	155	156	157	158	158
4	207	208	209	210	211
5	259	261	261	263	264
6	310	313	313	315	316
7	362	365	365	368	369
8	414	417	418	420	422
9	465	469	470	473	474

	530	532	534	538	539
1	53	53	53	54	54
2	106	106	107	108	108
3	159	160	160	161	162
4	212	213	214	215	216
5	265	266	267	269	270
6	318	319	320	323	323
7	371	372	374	377	377
8	424	426	427	430	431
9	477	479	481	484	485

	542	545	547	550	552
1	54	55	55	55	55
2	108	109	109	110	110
3	163	164	164	165	166
4	217	218	219	220	221
5	271	273	274	275	276
6	325	327	328	330	331
7	379	382	383	385	386
8	434	436	438	440	442
9	488	491	492	495	497

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: **425—450.**

a: 575—600. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
575	425	0.13128		1,35294	
			178		555
576	424	0.13306		1,35849	
			178		558
577	423	0.13484		1,36407	
			178		560
578	422	0.13662		1,36967	
			178		563
579	421	0.13840		1,37530	
			178		565
580	**420**	0.14018		1,38095	
			178		568
581	419	0.14196		1,38663	
			179		571
582	418	0.14375		1,39234	
			178		574
583	417	0.14553		1,39808	
			179		577
584	416	0.14732		1,40385	
			179		579
585	415	0.14911		1,40964	
			179		582
586	414	0.15090		1,41546	
			179		585
587	413	0.15269		1,42131	
			179		587
588	412	0.15448		1,42718	
			179		591
589	411	0.15627		1,43309	
			180		593
590	**410**	0.15807		1,43902	
			179		597
591	409	0.15986		1,44499	
			180		599
592	408	0.16166		1,45098	
			180		602
593	407	0.16346		1,45700	
			180		605
594	406	0.16526		1,46305	
			180		609
595	405	0.16706		1,46914	
			180		611
596	404	0.16886		1,47525	
			181		614
597	403	0.17067		1,48139	
			181		617
598	402	0.17248		1,48756	
			180		621
599	401	0.17428		1,49377	
			181		623
600	**400**	0.17609		1,50000	

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$) — (Num. $\frac{a}{b}$)

	178		555	558	560	563	565
1	18	1	56	56	56	56	57
2	36	2	111	112	112	113	113
3	53	3	167	167	168	169	170
4	71	4	222	223	224	225	226
5	89	5	278	279	280	282	283
6	107	6	333	335	336	338	339
7	125	7	389	391	392	394	396
8	142	8	444	446	448	450	452
9	160	9	500	502	504	507	509

	179		568	571	574	577	579
1	18	1	57	57	57	58	58
2	36	2	114	114	115	115	116
3	54	3	170	171	172	173	174
4	72	4	227	228	230	231	232
5	90	5	284	286	287	289	290
6	107	6	341	343	344	346	347
7	125	7	398	400	402	404	405
8	143	8	454	457	459	462	463
9	161	9	511	514	517	519	521

	582	585	587	591	593
1	58	59	59	59	59
2	116	117	117	118	119
3	175	176	176	177	178
4	233	234	235	236	237
5	291	293	294	296	297
6	349	351	352	355	356
7	407	410	411	414	415
8	466	468	470	473	474
9	524	527	528	532	534

	180		597	599	602	605	609
1	18	1	60	60	60	61	61
2	36	2	119	120	120	121	122
3	54	3	179	180	181	182	183
4	72	4	239	240	240	242	244
5	90	5	299	300	301	303	305
6	108	6	358	359	361	363	365
7	126	7	418	419	421	424	426
8	144	8	478	479	482	484	487
9	162	9	537	539	542	545	548

	181		611	614	617	621	623
1	18	1	61	61	62	62	62
2	36	2	122	123	123	124	125
3	54	3	183	184	185	186	187
4	72	4	244	246	247	248	249
5	91	5	306	307	309	311	312
6	109	6	367	368	370	373	374
7	127	7	428	430	432	435	436
8	145	8	489	491	494	497	498
9	163	9	550	553	555	559	561

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.	(Log. $\frac{a}{b}$) P. P.	(Num. $\frac{a}{b}$) P. P.

b: 400—425.

a: 600—625. ($a + b = 1000$.)

a	*b*	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
600	**400**	0.17609		1,50000	
			181		627
601	399	0.17790		1,50627	
			181		629
602	398	0.17971		1,51256	
			182		633
603	397	0.18153		1,51889	
			181		636
604	396	0.18334		1,52525	
			182		640
605	395	0.18516		1,53165	
			182		642
606	394	0.18698		1,53807	
			182		646
607	393	0.18880		1,54453	
			182		649
608	392	0.19062		1,55102	
			182		652
609	391	0.19244		1,55754	
			183		656
610	**390**	0.19427		1,56410	
			182		659
611	389	0.19609		1,57069	
			183		663
612	388	0.19792		1,57732	
			183		666
613	387	0.19975		1,58398	
			183		669
614	386	0.20158		1,59067	
			183		673
615	385	0.20341		1,59740	
			184		677
616	384	0.20525		1,60417	
			184		680
617	383	0.20709		1,61097	
			184		683
618	382	0.20893		1,61780	
			184		687
619	381	0.21077		1,62467	
			184		691
620	**380**	0.21261		1,63158	
			184		694
621	379	0.21445		1,63852	
			185		698
622	378	0.21630		1,64550	
			185		702
623	377	0.21815		1,65252	
			185		705
624	376	0.22000		1,65957	
			185		710
625	375	0.22185		1,66667	
a	*b*	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)		(Num. $\frac{a}{b}$)					
	181		627	629	633	636	640
1	18	1	63	63	63	64	64
2	36	2	125	126	127	127	128
3	54	3	188	189	190	191	192
4	72	4	251	252	253	254	256
5	91	5	314	315	317	318	320
6	109	6	376	377	380	382	384
7	127	7	439	440	443	445	448
8	145	8	502	503	506	509	512
9	163	9	564	566	570	572	576
	182		642	646	649	652	656
1	18	1	64	65	65	65	66
2	36	2	128	129	130	130	131
3	55	3	193	194	195	196	197
4	73	4	257	258	260	261	262
5	91	5	321	323	325	326	328
6	109	6	385	388	389	391	394
7	127	7	449	452	454	456	459
8	146	8	514	517	519	522	525
9	164	9	578	581	584	587	590
	183		659	663	666	669	673
1	18	1	66	66	67	67	67
2	37	2	132	133	133	134	135
3	55	3	198	199	200	201	202
4	73	4	264	265	266	268	269
5	92	5	330	332	333	335	337
6	110	6	395	398	400	401	404
7	128	7	461	464	466	468	471
8	146	8	527	530	533	535	538
9	165	9	593	597	599	602	606
	184		677	680	683	687	691
1	18	1	68	68	68	69	69
2	37	2	135	136	137	137	138
3	55	3	203	204	205	206	207
4	74	4	271	272	273	275	276
5	92	5	339	340	342	344	346
6	110	6	406	408	410	412	415
7	129	7	474	476	478	481	484
8	147	8	542	544	546	550	553
9	166	9	609	612	615	618	622
	185		694	698	702	705	710
1	19	1	69	70	70	71	71
2	37	2	139	140	140	141	142
3	56	3	208	209	211	212	213
4	74	4	278	279	281	282	284
5	93	5	347	349	351	353	355
6	111	6	416	419	421	423	426
7	130	7	486	489	491	494	497
8	148	8	555	558	562	564	568
9	167	9	625	628	632	635	639
(Log. $\frac{a}{b}$)		(Num. $\frac{a}{b}$)					

P. P.

b: **375—400.**

a: 625—650. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
625	375	0.22185		1,66667	
			185		713
626	374	0.22370		1,67380	
			186		717
627	373	0.22556		1,68097	
			186		720
628	372	0.22742		1,68817	
			186		725
629	371	0.22928		1,69542	
			186		728
630	**370**	0.23114		1,70270	
			186		733
631	369	0.23300		1,71003	
			187		736
632	368	0.23487		1,71739	
			187		741
633	367	0.23674		1,72480	
			187		744
634	366	0.23861		1,73224	
			187		749
635	365	0.24048		1,73973	
			188		752
636	364	0.24236		1,74725	
			187		757
637	363	0.24423		1,75482	
			188		761
638	362	0.24611		1,76243	
			188		765
639	361	0.24799		1,77008	
			189		770
640	**360**	0.24988		1,77778	
			188		774
641	359	0.25176		1,78552	
			189		778
642	358	0.25365		1,79330	
			189		782
643	357	0.25554		1,80112	
			190		787
644	356	0.25744		1,80899	
			189		791
645	355	0.25933		1,81690	
			190		796
646	354	0.26123		1,82486	
			190		800
647	353	0.26313		1,83286	
			190		805
648	352	0.26503		1,84091	
			191		809
649	351	0.26694		1,84900	
			191		814
650	**350**	0.26885		1,85714	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

	(Log. $\frac{a}{b}$)			(Num. $\frac{a}{b}$)				
	185	186		713	717	720	725	728
1	19	19	1	71	72	72	73	73
2	37	37	2	143	143	144	145	146
3	56	56	3	214	215	216	218	218
4	74	74	4	285	287	288	290	291
5	93	93	5	357	359	360	363	364
6	111	112	6	428	430	432	435	437
7	130	130	7	499	502	504	508	510
8	148	149	8	570	574	576	580	582
9	167	167	9	642	645	648	653	655
	187			733	736	741	744	749
1	19		1	73	74	74	74	75
2	37		2	147	147	148	149	150
3	56		3	220	221	222	223	225
4	75		4	293	294	296	298	300
5	94		5	367	368	371	372	375
6	112		6	440	442	445	446	449
7	131		7	513	515	519	521	524
8	150		8	586	589	593	595	599
9	168		9	660	662	667	670	674
	188			752	757	761	765	770
1	19		1	75	76	76	77	77
2	38		2	150	151	152	153	154
3	56		3	226	227	228	230	231
4	75		4	301	303	304	306	308
5	94		5	376	379	381	383	385
6	113		6	451	454	457	459	462
7	132		7	526	530	533	536	539
8	150		8	602	606	609	612	616
9	169		9	677	681	685	689	693
	189			774	778	782	787	791
1	19		1	77	78	78	79	79
2	38		2	155	156	156	157	158
3	57		3	232	233	235	236	237
4	76		4	310	311	313	315	316
5	95		5	387	389	391	394	396
6	113		6	464	467	469	472	475
7	132		7	542	545	547	551	554
8	151		8	619	622	626	630	633
9	170		9	697	700	704	708	712
	190	191		796	800	805	809	814
1	19	19	1	80	80	81	81	81
2	38	38	2	159	160	161	162	163
3	57	57	3	239	240	242	243	244
4	76	76	4	318	320	322	324	326
5	95	96	5	398	400	403	405	407
6	114	115	6	478	480	483	485	488
7	133	134	7	557	560	564	566	570
8	152	153	8	637	640	644	647	651
9	171	172	9	716	720	725	728	733
	(Log. $\frac{a}{b}$)			(Num. $\frac{a}{b}$)				

P. P.

b: 350—375.

a: **650—675.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
650	**350**	0.26885	191	1,85714	819
651	349	0.27076	191	1,86533	823
652	348	0.27267	191	1,87356	828
653	347	0.27458	192	1,88184	833
654	346	0.27650	192	1,89017	838
655	345	0.27842	193	1,89855	843
656	344	0.28035	192	1,90698	847
657	343	0.28227	193	1,91545	853
658	342	0.28420	193	1,92398	857
659	341	0.28613	194	1,93255	863
660	**340**	0.28807	193	1,94118	867
661	339	0.29000	194	1,94985	873
662	338	0.29194	194	1,95858	878
663	337	0.29388	195	1,96736	883
664	336	0.29583	195	1,97619	888
665	335	0.29778	195	1,98507	894
666	334	0.29973	195	1,99401	899
667	333	0.30168	196	2,00300	905
668	332	0.30364	196	2,01205	910
669	331	0.30560	196	2,02115	915
670	**330**	0.30756	197	2,03030	921
671	329	0.30953	197	2,03951	927
672	328	0.31150	197	2,04878	932
673	327	0.31347	197	2,05810	938
674	326	0.31544	198	2,06748	944
675	325	0.31742		2,07692	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$) | (Num. $\frac{a}{b}$)

	191	192		819	823	828	833	838
1	19	19	1	82	82	83	83	84
2	38	38	2	164	165	166	167	168
3	57	58	3	246	247	248	250	251
4	76	77	4	328	329	331	333	335
5	96	96	5	410	412	414	417	419
6	115	115	6	491	494	497	500	503
7	134	134	7	573	576	580	583	587
8	153	154	8	655	658	662	666	670
9	172	173	9	737	741	745	750	754

	193		843	847	853	857	863
1	19	1	84	85	85	86	86
2	39	2	169	169	171	171	173
3	58	3	253	254	256	257	259
4	77	4	337	339	341	343	345
5	97	5	422	424	427	429	432
6	116	6	506	508	512	514	518
7	135	7	590	593	597	600	604
8	154	8	674	678	682	686	690
9	174	9	759	762	768	771	777

	194	195		867	873	878	883	888
1	19	20	1	87	87	88	88	89
2	39	39	2	173	175	176	177	178
3	58	59	3	260	262	263	265	266
4	78	78	4	347	349	351	353	355
5	97	98	5	434	437	439	442	444
6	116	117	6	520	524	527	530	533
7	136	137	7	607	611	615	618	622
8	155	156	8	694	698	702	706	710
9	175	176	9	780	786	790	795	799

	196		894	899	905	910	915
1	20	1	89	90	91	91	92
2	39	2	179	180	181	182	183
3	59	3	268	270	272	273	275
4	78	4	358	360	362	364	366
5	98	5	447	450	453	455	458
6	118	6	536	539	543	546	549
7	137	7	626	629	634	637	641
8	157	8	715	719	724	728	732
9	176	9	805	809	815	819	824

	197	198		921	927	932	938	944
1	20	20	1	92	93	93	94	94
2	39	40	2	184	185	186	188	189
3	59	59	3	276	278	280	281	283
4	79	79	4	368	371	373	375	378
5	99	99	5	461	464	466	469	472
6	118	119	6	553	556	559	563	566
7	138	139	7	645	649	652	657	661
8	158	158	8	737	742	746	750	755
9	177	178	9	829	834	839	844	850

(Log. $\frac{a}{b}$) | (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: **325—350.**

a: 675—700. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
675	325	0.31742		2,07692	
			198		950
676	324	0.31940		2,08642	
			199		956
677	323	0.32139		2,09598	
			198		961
678	322	0.32337		2,10559	
			199		968
679	321	0.32536		2,11527	
			200		973
680	**320**	0.32736		2,12500	
			200		980
681	319	0.32936		2,13480	
			200		985
682	318	0.33136		2,14465	
			200		992
683	317	0.33336		2,15457	
			201		999
684	316	0.33537		2,16456	
			201		1004
685	315	0.33738		2,17460	
			201		1011
686	314	0.33939		2,18471	
			202		1018
687	313	0.34141		2,19489	
			202		1024
688	312	0.34343		2,20513	
			203		1030
689	311	0.34546		2,21543	
			203		1038
690	**310**	0.34749		2,22581	
			203		1044
691	309	0.34952		2,23625	
			204		1050
692	308	0.35156		2,24675	
			203		1058
693	307	0.35359		2,25733	
			205		1064
694	306	0.35564		2,26797	
			205		1072
695	305	0.35769		2,27869	
			205		1078
696	304	0.35974		2,28947	
			205		1086
697	303	0.36179		2,30033	
			206		1093
698	302	0.36385		2,31126	
			206		1100
699	301	0.36591		2,32226	
			207		1107
700	**300**	0.36798		2,33333	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)			(Num. $\frac{a}{b}$)					
	198	199		950	956	961	968	973
1	20	20	1	95	96	96	97	97
2	40	40	2	190	191	192	194	195
3	59	60	3	285	287	288	290	292
4	79	80	4	380	382	384	387	389
5	99	100	5	475	478	481	484	487
6	119	119	6	570	574	577	581	584
7	139	139	7	665	669	673	678	681
8	158	159	8	760	765	769	774	778
9	178	179	9	855	860	865	871	876
	200	201		980	985	992	999	1004
1	20	20	1	98	99	99	100	100
2	40	40	2	196	197	198	200	201
3	60	60	3	294	296	298	300	301
4	80	80	4	392	394	397	400	402
5	100	101	5	490	493	496	500	502
6	120	121	6	588	591	595	599	602
7	140	141	7	686	690	694	699	703
8	160	161	8	784	788	794	799	803
9	180	181	9	882	887	893	899	904
	202	203		1011	1018	1024	1030	1038
1	20	20	1	101	102	102	103	104
2	40	41	2	202	204	205	206	208
3	61	61	3	303	305	307	309	311
4	81	81	4	404	407	410	412	415
5	101	102	5	506	509	512	515	519
6	121	122	6	607	611	614	618	623
7	141	142	7	708	713	717	721	727
8	162	162	8	809	814	819	824	830
9	182	183	9	910	916	922	927	934
	204	205		1044	1050	1058	1064	1072
1	20	21	1	104	105	106	106	107
2	41	41	2	209	250	212	213	214
3	61	62	3	213	315	317	319	322
4	82	82	4	418	420	423	426	429
5	102	103	5	522	525	529	532	536
6	122	123	6	626	630	635	638	643
7	143	144	7	731	735	741	745	750
8	163	164	8	835	840	846	851	858
9	184	185	9	940	945	952	958	965
	206	207		1078	1086	1093	1100	1107
1	21	21	1	108	109	109	110	111
2	41	41	2	216	217	219	220	221
3	62	62	3	323	326	328	330	332
4	82	83	4	431	434	437	440	443
5	103	104	5	539	543	547	550	554
6	124	124	6	647	652	656	660	664
7	144	145	7	755	760	765	770	775
8	165	166	8	862	869	874	880	886
9	185	186	9	970	977	984	990	996
(Log. $\frac{a}{b}$)			(Num. $\frac{a}{b}$)					

P. P.

b: 300—325.

a: **700—725.** (*a* + *b* = 1000.)

a	b	Log. a/b	Dif.	Num. a/b	Dif.
700	**300**	0.36798	207	2,3333	112
701	299	0.37005	207	2,3445	112
702	298	0.37212	208	2,3557	113
703	297	0.37420	208	2,3670	114
704	296	0.37628	209	2,3784	114
705	295	0.37837	209	2,3898	116
706	294	0.38046	209	2,4014	116
707	293	0.38255	210	2,4130	117
708	292	0.38465	210	2,4247	117
709	291	0.38675	211	2,4364	119
710	**290**	0.38886	211	2,4483	119
711	289	0.39097	212	2,4602	120
712	288	0.39309	212	2,4722	121
713	287	0.39521	212	2,4843	122
714	286	0.39733	213	2,4965	123
715	285	0.39946	213	2,5088	123
716	284	0.40159	214	2,5211	125
717	283	0.40373	215	2,5336	125
718	282	0.40588	214	2,5461	126
719	281	0.40802	215	2,5587	127
720	**280**	0.41017	216	2,5714	128
721	279	0.41233	216	2,5842	129
722	278	0.41449	217	2,5971	130
723	277	0.41666	217	2,6101	131
724	276	0.41883	218	2,6232	132
725	275	0.42101		2,6364	
a	b	Log. a/b	Dif.	Num. a/b	Dif.

P. P.

(Log. a/b)

	207	208
1	21	21
2	41	42
3	62	62
4	83	83
5	104	104
6	124	125
7	145	146
8	166	166
9	186	187

	209	210
1	21	21
2	42	42
3	63	63
4	84	84
5	105	105
6	125	126
7	146	147
8	167	168
9	188	189

	211	212
1	21	21
2	42	42
3	63	64
4	84	85
5	106	106
6	127	127
7	148	148
8	169	170
9	190	191

	213	214	215
1	21	21	22
2	43	43	43
3	64	64	65
4	85	86	86
5	107	107	108
6	128	128	129
7	149	150	151
8	170	171	172
9	192	193	194

	216	217	218
1	22	22	22
2	43	43	44
3	65	65	65
4	86	87	87
5	108	109	109
6	130	130	131
7	151	152	153
8	173	174	174
9	194	195	196

(Num. a/b)

	112	113
1	11	11
2	22	23
3	34	34
4	45	45
5	56	57
6	67	68
7	78	79
8	90	90
9	101	102

	114	116	117
1	11	12	12
2	23	23	23
3	34	35	35
4	46	46	47
5	57	58	59
6	68	70	70
7	80	81	82
8	91	93	94
9	103	104	105

	119	120	121	122
1	12	12	12	12
2	24	24	24	24
3	36	36	36	37
4	48	48	48	49
5	60	60	61	61
6	71	72	73	73
7	83	84	85	85
8	95	96	97	98
9	107	108	109	110

	123	125	126	127
1	12	13	13	13
2	25	25	25	25
3	37	38	38	38
4	49	50	50	51
5	62	63	63	64
6	74	75	76	76
7	86	88	88	89
8	98	100	101	102
9	111	113	113	114

	128	129	130	131	132
1	13	13	13	13	13
2	26	26	26	26	26
3	38	39	39	39	40
4	51	52	52	52	53
5	64	65	65	66	66
6	77	77	78	79	79
7	90	90	91	92	92
8	102	103	104	105	106
9	115	116	117	118	119

(Log. a/b) (Num. a/b)

P. P.

b: **275—300.**

a: **725—750.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
725	275	0.42101		2,6364	
			218		132
726	274	0.42319		2,6496	
			218		134
727	273	0.42537		2,6630	
			219		135
728	272	0.42756		2,6765	
			220		135
729	271	0.42976		2,6900	
			220		137
730	**270**	0.43196		2,7037	
			221		138
731	269	0.43417		2,7175	
			221		138
732	268	0.43638		2,7313	
			221		140
733	267	0.43859		2,7453	
			222		141
734	266	0.44081		2,7594	
			223		142
735	265	0.44304		2,7736	
			223		143
736	264	0.44527		2,7879	
			224		144
737	263	0.44751		2,8023	
			225		145
738	262	0.44976		2,8168	
			224		146
739	261	0.45200		2,8314	
			226		148
740	**260**	0.45426		2,8462	
			226		148
741	259	0.45652		2,8610	
			226		150
742	258	0.45878		2,8760	
			228		151
743	257	0.46106		2,8911	
			227		152
744	256	0.46333		2,9063	
			229		153
745	255	0.46562		2,9216	
			229		154
746	254	0.46791		2,9370	
			229		156
747	253	0.47020		2,9526	
			230		157
748	252	0.47250		2,9683	
			231		158
749	251	0.47481		2,9841	
			231		159
750	**250**	0.47712		3,0000	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	218	219	220
1	22	22	22
2	44	44	44
3	65	66	66
4	87	88	88
5	109	110	110
6	131	131	132
7	153	153	154
8	174	175	176
9	196	197	198

	221	222
1	22	22
2	44	44
3	66	67
4	88	89
5	111	111
6	133	133
7	155	155
8	177	178
9	199	200

	223	224	225
1	22	22	23
2	45	45	45
3	67	67	68
4	89	90	90
5	112	112	113
6	134	134	135
7	156	157	158
8	178	179	180
9	201	202	203

	226	227	228
1	23	23	23
2	45	45	46
3	68	68	68
4	90	91	91
5	113	114	114
6	136	136	137
7	158	159	160
8	181	182	182
9	203	204	205

	229	230	231
1	23	23	23
2	46	46	46
3	69	69	69
4	92	92	92
5	115	115	116
6	137	138	139
7	160	161	162
8	183	184	185
9	206	207	208

(Num. $\frac{a}{b}$)

	132	134	135	137
1	13	13	14	14
2	26	27	27	27
3	40	40	41	41
4	53	54	54	55
5	66	67	68	69
6	79	80	81	82
7	92	94	95	96
8	106	107	108	110
9	119	121	122	123

	138	140	141	142
1	14	14	14	14
2	28	28	28	28
3	41	42	42	43
4	55	56	56	57
5	69	70	71	71
6	83	84	85	85
7	97	98	99	99
8	110	112	113	114
9	124	126	127	128

	143	144	145	146
1	14	14	15	15
2	29	29	29	29
3	43	43	44	44
4	57	58	58	58
5	72	72	73	73
6	86	86	87	88
7	100	101	102	102
8	114	115	116	117
9	129	130	131	131

	148	150	151	152	153
1	15	15	15	15	15
2	30	30	30	30	31
3	44	45	45	46	46
4	59	60	60	61	61
5	74	75	76	76	77
6	89	90	91	91	92
7	104	105	106	106	107
8	118	120	121	122	122
9	133	135	136	137	138

	154	156	157	158	159
1	15	16	16	16	16
2	31	31	31	32	32
3	46	47	47	47	48
4	62	62	63	63	64
5	77	78	79	79	80
6	92	94	94	95	95
7	108	109	110	111	111
8	123	125	126	126	127
9	139	140	141	142	143

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: **250—275.**

a: **750—775.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
750	**250**	0.47712	232	3,0000	161
751	249	0.47944	233	3,0161	162
752	248	0.48177	233	3,0323	163
753	247	0.48410	234	3,0486	164
754	246	0.48644	234	3,0650	166
755	245	0.48878	235	3,0816	168
756	244	0.49113	236	3,0984	168
757	243	0.49349	236	3,1152	170
758	242	0.49585	237	3,1322	172
759	241	0.49822	238	3,1494	173
760	**240**	0.50060	239	3,1667	174
761	239	0.50299	239	3,1841	176
762	238	0.50538	240	3,2017	177
763	237	0.50778	240	3,2194	179
764	236	0.51018	241	3,2373	180
765	235	0.51259	242	3,2553	182
766	234	0.51501	243	3,2735	183
767	233	0.51744	243	3,2918	185
768	232	0.51987	244	3,3103	187
769	231	0.52231	245	3,3290	188
770	**230**	0.52476	246	3,3478	190
771	229	0.52722	246	3,3668	192
772	228	0.52968	247	3,3860	193
773	227	0.53215	248	3,4053	195
774	226	0.53463	249	3,4248	196
775	225	0.53712		3,4444	

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	232	233	234
1	23	23	23
2	46	47	47
3	70	70	70
4	93	93	94
5	116	117	117
6	139	140	140
7	162	163	164
8	186	186	187
9	209	210	211

	235	236	237
1	24	24	24
2	47	47	47
3	71	71	71
4	94	94	95
5	118	118	119
6	141	142	142
7	165	165	166
8	188	189	190
9	212	212	213

	238	239	240	241
1	24	24	24	24
2	48	48	48	48
3	71	72	72	72
4	95	96	96	96
5	119	120	120	121
6	143	143	144	145
7	167	167	168	169
8	190	191	192	193
9	214	215	216	217

	242	243	244	245
1	24	24	24	25
2	48	49	49	49
3	73	73	73	74
4	97	97	98	98
5	121	122	122	123
6	145	146	146	147
7	169	170	171	172
8	194	194	195	196
9	218	219	220	221

	246	247	248	249
1	25	25	25	25
2	49	49	50	50
3	74	74	74	75
4	98	99	99	100
5	123	124	124	125
6	148	148	149	149
7	172	173	174	174
8	197	198	198	199
9	221	222	223	224

(Num. $\frac{a}{b}$)

	161	162	163	164
1	16	16	16	16
2	32	32	33	33
3	48	49	49	49
4	64	65	65	66
5	81	81	82	82
6	97	97	98	98
7	113	113	114	115
8	129	130	130	131
9	145	146	147	148

	166	168	170	172	173
1	17	17	17	17	17
2	33	34	34	34	35
3	50	50	51	52	52
4	66	67	68	69	69
5	83	84	85	86	87
6	100	101	102	103	104
7	116	118	119	120	121
8	133	134	136	138	138
9	149	151	153	155	156

	174	176	177	179	180
1	17	18	18	18	18
2	35	35	35	36	36
3	52	53	52	54	54
4	70	70	71	72	72
5	87	88	89	90	90
6	104	106	106	107	108
7	122	123	124	125	126
8	139	141	142	143	144
9	157	158	159	161	162

	182	183	185	187	188
1	18	18	19	19	19
2	36	37	37	37	38
3	55	55	56	56	56
4	73	73	74	75	75
5	91	92	93	94	94
6	109	110	111	112	113
7	127	128	130	131	132
8	146	146	148	150	150
9	164	165	167	168	169

	190	192	193	195	196
1	19	19	19	20	20
2	38	38	39	39	39
3	57	58	58	59	59
4	76	77	77	78	78
5	95	96	97	98	98
6	114	115	116	117	118
7	133	134	135	137	137
8	152	154	154	156	157
9	171	173	174	176	176

b: **225—250.**

a: 775—800. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
775	225	0.53712	249	3,4444	199
776	224	0.53961	251	3,4643	200
777	223	0.54212	251	3,4843	202
778	222	0.54463	252	3,5045	204
779	221	0.54715	252	3,5249	206
780	**220**	0.54967	254	3,5455	207
781	219	0.55221	254	3,5662	210
782	218	0.55475	255	3,5872	211
783	217	0.55730	256	3,6083	213
784	216	0.55986	257	3,6296	216
785	215	0.56243	258	3,6512	217
786	214	0.56501	259	3,6729	219
787	213	0.56760	259	3,6948	222
788	212	0.57019	260	3,7170	223
789	211	0.57279	262	3,7393	226
790	**210**	0.57541	262	3,7619	228
791	209	0.57803	263	3,7847	230
792	208	0.58066	264	3,8077	232
793	207	0.58330	265	3,8309	235
794	206	0.58595	266	3,8544	236
795	205	0.58861	267	3,8780	240
796	204	0.59128	268	3,9020	241
797	203	0.59396	269	3,9261	244
798	202	0.59665	270	3,9505	246
799	201	0.59935	271	3,9751	249
800	**200**	0.60206		4,0000	

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)	249	251	252	254	(Num. $\frac{a}{b}$)	199	200	202	204	206
1	25	25	25	25	1	20	20	20	20	21
2	50	50	50	51	2	40	40	40	41	41
3	75	75	76	76	3	60	60	61	61	62
4	100	100	101	102	4	80	80	81	82	82
5	125	126	126	127	5	100	100	101	102	103
6	149	151	151	152	6	119	120	121	122	124
7	174	176	176	178	7	139	140	141	143	144
8	199	201	202	203	8	159	160	162	163	165
9	224	226	227	229	9	179	180	182	184	185

	255	256	257	258		207	210	211	213	216
1	26	26	26	26	1	21	21	21	21	22
2	51	51	51	52	2	41	42	42	43	43
3	77	77	77	77	3	62	63	63	64	65
4	102	102	103	103	4	83	84	84	85	86
5	128	128	129	129	5	104	105	106	107	108
6	153	154	154	155	6	124	126	127	128	130
7	179	179	180	181	7	145	147	148	149	151
8	204	205	206	206	8	166	168	169	170	173
9	230	230	231	232	9	186	189	190	192	194

	259	260	262	263		217	219	222	223	226
1	26	26	26	26	1	22	22	22	22	23
2	52	52	52	53	2	43	44	44	45	45
3	78	78	79	79	3	65	66	67	67	68
4	104	104	105	105	4	87	88	89	89	90
5	130	130	131	132	5	109	110	111	112	113
6	155	156	157	158	6	130	131	133	134	136
7	181	182	183	184	7	152	153	155	156	158
8	207	208	210	210	8	174	175	178	178	181
9	233	234	236	237	9	195	197	200	201	203

	264	265	266	267		228	230	232	235	236
1	26	27	27	27	1	23	23	23	24	24
2	53	53	53	53	2	46	46	46	47	47
3	79	80	80	80	3	68	69	70	71	71
4	106	106	106	107	4	91	92	93	94	94
5	132	133	133	134	5	114	115	116	118	118
6	158	159	160	160	6	137	138	139	141	142
7	185	186	186	187	7	160	161	162	165	165
8	211	212	213	214	8	182	184	186	188	189
9	238	239	239	240	9	205	207	209	212	212

	268	269	270	271		240	241	244	246	249
1	27	27	27	27	1	24	24	24	25	25
2	54	54	54	54	2	48	48	49	49	50
3	80	81	81	81	3	72	72	73	74	75
4	107	108	108	108	4	96	96	98	98	100
5	134	135	135	136	5	120	121	122	123	125
6	161	161	162	163	6	144	145	146	148	149
7	188	188	189	190	7	168	169	171	172	174
8	214	215	216	217	8	192	193	195	197	199
9	241	242	243	244	9	216	217	220	221	224

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.	(Log. $\frac{a}{b}$) P. P.	(Num. $\frac{a}{b}$) P. P.

b: 200—225.

a: **800—825.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
800	**200**	0.60206	272	4,0000	251
801	199	0.60478	273	4,0251	254
802	198	0.60751	274	4,0505	256
803	197	0.61025	275	4,0761	259
804	196	0.61300	276	4,1020	262
805	195	0.61576	277	4,1282	264
806	194	0.61853	279	4,1546	267
807	193	0.62132	279	4,1813	270
808	192	0.62411	281	4,2083	273
809	191	0.62692	281	4,2356	276
810	**190**	0.62973	283	4,2632	278
811	189	0.63256	284	4,2910	281
812	188	0.63540	285	4,3191	285
813	187	0.63825	286	4,3476	287
814	186	0.64111	288	4,3763	291
815	185	0.64399	288	4,4054	294
816	184	0.64687	290	4,4348	297
817	183	0.64977	291	4,4645	300
818	182	0.65268	293	4,4945	304
819	181	0.65561	293	4,5249	307
820	**180**	0.65854	295	4,5556	310
821	179	0.66149	296	4,5866	314
822	178	0.66445	298	4,6180	317
823	177	0.66743	298	4,6497	321
824	176	0.67041	301	4,6818	325
825	175	0.67342		4,7143	

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)	272	273	274	275	(Num. $\frac{a}{b}$)	251	254	256	259	262
1	27	27	27	28	1	25	25	26	26	26
2	54	55	55	55	2	50	51	51	52	52
3	82	82	82	83	3	75	76	77	78	79
4	109	109	110	110	4	100	102	102	104	105
5	136	137	137	138	5	126	127	128	130	131
6	163	164	164	165	6	151	152	154	155	157
7	190	191	192	193	7	176	178	179	181	183
8	218	218	219	220	8	201	203	205	207	210
9	245	246	247	248	9	226	229	230	233	236

	276	277	279	281		264	267	270	273	276
1	28	28	28	28	1	26	27	27	27	28
2	55	55	56	56	2	53	53	54	55	55
3	83	83	84	84	3	79	80	81	82	83
4	110	111	112	112	4	106	107	108	109	110
5	138	139	140	141	5	132	134	135	137	138
6	166	166	167	169	6	158	160	162	164	166
7	193	194	195	197	7	185	187	189	191	193
8	221	222	223	225	8	211	214	216	218	221
9	248	249	251	253	9	238	240	243	246	248

	283	284	285	286		278	281	285	287	291
1	28	28	29	29	1	28	28	29	29	29
2	57	57	57	57	2	56	56	57	57	58
3	85	85	86	86	3	83	84	86	86	87
4	113	114	114	114	4	111	112	114	115	116
5	142	142	143	143	5	139	141	143	144	146
6	170	170	171	172	6	167	169	171	172	175
7	198	199	200	200	7	195	197	200	201	204
8	226	227	228	229	8	222	225	228	230	233
9	255	256	257	257	9	250	253	257	258	262

	288	290	291	293		294	297	300	304	307
1	29	29	29	29	1	29	30	30	30	31
2	58	58	58	59	2	59	59	60	61	61
3	86	87	87	88	3	88	89	90	91	92
4	115	116	116	117	4	118	119	120	122	123
5	144	145	146	147	5	147	149	150	152	154
6	173	174	175	176	6	176	178	180	182	184
7	202	203	204	205	7	206	208	210	213	215
8	230	232	233	234	8	235	238	240	243	246
9	259	261	262	264	9	265	267	270	274	276

	295	296	298	301		310	314	317	321	325
1	30	30	30	30	1	31	31	32	32	33
2	59	59	60	60	2	62	63	63	64	65
3	89	89	89	90	3	93	94	95	96	98
4	118	118	119	120	4	124	126	127	128	130
5	148	148	149	151	5	155	157	159	161	163
6	177	178	179	181	6	186	188	190	193	195
7	207	207	209	211	7	217	220	222	225	228
8	236	237	238	241	8	248	251	254	257	260
9	266	266	268	271	9	279	283	285	289	293

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.	(Log. $\frac{a}{b}$) P. P.	(Num. $\frac{a}{b}$) P. P.

b: **175—200.**

a: 825—850. $(a + b = 1000.)$

a	*b*	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
825	175	0.67342	301	4,7143	328
826	174	0.67643	303	4,7471	332
827	173	0.67946	304	4,7803	337
828	172	0.68250	306	4,8140	340
829	171	0.68556	307	4,8480	344
830	**170**	0.68863	308	4,8824	348
831	169	0.69171	310	4,9172	352
832	168	0.69481	312	4,9524	356
833	167	0.69793	313	4,9880	361
834	166	0.70106	314	5,0241	365
835	165	0.70420	316	5,0606	370
836	164	0.70736	318	5,0976	374
837	163	0.71054	319	5,1350	378
838	162	0.71373	321	5,1728	384
839	161	0.71694	322	5,2112	388
840	**160**	0.72016	324	5,2500	393
841	159	0.72340	326	5,2893	398
842	158	0.72666	327	5,3291	403
843	157	0.72993	329	5,3694	409
844	156	0.73322	331	5,4103	413
845	155	0.73653	332	5,4516	419
846	154	0.73985	334	5,4935	424
847	153	0.74319	336	5,5359	430
848	152	0.74655	338	5,5789	436
849	151	0.74993	340	5,6225	442
850	**150**	0.75333		5,6667	
a	*b*	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	301	303	304	306	307
1	30	30	30	31	31
2	60	61	61	61	61
3	90	91	91	92	92
4	120	121	122	122	123
5	151	152	152	153	154
6	181	182	182	184	184
7	211	212	213	214	215
8	241	242	243	245	246
9	271	273	274	275	276

	308	310	312	313	314
1	31	31	31	31	31
2	62	62	62	63	63
3	92	93	94	94	94
4	123	124	125	125	126
5	154	155	156	157	157
6	185	186	187	188	188
7	216	217	218	219	220
8	246	248	250	250	251
9	277	279	281	282	283

	316	318	319	321	322
1	32	32	32	32	32
2	63	64	64	64	64
3	95	95	96	96	97
4	126	127	128	128	129
5	158	159	160	161	161
6	190	191	191	193	193
7	221	223	223	225	225
8	253	254	255	257	258
9	284	286	287	289	290

	324	326	327	329	331
1	32	33	33	33	33
2	65	65	65	66	66
3	97	98	98	99	99
4	130	130	131	132	132
5	162	163	164	165	166
6	194	196	196	197	199
7	227	228	229	230	232
8	259	261	262	263	265
9	292	293	294	296	298

	332	334	336	338	340
1	33	33	34	34	34
2	66	67	67	68	68
3	100	100	101	101	102
4	133	134	134	135	136
5	166	167	168	169	170
6	199	200	202	203	204
7	232	234	235	237	238
8	266	267	269	270	272
9	299	301	302	304	306

(Num. $\frac{a}{b}$)

	328	332	337	340	344
1	33	33	34	34	34
2	66	66	67	68	69
3	98	100	101	102	103
4	131	133	135	136	138
5	164	166	169	170	172
6	197	199	202	204	206
7	230	232	236	238	241
8	262	266	270	272	275
9	295	299	303	306	310

	348	352	356	361	365
1	35	35	36	36	37
2	70	70	71	72	73
3	104	106	107	108	110
4	139	141	142	144	146
5	174	176	178	181	183
6	209	211	214	217	219
7	244	246	249	253	256
8	278	282	285	289	292
9	313	317	320	325	329

	370	374	378	384	388
1	37	37	38	38	39
2	74	75	76	77	78
3	111	112	113	115	116
4	148	150	151	154	155
5	185	187	189	192	194
6	222	224	227	230	233
7	259	262	265	269	272
8	296	299	302	307	310
9	333	337	340	346	349

	393	398	403	409	413
1	39	40	40	41	41
2	79	80	81	82	83
3	118	119	121	123	124
4	157	159	161	164	165
5	197	199	202	205	207
6	236	239	242	245	248
7	275	279	282	286	289
8	314	318	322	327	330
9	354	358	363	368	372

	419	424	430	436	442
1	42	42	43	44	44
2	84	85	86	87	88
3	126	127	129	131	133
4	168	170	172	174	177
5	210	212	215	218	221
6	251	254	258	262	265
7	293	297	301	305	309
8	335	339	344	349	354
9	377	382	387	392	398

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

a: **850—875.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
850	**150**	0.75333	341	5,6667	447
851	149	0.75674	344	5,7114	454
852	148	0.76018	345	5,7568	459
853	147	0.76363	348	5,8027	466
854	146	0.76711	349	5,8493	473
855	145	0.77060	351	5,8966	478
856	144	0.77411	353	5,9444	486
857	143	0.77764	356	5,9930	493
858	142	0.78120	357	6,0423	499
859	141	0.78477	360	6,0922	507
860	**140**	0.78837	362	6,1429	513
861	139	0.79199	364	6,1942	522
862	138	0.79563	366	6,2464	529
863	137	0.79929	368	6,2993	536
864	136	0.80297	371	6,3529	545
865	135	0.80668	373	6,4074	553
866	134	0.81041	376	6,4627	561
867	133	0.81417	378	6,5188	570
868	132	0.81795	380	6,5758	578
869	131	0.82175	383	6,6336	587
870	**130**	0.82558	385	6,6923	596
871	129	0.82943	388	6,7519	606
872	128	0.83331	390	6,8125	615
873	127	0.83721	393	6,8740	625
874	126	0.84114	396	6,9365	635
875	125	0.84510		7,0000	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	341	344	345	348	349
1	34	34	35	35	35
2	68	69	69	70	70
3	102	103	104	104	105
4	136	138	138	139	140
5	171	172	173	174	175
6	205	206	207	209	209
7	239	241	242	244	244
8	273	275	276	278	279
9	307	310	311	313	314

	351	353	356	357	360
1	35	35	36	36	36
2	70	71	71	71	72
3	105	106	107	107	108
4	140	141	142	143	144
5	176	177	178	179	180
6	211	212	214	214	216
7	246	247	249	250	252
8	281	282	285	286	288
9	316	318	320	321	324

	362	364	366	368	371
1	36	36	37	37	37
2	72	73	73	74	74
3	109	109	110	110	111
4	145	146	146	147	148
5	181	182	183	184	186
6	217	218	220	221	223
7	253	255	256	258	260
8	290	291	293	294	297
9	326	328	329	331	334

	373	376	378	380	383
1	37	38	38	38	38
2	75	75	76	76	77
3	112	113	113	114	115
4	149	150	151	152	153
5	187	188	189	190	192
6	224	226	227	228	230
7	261	263	265	266	268
8	298	301	302	304	306
9	336	338	340	342	345

	385	388	390	393	396
1	39	39	39	39	40
2	77	78	78	79	79
3	116	116	117	118	119
4	154	155	156	157	158
5	193	194	195	197	198
6	231	233	234	236	238
7	270	272	273	275	277
8	308	310	312	314	317
9	347	349	351	354	356

(Num. $\frac{a}{b}$)

	447	454	459	466	473
1	45	45	46	47	47
2	89	91	92	93	95
3	134	136	138	140	142
4	179	182	184	186	189
5	224	227	230	233	237
6	268	272	275	280	284
7	313	318	321	326	331
8	358	363	367	373	378
9	402	409	413	419	426

	478	486	493	499	507
1	48	49	49	50	51
2	96	97	99	100	101
3	143	146	148	150	152
4	191	194	197	200	203
5	239	243	247	250	254
6	287	292	296	299	304
7	335	340	345	349	355
8	382	389	394	399	406
9	430	437	444	449	456

	513	522	529	536	545
1	51	52	53	54	55
2	103	104	106	107	109
3	154	157	159	161	164
4	205	209	212	214	218
5	257	261	265	268	273
6	308	313	317	322	327
7	359	365	370	375	382
8	410	418	423	429	436
9	462	470	476	482	491

	553	561	570	578	587
1	55	56	57	58	59
2	111	112	114	116	117
3	166	168	171	173	176
4	221	224	228	231	235
5	277	281	285	289	294
6	332	337	342	347	352
7	387	393	399	405	411
8	442	449	456	462	470
9	498	505	513	520	528

	596	606	615	625	635
1	60	61	62	63	64
2	119	121	123	125	127
3	179	182	185	188	191
4	238	242	246	250	254
6	298	303	308	313	318
6	358	364	369	375	381
7	417	424	431	438	445
8	477	485	492	500	508
9	536	545	554	563	572

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

a: 875—900. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
875	125	0.84510		7,0000	
			398		645
876	124	0.84908		7,0645	
			401		656
877	123	0.85309		7,1301	
			404		666
878	122	0.85713		7,1967	
			407		678
879	121	0.86120		7,2645	
			410		688
880	**120**	0.86530		7,3333	
			413		701
881	119	0.86943		7,4034	
			416		712
882	118	0.87359		7,4746	
			418		724
883	117	0.87777		7,5470	
			422		737
884	116	0.88199		7,6207	
			426		750
885	115	0.88625		7,6957	
			428		762
886	114	0.89053		7,7719	
			432		777
887	113	0.89485		7,8496	
			435		790
888	112	0.89920		7,9286	
			438		804
889	111	0.90358		8,0090	
			442		819
890	**110**	0.90800		8,0909	
			445		834
891	109	0.91245		8,1743	
			449		850
892	108	0.91694		8,2593	
			453		865
893	107	0.92147		8,3458	
			456		882
894	106	0.92603		8,4340	
			460		898
895	105	0.93063		8,5238	
			464		916
896	104	0.93527		8,6154	
			469		933
897	103	0.93996		8,7087	
			472		952
898	102	0.94468		8,8039	
			476		971
899	101	0.94944		8,9010	
			480		990
900	**100**	0.95424		9,0000	

P. P. (Log. $\frac{a}{b}$)

	398	401	404	407	410
1	40	40	40	41	41
2	80	80	81	81	82
3	119	120	121	122	123
4	159	160	162	163	164
5	199	201	202	204	205
6	239	241	242	244	246
7	279	281	283	285	287
8	318	321	323	326	328
9	358	361	364	366	369

	413	416	418	422	426
1	41	42	42	42	43
2	83	83	84	84	85
3	124	125	125	127	128
4	165	166	167	169	170
5	207	208	209	211	213
6	248	250	251	253	256
7	289	291	293	295	298
8	330	333	334	338	341
9	372	374	376	380	383

	428	432	435	438	442
1	43	43	44	44	44
2	86	86	87	88	88
3	128	130	131	131	133
4	171	173	174	175	177
5	214	216	218	219	221
6	257	259	261	263	265
7	300	302	305	307	309
8	342	346	348	350	354
9	385	389	392	394	398

	445	449	453	456	460
1	45	45	45	46	46
2	89	90	91	91	92
3	134	135	136	137	138
4	178	180	181	182	184
5	223	225	227	228	230
6	267	269	272	274	276
7	312	314	317	319	322
8	356	359	362	365	368
9	401	404	408	410	414

	464	469	472	476	480
1	46	47	47	48	48
2	93	94	94	95	96
3	139	141	142	143	144
4	186	188	189	190	192
5	232	235	236	238	240
6	278	281	283	286	288
7	325	328	330	333	336
8	371	375	378	381	384
9	418	422	425	428	432

P. P. (Num. $\frac{a}{b}$)

	645	656	666	678	688
1	65	66	67	68	69
2	129	131	133	136	138
3	194	197	200	203	206
4	258	262	266	271	275
5	323	328	333	339	344
6	387	394	400	407	413
7	452	459	466	475	482
8	516	525	533	542	550
9	581	590	599	610	619

	701	712	724	737	750
1	70	71	72	74	75
2	140	142	145	147	150
3	210	214	217	221	225
4	280	285	290	295	300
5	351	356	362	369	375
6	421	427	434	442	450
7	491	498	507	516	525
8	561	570	579	590	600
9	631	641	652	663	675

	762	777	790	804	819
1	76	78	79	80	82
2	152	155	158	161	164
3	229	233	237	241	246
4	305	311	316	322	328
5	381	389	395	402	410
6	457	466	474	482	491
7	533	544	553	563	573
8	610	622	632	643	655
9	686	699	711	724	737

	834	850	865	882	898
1	83	85	87	88	90
2	167	170	173	176	180
3	250	255	260	265	269
4	334	340	346	353	359
5	417	425	433	441	449
6	500	510	519	529	539
7	584	595	606	617	629
8	667	680	692	706	718
9	751	765	779	794	808

	916	933	952	971	990
1	92	93	95	97	99
2	183	187	190	194	198
3	275	280	286	291	297
4	366	373	381	388	396
5	458	467	476	486	495
6	550	560	571	583	594
7	641	653	666	680	693
8	733	746	762	777	792
9	824	840	857	874	891

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.	(Log. $\frac{a}{b}$) P. P.	(Num. $\frac{a}{b}$) P. P.

b: 100—125.

a: 900—925. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
900	**100**	0.95424	485	9,000	101
901	99	0.95909	489	9,101	103
902	98	0.96398	494	9,204	105
903	97	0.96892	498	9,309	108
904	96	0.97390	503	9,417	109
905	95	0.97893	507	9,526	112
906	94	0.98400	512	9,638	115
907	93	0.98912	518	9,753	117
908	92	0.99430	522	9,870	119
909	91	0.99952	528	9,989	122
910	**90**	1.00480	533	10,111	125
911	89	1.01013	538	10,236	128
912	88	1.01551	544	10,364	130
913	87	1.02095	550	10,494	134
914	86	1.02645	555	10,628	137
915	85	1.03200	562	10,765	140
916	84	1.03762	567	10,905	143
917	83	1.04329	574	11,048	147
918	82	1.04903	580	11,195	151
919	81	1.05483	587	11,346	154
920	**80**	1.06070	593	11,500	158
921	79	1.06663	601	11,658	163
922	78	1.07264	607	11,821	166
923	77	1.07871	615	11,987	171
924	76	1.08486	622	12,158	175
925	75	1.09108		12,333	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)	485	489	494	498	503	(Num. $\frac{a}{b}$)	101	103	105	108	109
1	49	49	49	50	50	1	10	10	11	11	11
2	97	98	99	100	101	2	20	21	21	22	22
3	146	147	148	149	151	3	30	31	32	32	33
4	194	196	198	199	201	4	40	41	42	43	44
5	243	245	247	249	252	5	51	52	53	54	55
6	291	293	296	299	302	6	61	62	63	65	65
7	340	342	346	349	352	7	71	72	74	76	76
8	388	391	395	398	402	8	81	82	84	86	87
9	437	440	445	448	453	9	91	93	95	97	98

	507	512	518	522	528		112	115	117	119	122
1	51	51	52	52	53	1	11	12	12	12	12
2	101	102	104	104	106	2	22	23	23	24	24
3	152	154	155	157	158	3	34	35	35	36	37
4	203	205	207	209	211	4	45	46	47	48	49
5	254	256	259	261	264	5	56	58	59	60	61
6	304	307	311	313	317	6	67	69	70	71	73
7	355	358	363	365	370	7	78	81	82	83	85
8	406	410	414	418	422	8	90	92	94	95	98
9	456	461	466	470	475	9	101	104	105	107	110

	533	538	544	550	555		125	128	130	134	137
1	53	54	54	55	56	1	13	13	13	13	14
2	107	108	109	110	111	2	25	26	26	27	27
3	160	161	163	165	167	3	38	38	39	40	41
4	213	215	218	220	222	4	50	51	52	54	55
5	267	269	272	275	278	5	63	64	65	67	69
6	320	323	326	330	333	6	75	77	78	80	82
7	373	377	381	385	389	7	88	90	91	94	96
8	426	430	435	440	444	8	100	102	104	107	110
9	480	484	490	495	500	9	113	115	117	121	123

	562	567	574	580	587		140	143	147	151	154
1	56	57	57	58	59	1	14	14	15	15	15
2	112	113	115	116	117	2	28	29	29	30	31
3	169	170	172	174	176	3	42	43	44	45	46
4	225	227	230	232	235	4	56	57	59	60	62
5	281	284	287	290	294	5	70	72	74	76	77
6	337	340	344	348	352	6	84	86	88	91	92
7	393	397	402	406	411	7	98	100	103	106	108
8	450	454	459	464	470	8	112	114	118	121	123
9	506	510	517	522	528	9	126	129	132	136	139

	593	601	607	615	622		158	163	166	171	175
1	59	60	61	62	62	1	16	16	17	17	18
2	119	120	121	123	124	2	32	33	33	34	35
3	178	180	182	185	187	3	47	49	50	51	53
4	237	240	243	246	249	4	63	65	66	68	70
5	297	301	304	308	311	5	79	82	83	86	88
6	356	361	364	369	373	6	95	98	100	103	105
7	415	421	425	431	435	7	111	114	116	120	123
8	474	481	486	492	498	8	126	130	133	137	140
9	534	541	546	554	560	9	142	147	149	154	158

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: 75—100.

a: 925—950. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
925	75	1.09108	630	12,333	181
926	74	1.09738	638	12,514	185
927	73	1.10376	646	12,699	190
928	72	1.11022	654	12,889	196
929	71	1.11676	662	13,085	201
930	**70**	1.12338	672	13,286	207
931	69	1.13010	681	13,493	213
932	68	1.13691	690	13,706	219
933	67	1.14381	699	13,925	227
934	66	1.15080	710	14,152	233
935	65	1.15790	720	14,385	240
936	64	1.16510	730	14,625	248
937	63	1.17240	741	14,873	256
938	62	1.17981	753	15,129	264
939	61	1.18734	764	15,393	274
940	**60**	1.19498	776	15,667	282
941	59	1.20274	788	15,949	292
942	58	1.21062	802	16,241	303
943	57	1.21864	814	16,544	313
944	56	1.22678	829	16,857	325
945	55	1.23507	843	17,182	337
946	54	1.24350	857	17,519	349
947	53	1.25207	874	17,868	363
948	52	1.26081	889	18,231	377
949	51	1.26970	905	18,608	392
950	**50**	1.27875		19,000	

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	630	638	646	654	662
1	63	64	65	65	66
2	126	128	129	131	132
3	189	191	194	196	199
4	252	255	258	262	265
5	315	319	323	327	331
6	378	383	388	392	397
7	441	447	452	458	463
8	504	510	517	523	530
9	567	574	581	589	596

	672	681	690	699	710
1	67	68	69	70	71
2	134	136	138	140	142
3	202	204	207	210	213
4	269	272	276	280	284
5	336	341	345	350	355
6	403	409	414	419	426
7	470	477	483	489	497
8	538	545	552	559	568
9	605	613	621	629	639

	720	730	741	753	764
1	72	73	74	75	76
2	144	146	148	151	153
3	216	219	222	226	229
4	288	292	296	301	306
5	360	365	371	377	382
6	432	438	445	452	458
7	504	511	519	527	535
8	576	584	593	602	611
9	648	657	667	678	688

	776	788	802	814	829
1	78	79	80	81	83
2	155	158	160	163	166
3	233	236	241	244	249
4	310	315	321	326	332
5	388	394	401	407	415
6	466	473	481	488	497
7	543	552	561	570	580
8	621	630	642	651	663
9	698	709	722	733	746

	843	857	874	889	905
1	84	86	87	89	91
2	169	171	175	178	181
3	253	257	262	267	272
4	337	343	350	356	362
5	422	429	437	445	453
6	506	514	524	533	543
7	590	600	612	622	634
8	674	686	699	711	724
9	759	771	787	800	815

(Num. $\frac{a}{b}$)

	181	185	190	196	201
1	18	19	19	20	20
2	36	37	38	39	40
3	54	56	57	59	60
4	72	74	76	78	80
5	91	93	95	98	101
6	109	111	114	118	121
7	127	130	133	137	141
8	145	148	152	157	161
9	163	167	171	176	181

	207	213	219	227	233
1	21	21	22	23	23
2	41	43	44	45	47
3	62	64	66	68	70
4	83	85	88	91	93
5	104	107	110	114	117
6	124	128	131	136	140
7	145	149	153	159	163
8	166	170	175	182	186
9	186	192	197	204	210

	240	248	256	264	274
1	24	25	26	26	27
2	48	50	51	53	55
3	72	74	77	79	82
4	96	99	102	106	110
5	120	124	128	132	137
6	144	149	154	158	164
7	168	174	179	185	192
8	192	198	205	211	219
9	216	223	230	238	247

	282	292	303	313	325
1	28	29	30	31	33
2	56	58	61	63	65
3	85	88	91	94	98
4	113	117	121	125	130
5	141	146	152	157	163
6	169	175	182	188	195
7	197	204	212	219	228
8	226	234	242	250	260
9	254	263	273	282	293

	337	349	363	377	392
1	34	35	36	38	39
2	67	70	73	75	78
3	101	105	109	113	118
4	135	140	145	151	157
5	169	175	182	189	196
6	202	209	218	226	235
7	236	244	254	264	274
8	270	279	290	302	314
9	303	314	327	339	353

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.	(Log. $\frac{a}{b}$) P. P.	(Num. $\frac{a}{b}$) P. P.

a: **950—975.** $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
950	**50**	1.27875		19,000	
			923		408
951	49	1.28798		19,408	
			942		425
952	48	1.29740		19,833	
			960		444
953	47	1.30700		20,277	
			979		462
954	46	1.31679		20,739	
			1000		483
955	45	1.32679		21,222	
			1022		505
956	44	1.33701		21,727	
			1043		529
957	43	1.34744		22,256	
			1068		554
958	42	1.35812		22,810	
			1091		580
959	41	1.36903		23,390	
			1118		610
960	**40**	1.38021		24,000	
			1145		641
961	39	1.39166		24,641	
			1173		675
962	38	1.40339		25,316	
			1203		711
963	37	1.41542		26,027	
			1235		751
964	36	1.42777		26,778	
			1269		793
965	35	1.44046		27,571	
			1304		841
966	34	1.45350		28,412	
			1341		891
967	33	1.46691		29,303	
			1382		947
968	32	1.48073		30,250	
			1423		1,01
969	31	1.49496		31,26	
			1469		1,07
970	**30**	1.50965		32,33	
			1517		1,15
971	29	1.52482		33,48	
			1569		1,23
972	28	1.54051		34,71	
			1624		1,33
973	27	1.55675		36,04	
			1684		1,42
974	26	1.57359		37,46	
			1747		1,54
975	25	1.59106		39,00	
a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.

P. P.

(Log. $\frac{a}{b}$)

	923	942	960	979	1000
1	92	94	96	98	100
2	185	188	192	196	200
3	277	283	288	294	300
4	369	277	384	392	400
5	462	471	480	490	500
6	554	565	576	587	600
7	646	659	672	685	700
8	738	754	768	783	800
9	831	848	864	881	900

	1022	1043	1068	1091	1118
1	102	104	107	109	112
2	204	209	214	218	224
3	307	313	320	327	335
4	409	417	427	436	447
5	511	522	534	546	559
6	613	626	641	655	671
7	715	730	748	764	783
8	818	834	854	873	894
9	920	939	961	982	1006

	1145	1173	1203	1235	1269
1	115	117	120	124	127
2	229	235	241	247	254
3	344	352	361	371	381
4	458	469	481	494	508
5	573	587	602	618	635
6	687	704	722	741	761
7	802	821	842	865	888
8	916	938	962	988	1015
9	1031	1056	1083	1112	1142

	1304	1341	1382	1423	1469
1	130	134	138	142	147
2	261	268	276	285	294
3	391	402	415	427	441
4	522	536	553	569	588
5	652	671	691	712	735
6	782	805	829	854	881
7	913	939	967	996	1028
8	1043	1073	1106	1138	1175
9	1174	1207	1244	1281	1322

	1517	1569	1624	1684	1747
1	152	157	162	168	175
2	303	314	325	337	349
3	455	471	487	505	524
4	607	628	650	674	699
5	759	785	812	842	874
6	910	941	974	1010	1048
7	1062	1098	1137	1179	1223
8	1214	1255	1299	1347	1398
9	1365	1412	1462	1516	1572

(Num. $\frac{a}{b}$)

	408	425	444	462	483
1	41	43	44	46	48
2	82	85	89	92	97
3	122	128	133	139	145
4	163	170	178	185	193
5	204	213	222	231	242
6	245	255	266	277	290
7	286	298	311	323	338
8	326	340	355	370	386
9	367	383	400	416	435

	505	529	554	580	610
1	51	53	55	58	61
2	101	106	111	116	122
3	152	159	166	174	183
4	202	212	222	232	244
5	253	265	277	290	305
6	303	317	332	348	366
7	354	370	388	406	427
8	404	423	443	464	488
9	455	476	499	522	549

	641	675	711	751	793
1	64	68	71	75	79
2	128	135	142	150	159
3	192	203	213	225	238
4	256	270	284	300	317
5	321	338	356	376	397
6	385	405	427	451	476
7	449	473	498	526	555
8	513	540	569	601	634
9	577	608	640	676	714

	841	891	947	1,01	1,07
1	84	89	95	0,10	0,11
2	168	178	189	0,20	0,21
3	252	267	284	0,30	0,32
4	336	356	379	0,40	0,43
5	421	446	474	0,51	0,54
6	505	535	568	0,61	0,64
7	589	624	663	0,71	0,75
8	673	713	758	0,81	0,86
9	757	802	852	0,91	0,96

	1,15	1,23	1,33	1,42	1,54
1	0,12	0,12	0,13	0,14	0,15
2	0,23	0,25	0,27	0,28	0,31
3	0,35	0,37	0,40	0,43	0,46
4	0,46	0,49	0,53	0,57	0,62
5	0,58	0.62	0,67	0,71	0,77
6	0,69	0,74	0,80	0,85	0,92
7	0,81	0,86	0,93	0,99	1,08
8	0,92	0,98	1,06	1,14	1,23
9	1,04	1,11	1,20	1,28	1,39

(Log. $\frac{a}{b}$) (Num. $\frac{a}{b}$)

P. P.

b: **25—50.**

a: 975—1000. $(a + b = 1000.)$

a	b	Log. $\frac{a}{b}$	Dif.	Num. $\frac{a}{b}$	Dif.
975	25	1.59106	1818	39,00	1,67
976	24	1.60924	1893	40,67	1,81
977	23	1.62817	1975	42,48	1,97
978	22	1.64792	2064	44,45	2,17
979	21	1.66856	2164	46,62	2,38
980	**20**	1.69020	2272	49,00	2,63
981	19	1.71292	2392	51,63	2,93
982	18	1.73684	2526	54,56	3,26
983	17	1.76210	2678	57,82	3,68
984	16	1.78888	2846	61,50	4,17
985	15	1.81734	3041	65,67	4,76
986	14	1.84775	3262	70,43	5,49
987	13	1.88037	3521	75,92	6,41
988	12	1.91558	3822	82,33	7,58
989	11	1.95380	4184	89,91	9,09
990	**10**	1.99564	4619	99,0	11,1
991	9	2.04183	5159	110,1	13,9
992	8	2.09342	5843	124,0	17,9
993	7	2.15185	6739	141,9	23,8
994	6	2.21924	7961	165,7	33,3
995	5	2.29885	9735	199,0	50,0
996	4	2.39620	12537	249,0	83,3
997	3	2.52157	17653	332,3	166,7
998	2	2.69810	30147	499,0	500,0
999	1	2.99957	∞	999,0	∞
1000	**0**	∞		∞	

P. P. (Log. $\frac{a}{b}$)

	1818	1893	1975	2064	2164
1	182	189	198	206	216
2	364	379	395	413	433
3	545	568	593	619	649
4	727	757	790	826	866
5	909	947	988	1032	1082
6	1091	1136	1185	1238	1298
7	1273	1325	1383	1445	1515
8	1454	1514	1580	1651	1731
9	1636	1704	1778	1858	1948

	2272	2392	2526	2678	2846
1	227	239	253	268	285
2	454	478	505	536	569
3	682	718	758	803	854
4	909	957	1010	1071	1138
5	1136	1196	1263	1339	1423
6	1363	1435	1516	1607	1708
7	1590	1674	1768	1875	1992
8	1818	1914	2021	2142	2277
9	2045	2153	2273	2410	2561

	3041	3262	3521	3822	4184
1	304	326	352	382	418
2	608	652	704	764	837
3	912	979	1056	1147	1255
4	1216	1305	1408	1529	1674
5	1521	1631	1761	1911	2092
6	1825	1957	2113	2293	2510
7	2129	2283	2465	2675	2929
8	2433	2610	2817	3058	3347
9	2737	2936	3169	3440	3766

	4619	5159	5843	6739	7961
1	462	516	584	674	796
3	924	1032	1169	1348	1592
2	1386	1548	1753	2022	2388
4	1848	2064	2337	2696	3184
5	2310	2580	2922	3370	3981
6	2771	3095	3506	4043	4777
7	3233	3611	4090	4717	5573
8	3695	4127	4674	5391	6369
9	4157	4643	5259	6065	7165

	9735	12537	17653	30147
1	974	1254	1765	3015
2	1947	2507	3531	6029
3	2921	3761	5296	9044
4	3894	5015	7061	12059
5	4868	6269	8827	15074
6	5841	7522	10592	18088
7	6815	8776	12357	21103
8	7788	10030	14122	24118
9	8762	11283	15888	27132

P. P. (Num. $\frac{a}{b}$)

	1,67	1,81	1,97	2,17	2,38
1	0,17	0,18	0,20	0,22	0,24
2	0,33	0,36	0,39	0,43	0,48
3	0,50	0,54	0,59	0,65	0,71
4	0,67	0,72	0,79	0,87	0,95
5	0,84	0,91	0,99	1,09	1,19
6	1,00	1,09	1,18	1,30	1,43
7	1,17	1,27	1,38	1,52	1,67
8	1,34	1,45	1,58	1,74	1,90
9	1,50	1,63	1,77	1,95	2,14

	2,63	2,93	3,26	3,68	4,17
1	0,26	0,29	0,33	0,37	0,42
2	0,53	0,59	0,65	0,74	0,88
3	0,79	0,88	0,98	1,10	1,25
4	1,05	1,17	1,30	1,47	1,67
5	1,32	1,47	1,63	1,84	2,09
6	1,58	1,76	1,96	2,21	2,50
7	1,84	2,05	2,28	2,58	2,92
8	2,10	2,34	2,61	2,94	3,34
9	2,37	2,64	2,93	3,31	3,75

	4,76	5,49	6,41	7,58	9,09
1	0,48	0,55	0,64	0,76	0,91
2	0,95	1,10	1,28	1,52	1,82
3	1,43	1,65	1,92	2,27	2,73
4	1,90	2,20	2,56	3,03	3,64
5	2,38	2,75	3,21	3,79	4,55
6	2,86	3,29	3,85	4,55	5,45
7	3,33	3,84	4,49	5,31	6,36
8	3,81	4,39	5,13	6,06	7,27
9	4,28	4,94	5,77	6,82	8,18

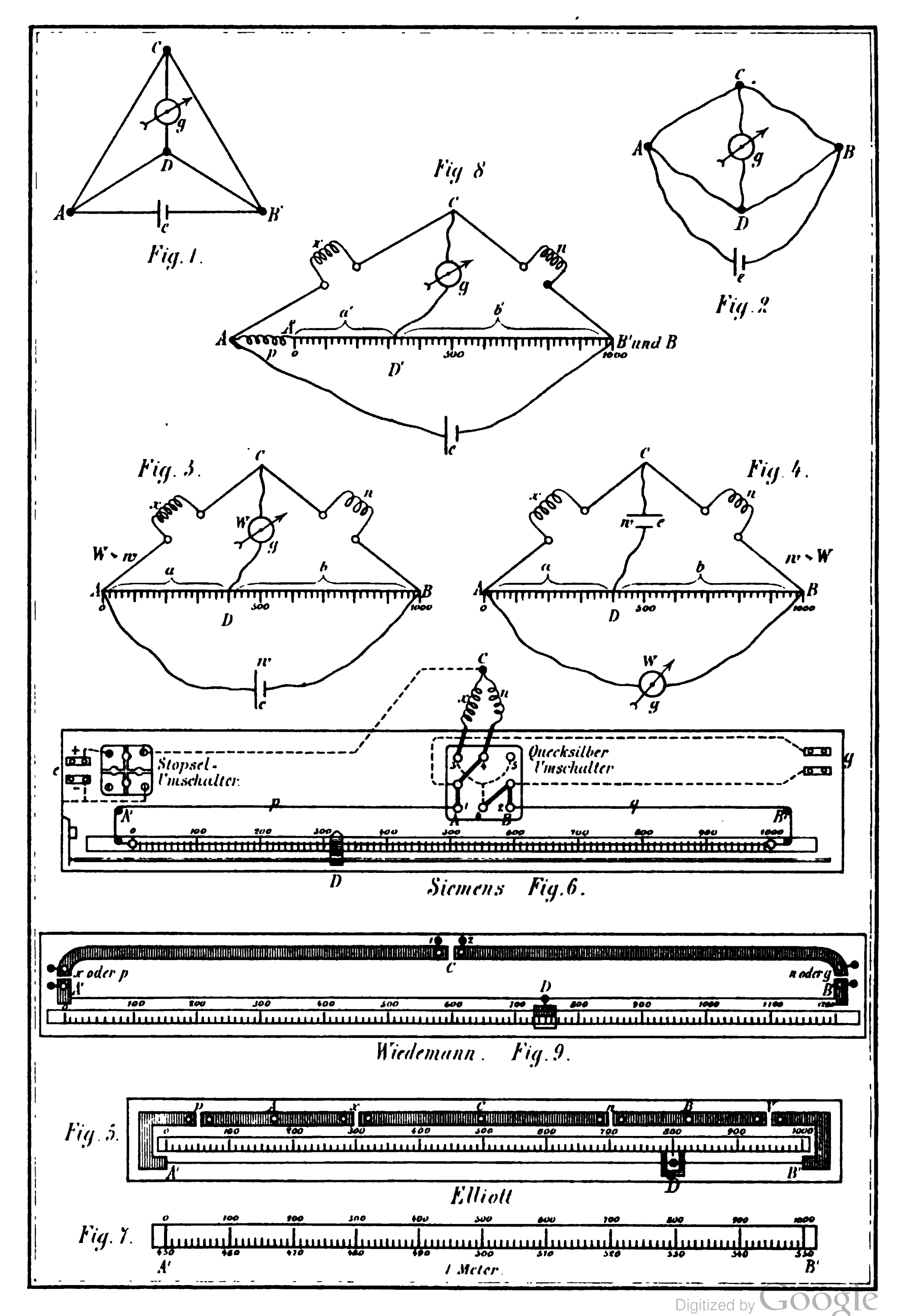
	11,1	13,9	17,9	23,8	33,3
1	1,11	1,39	1,79	2,38	3,33
2	2,22	2,78	3,58	4,76	6,66
3	3,33	4,17	5,37	7,14	9,99
4	4,44	5,56	7,16	9,52	13,32
5	5,55	6,95	8,95	11,90	16,65
6	6,66	8,34	10,74	14,28	19,98
7	7,77	9,73	12,53	16,66	23,31
8	8,88	11,12	14,32	19,04	26,64
9	9,99	12,51	16,11	21,42	29,97

	50,0	83,3	166,7	500,0
1	5,0	8,3	16,7	50,0
2	10,0	16,7	33,3	100,0
3	15,0	25,0	50,0	150,0
4	20,0	33,3	66,7	200,0
5	25,0	41,7	83,4	250,0
6	30,0	50,0	100,0	300,0
7	35,0	58,3	116,7	350,0
8	40,0	66,6	133,4	400,0
9	45,0	75,0	150,0	450,0

b: 0—25.

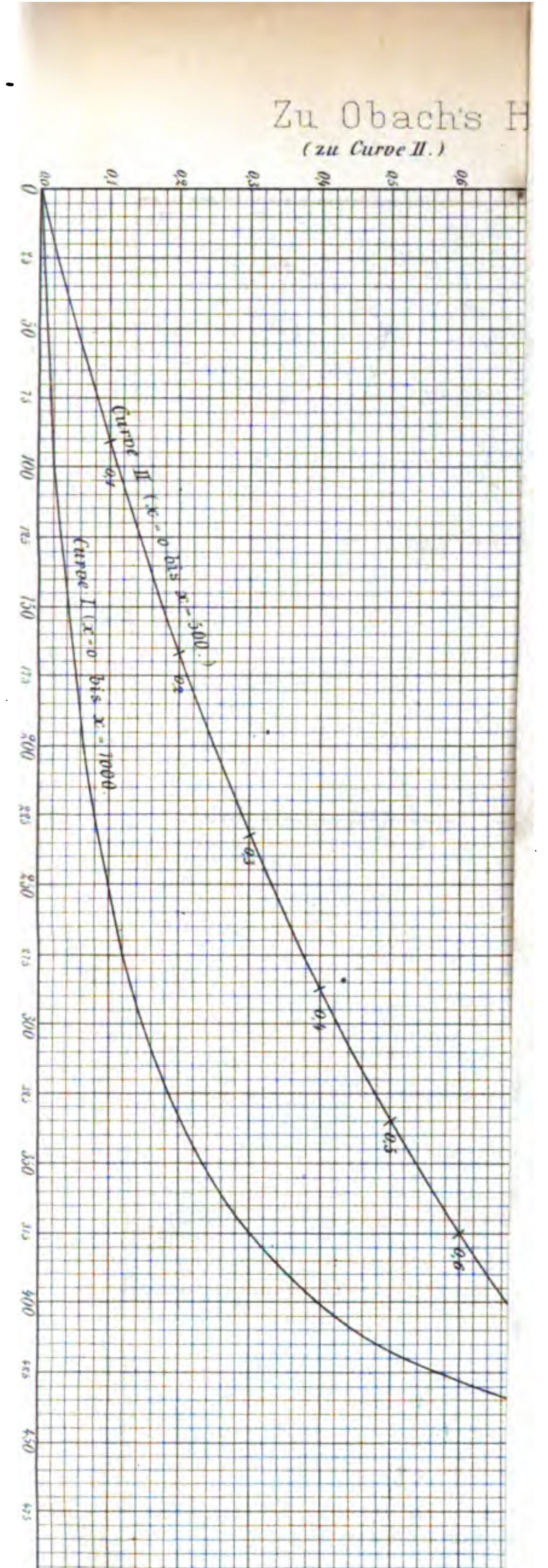

Digitized by Google

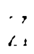
Zu Obach's Hilfstafeln.



Zu Obach's H

(zu Curve II.)





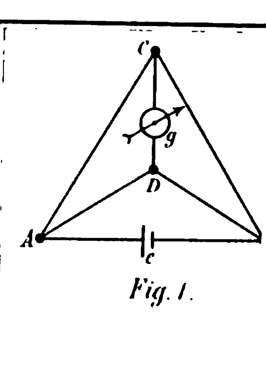


Fig. 1.

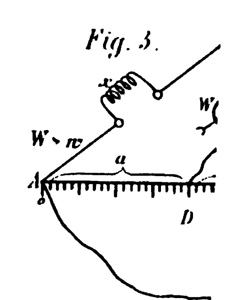
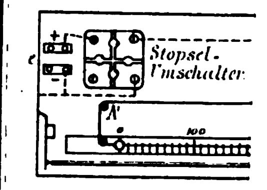


Fig. 3.



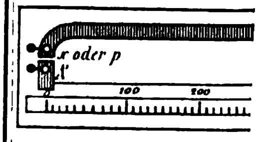
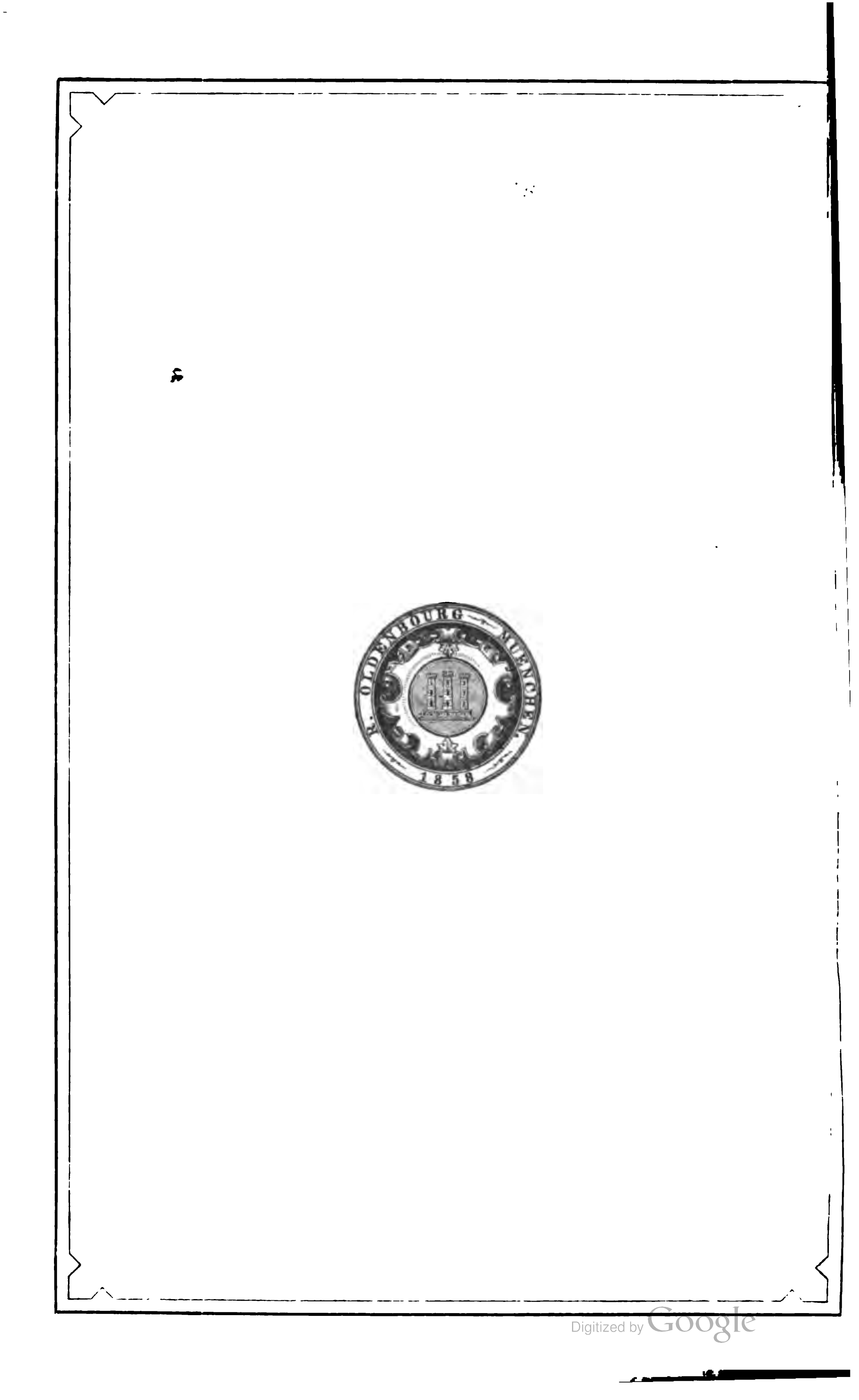


Fig. 5.

Fig. 7.


R. OLDENBOURG MUENCHEN.
1858

